



GEOMETRIE

Jiří Doležal

Vytvořeno v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů
CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016

Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického
základu studia.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY

ISBN 978-80-248-1318-9

Obsah

Obsah	3
Předmluva projektu	7
Pokyny ke studiu	8
Úvod	9
1 Mongeovo promítání	10
1. Obecný úvod	11
2. Zobrazení základních útvarů v Mongeově promítání	13
2.1. Zobrazení bodu – princip metody	13
2.2. Zobrazení přímky	16
2.3. Zobrazení roviny	21
3. Polohové úlohy v Mongeově promítání	29
3.1. Průsečnice dvou rovin	29
3.2. Průsečík přímky s rovinou	32
4. Metrické úlohy v Mongeově promítání	38
4.1. Přímka kolmá k rovině	38
4.2. Rovina kolmá k přímce	40
4.3. Otáčení roviny	45
5. Procvičení základních úloh v Mongeově promítání	51
5.1. Konstrukce přímky	51
5.2. Konstrukce stop roviny	55
5.3. Průsečnice dvou rovin	60
5.4. Vzdálenost bodu od roviny	63
5.5. Vzdálenost bodu od přímky	67
5.6. Tečná rovina kulové plochy	76
5.7. Konstrukce pravidelného šestiúhelníka	82

6.	Zobrazení kružnice v Mongeově promítání	89
7.	Konstrukční úlohy v Mongeově promítání	97
7.1.	Pravidelný osmistěn	97
7.2.	Kulová plocha	116
7.3.	Rotační kužel	124
8.	Úlohy k samostatnému řešení	132
2	Pravoúhlá axonometrie	134
1.	Zobrazení základních útvarů v pravoúhlé axonometrii	134
1.1.	Základní pojmy	134
1.2.	Zobrazení bodu	136
1.3.	Zobrazení přímky	142
1.4.	Zobrazení roviny	146
2.	Polohové úlohy v pravoúhlé axonometrii	148
2.1.	Průsečnice dvou rovin	148
2.2.	Průsečík přímky s rovinou	151
3.	Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně) v pravoúhlé axonometrii	154
4.	Zobrazení tělesa v pravoúhlé axonometrii	158
4.1.	Pravidelný čtyřboký jehlan	158
4.2.	Zářezová (Eckhartova) metoda	166
3	Křivky	173
1.	Kuželosečky	173
1.1.	Elipsa	174
1.1.1.	Definice a ohniskové vlastnosti	174
	Konstrukce a základní pojmy	175
	Tečny k elipse daným bodem	184
	Tečny k elipse daného směru	189
1.2.	Afinní vztah kružnice a elipsy	196
1.2.1.	Trojúhelníková a proužkové konstrukce elipsy	196

1.2.2.	Užití proužkových konstrukcí	198
1.2.3.	Sdružené průměry kružnice a elipsy	200
1.2.4.	Rytzova konstrukce	200
1.3.	Hyperbola	204
1.3.1.	Definice a ohniskové vlastnosti	204
	Konstrukce a základní pojmy	205
	Tečny k hyperbole daným bodem	214
	Tečny k hyperbole daného směru	221
1.4.	Parabola	228
1.4.1.	Definice a ohniskové vlastnosti	228
	Konstrukce a základní pojmy	229
	Tečny k parabole daným bodem	237
	Tečny k parabole daného směru	241
	Konstrukce paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku	244
1.5.	Řešené úlohy na ohniskové vlastnosti kuželoseček	249
1.5.1.	Konstrukce kuželosečky z daných podmínek	249
1.5.2.	Konstrukce paraboly z daných podmínek	254
2.	Šroubovice	259
2.1.	Šroubovice v Mongeově promítání	260
3.	Úlohy k samostatnému řešení	270
4	Plochy	273
1.	Šroubové plochy	274
1.1.	Schodová plocha v Mongeově promítání	275
1.2.	Vývrtková plocha v Mongeově promítání	282
1.3.	Rozvinutelná šroubová plocha v Mongeově promítání	289
2.	Rotační plochy	297
2.1.	Anuloid v Mongeově promítání	298
2.2.	Rotační kvadriky	305
2.2.1.	Rotační paraboloid v kolmém promítání na nárysnu	305

2.2.2.	Jednodílný (zborcený) rotační hyperboloid v MP	313
3.	Průniky ploch a těles	320
3.1.	Rovinné řezy ploch a těles	320
3.1.1.	Řez kosého čtyřbokého hranolu v pravoúhlé axonometrii	320
3.1.2.	Řez prav. čtyřbokého jehlanu v pravoúhlé axonometrii	327
3.1.3.	Řez rotačního válce v pravoúhlé axonometrii	333
3.1.4.	Řez rotačního zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání	340
3.2.	Průnik přímky s plochou či tělesem	346
3.2.1.	Průnik přímky s kosým kruhovým kuželem v PA	346
3.2.2.	Průnik přímky s kosým kruhovým válcem v PA	351
3.3.	Průniky rotačních ploch	356
3.3.1.	Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta rovnoběžných os – metoda rovnoběžných rovin)	356
3.3.2.	Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta různoběžných os – metoda soustředných kulových ploch)	363
4.	Úlohy k samostatnému řešení	370

STUDIJNÍ OPORY S PŘEVAŽUJÍCÍMI DISTANČNÍMI PRVKY PRO PŘEDMĚTY TEORETICKÉHO ZÁKLADU STUDIA

je název projektu, který uspěl v rámci první výzvy Operačního programu Rozvoj lidských zdrojů. Projekt je spolufinancován státním rozpočtem ČR a Evropským sociálním fondem. Partnery projektu jsou Regionální středisko výchovy a vzdělávání, s.r.o. v Mostě, Univerzita obrany v Brně a Technická univerzita v Liberci. Projekt byl zahájen 5.1.2006 a bude ukončen 4.1.2008.

Cílem projektu je zpracování studijních materiálů z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky a chemie tak, aby umožnily především samostatné studium a tím minimalizovaly počet kontaktních hodin s učitelem. Je zřejmé, že vytvořené texty jsou určeny studentům všech forem studia. Studenti kombinované a distanční formy studia je využijí k samostudiu, studenti v prezenční formě si mohou doplnit získané vědomosti. Všem studentům texty pomohou při procvičení a ověření získaných vědomostí. Nezanedbatelným cílem projektu je umožnit zvýšení kvalifikace širokému spektru osob, které nemohly ve studiu na vysoké škole z různých důvodů (sociálních, rodinných, politických) pokračovat bezprostředně po maturitě.

V rámci projektu jsou vytvořeny jednak standardní učební texty v tištěné podobě, koncipované pro samostatné studium, jednak e-learningové studijní materiály, přístupné prostřednictvím internetu. Součástí výstupů je rovněž banka testových úloh pro jednotlivé předměty, na níž si studenti ověří, do jaké míry zvládli prostudované učivo.

Bližší informace o projektu můžete najít na adrese <http://www.studopory.vsb.cz/>.

Přejeme vám mnoho úspěchů při studiu a budeme mít radost, pokud vám předložený text pomůže při studiu a bude se vám líbit. Protože nikdo není neomylný, mohou se i v tomto textu objevit nejasnosti a chyby. Předem se za ně omlouváme a budeme vám vděční, pokud nás na ně upozorníte.

ESF – ROVNÉ PŘÍLEŽITOSTI PRO VŠECHNY



POKYNY KE STUDIU

Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.



Výklad

označuje samotný výklad učiva dané části.



Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které jsou těžištěm práce.

Příklad: uvádí zadání příkladu.



Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Úvod

- předkládaný studijní materiál je spíše sbírkou komfortně řešených úloh než souvislým učebním textem
- jednotlivé úlohy jsou přitom až na výjimky řešeny metodou krok po kroku, tj. od zadání až po řešení je vyrýsována série několika obrázků opatřených vysvětlujícím komentářem
- učební látka je rozdělena do čtyř částí: Mongeovo promítání, Pravoúhlá axonometrie, Křivky a Plochy; na začátku každé části je uveden její tematický obsah, jen ve stručnosti a heslovitě je připojena příslušná teorie
- na webových stránkách projektu (<http://www.studopory.vsb.cz/>) lze najít interaktivní verzi těchto materiálů včetně virtuálních 3D modelů ke stereometrickým úlohám a další aktuální informace
- v originále jsou všechny obrázky provedeny barevně, což výrazně přispívá k jejich přehlednosti; při černobílém tisku se tato vlastnost nemusí zachovat, zvláště u náhledů pořízených z virtuálních 3D modelů

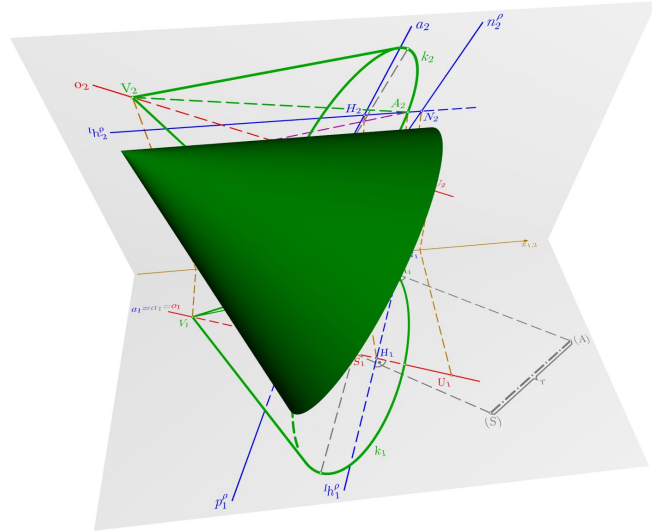
Mongeovo promítání

Tematický obsah

- Zobrazení základních útvarů
 - Zobrazení bodu, Zobrazení přímky, Zobrazení roviny
- Polohové úlohy
 - Průsečnice dvou rovin, Průsečík přímky s rovinou
- Metrické úlohy
 - Přímka kolmá k rovině, Rovina kolmá k přímce, Otáčení roviny
- Procvičení základních úloh
 - Konstrukce přímky, Stopy roviny, Průsečnice dvou rovin, Vzdálenost bodu od roviny, Vzdálenost bodu od přímky, Tečná rovina kulové plochy, Pravidelný šestiúhelník
- Zobrazení kružnice
- Řešené konstrukční úlohy
 - Pravidelný osmistěn, Kulová plocha, Rotační kužel
- Úlohy k samostatnému řešení

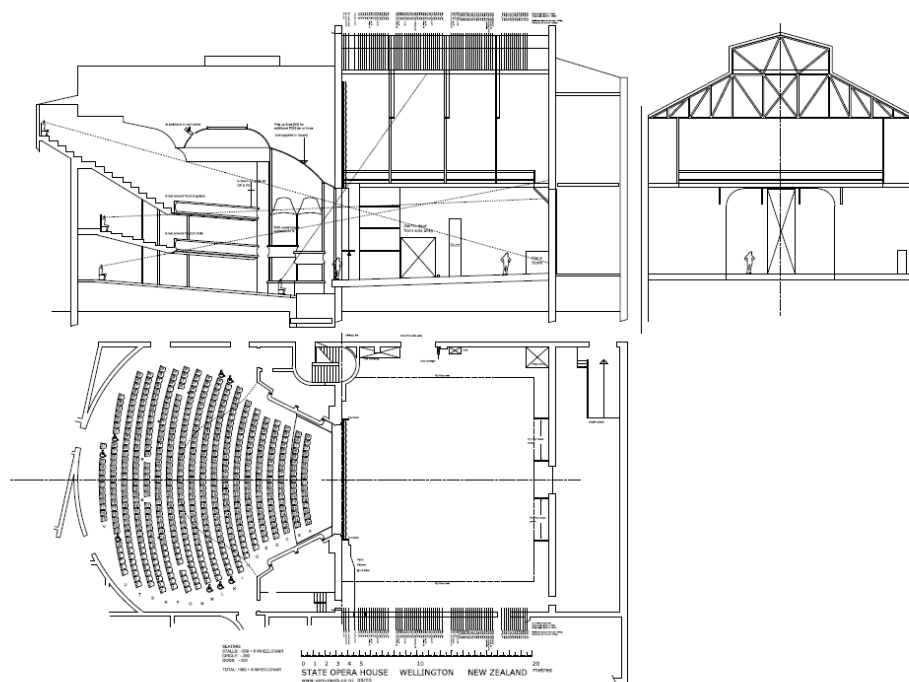
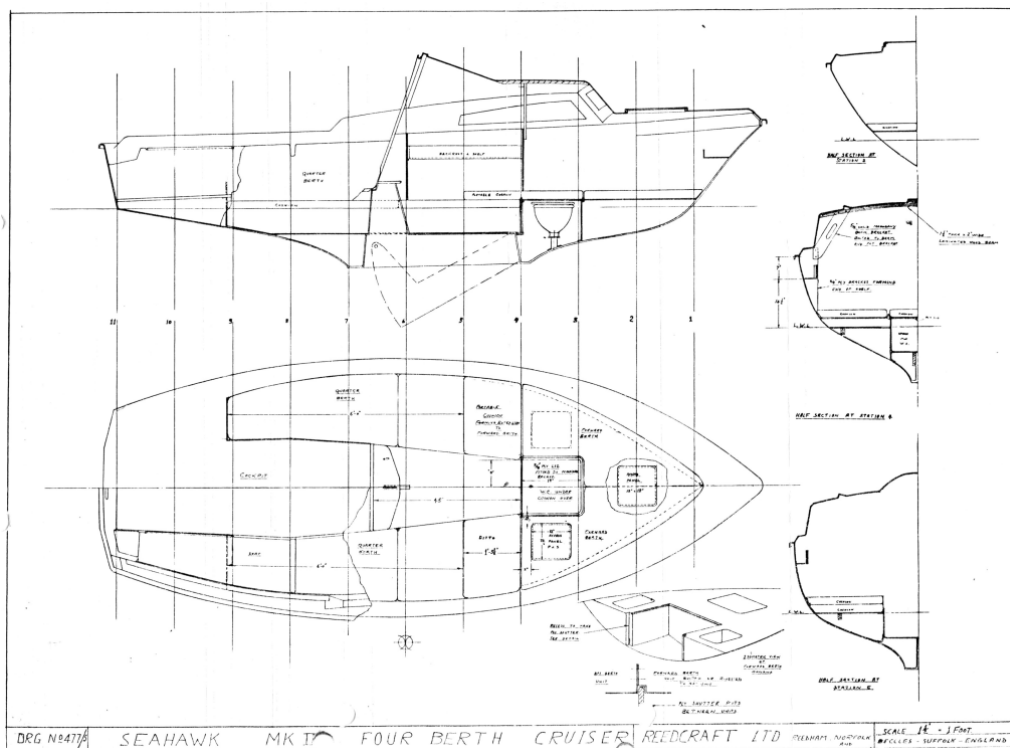
1. Obecný úvod

Výklad



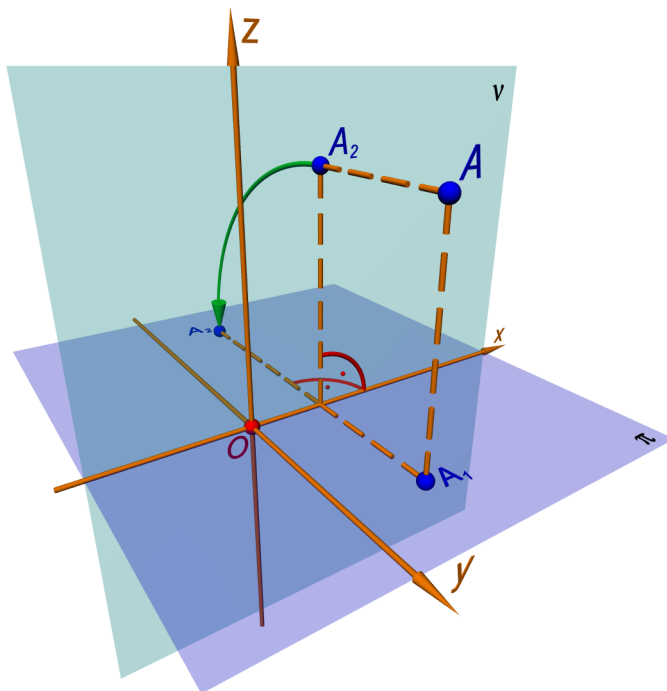
- francouzský geometr a inženýr **Gaspard Monge** (1746–1818), po němž je promítání pojmenováno, je považován za zakladatele novodobé **deskriptivní geometrie**
- Mongeovou metodou sdruženého půdorysu a nárýsu lze poměrně snadno řešit rozmanité typy konstrukčních úloh, zejména metrických
- tato relativní jednoduchost je ovšem často **na úkor názornosti**
- zobrazení pomocí Mongeova promítání nachází užití v různých modifikacích především v technických oborech, kde je potřeba z obrazů prostorových objektů jednoduše zjistit jejich rozměry a případně další vzájemné vztahy

Ukázky použití ve strojní a stavební praxi



2. Zobrazení základních útvarů v Mongeově promítání

2.1. Zobrazení bodu – princip metody



Výklad



- v **Mongeově promítání** je každý bod nejprve pravouhle promítnut do půdorysny π a nárýsny ν – tj. je sestrojen jeho **půdorys** a **nárýs**
- následuje sklopení (otočení o 90°) jedné průmětny do druhé kolem osy x – tzv. **sdružení průměten** (po otočení směřují kladné směry os y, z na opačné strany)
- tím je každému bodu v prostoru jednoznačně přiřazena dvojice bodů v rovině – tzv. **sdružené průměty**, jejichž spojnice je kolmá k ose x a říká se jí **ordinála**
- je-li dán bod A o souřadnicích $[x_A; y_A; z_A]$, pak příslušná ordinála protíná osu x v bodě x_A a půdorys A_1 resp. nárýs A_2 leží ve vzdálenosti (orientované) y_A resp. z_A od osy x (viz následující příklad)

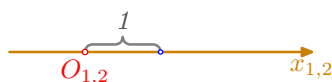
**Řešené úlohy**

Příklad: Sestrojte sdružené průměty bodu $A[1; 2; 3]$.

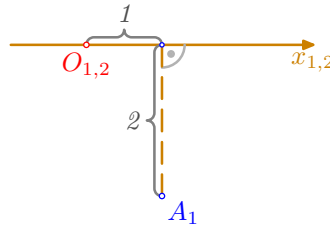
- vodorovně zvolme osu x , kladný směr ukazuje doprava, a na ní počátek O ; oba útvary leží současně v půdorysně i nárysně, proto je značíme $x_{1,2}, O_{1,2}$



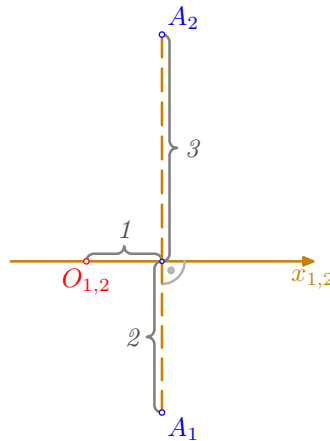
- na osu x nanesme ve zvoleném měřítku (obvykle 1 cm) a ve správném smyslu x -ovou souřadnici bodu A



- kladný směr osy y ukazuje kolmo dolů a tudíž kladnou y -ovou souřadnici nanese tímto směrem a získáme tak půdorys A_1 bodu A

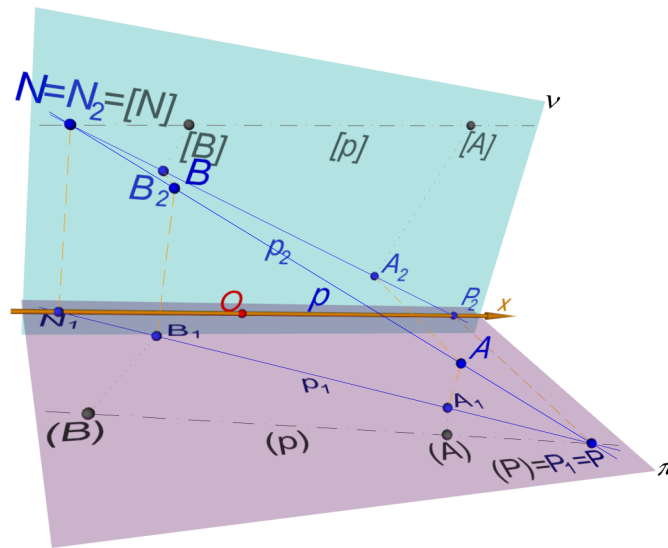


- podobně nanese kladnou z -ovou souřadnici v kladném směru osy z , tj. nahoru, a získáme nárys A_2 ; oba sdružené průměty A_1, A_2 bodu A tedy leží na ordinále, která je kolmá k ose x ; bod A můžeme nyní snadno vymodelovat: k tomu je vhodné přeložit papír podél osy x a vrátit nárysnu do její původní polohy kolmé k půdorysně; bod A pak leží nad svým půdorysem A_1 a současně před svým nárysem A_2



□

2.2. Zobrazení přímky



Výklad

- sdruženými průměty přímky p , která má k oběma průmětnám obecnou polohu, je dvojice navzájem různých přímek – půdorys p_1 a nárys p_2
- pro lepší rekonstrukci přímky z průmětu do prostoru je užitečné najít její průsečíky s oběma průmětnami – tzv. **stopníky** přímky
- **půdorysný stopník** P je průsečíkem přímky p s půdorysnou π ; protože bod P leží v půdorysně, splývá se svým půdorysem $P_1 = P$ a jeho nárys P_2 leží na ose $x - z$ této podmínky lze také půdorysný stopník v průmětu nejlépe najít: průsečík přímky p_2 s osou x je jeho nárys P_2 a na ordinále a přímce p_1 najdeme půdorys P_1 bodu P
- podobně je **nárysný stopník** N průsečíkem přímky p s nárysnou ν ; splývá se svým nárysem $N_2 = N$ a jeho půdorys N_1 leží na ose $x - z$ jeho konstrukce v průmětu je tudíž obdobná: průsečík přímky p_1 s osou x je půdorys N_1 a na ordinále a přímce p_2 najdeme nárys N_2 bodu N
- další často užívanou konstrukcí je tzv. **sklápění promítací roviny přímky do průmětny** - obecně jde o otočení roviny určené přímkou a jejím průmětem do průmětny

(tedy o 90°); sklápět lze vždy na dvě různé strany - výběr záleží na konkrétním zadání a situaci v průmětně; sklopením lze zjistit **vzdálenost dvou bodů**, **nanést určitou vzdálenost** nebo určit **odchylku přímky od průmětny**

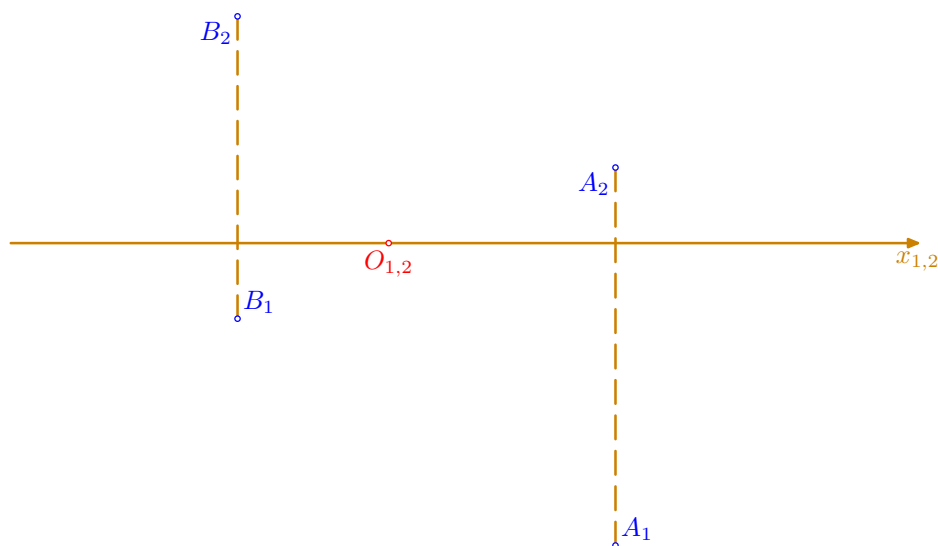
- v Mongeově promítání lze sklopit **půdorysně promítací rovinu přímky p** , tj. rovinu určenou přímkami p, p_1 do π ; v následujícím příkladě jsou tak sklopeny body A, B – jejich výška nad půdorysnou π je dána příslušnou z -ovou souřadnicí a objevuje se v narysu jako vzdálenost bodů A_2, B_2 od osy x ; sklopené útvary se v průmětu obvykle vyznačují **čerchovaně** a značí se **v závorkách**
- podobně je možno sklopit **nárysně promítací rovinu přímky p** , tedy rovinu určenou přímkami p, p_2 do ν

Řešené úlohy

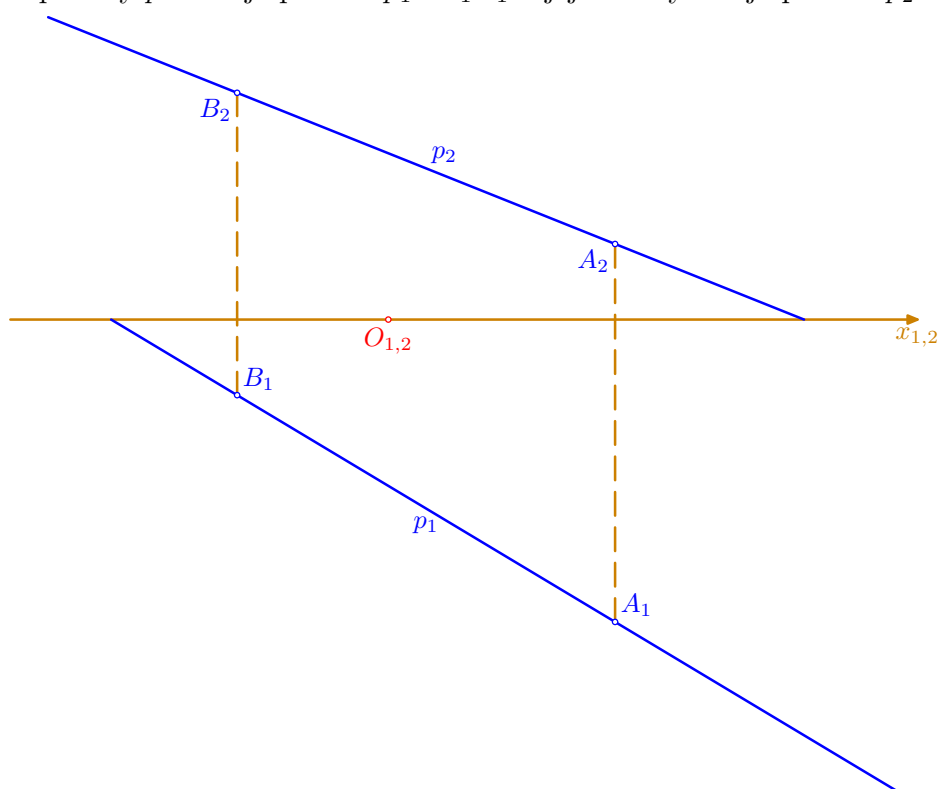
Příklad: Sestrojte sdružené průměty přímky $p=AB$; $A[3; 4; 1], B[-2; 1; 3]$.



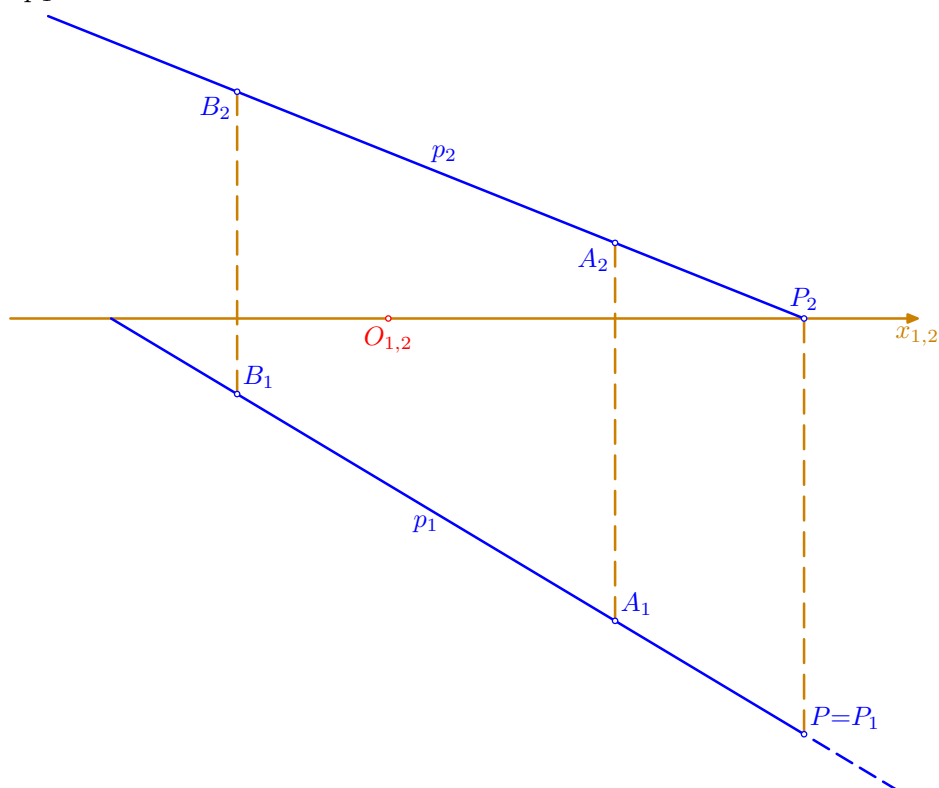
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty A_1, A_2, B_1, B_2 bodů A, B



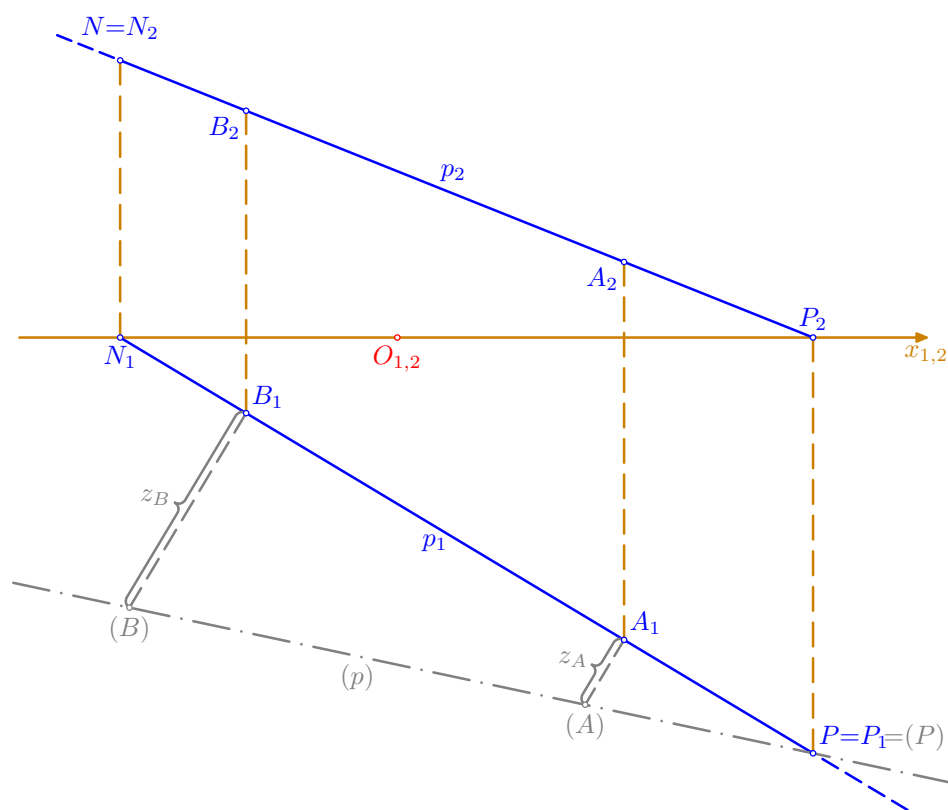
- půdorysem přímky $p=AB$ je přímka $p_1=A_1B_1$ a jejím nárysem je přímka $p_2=A_2B_2$



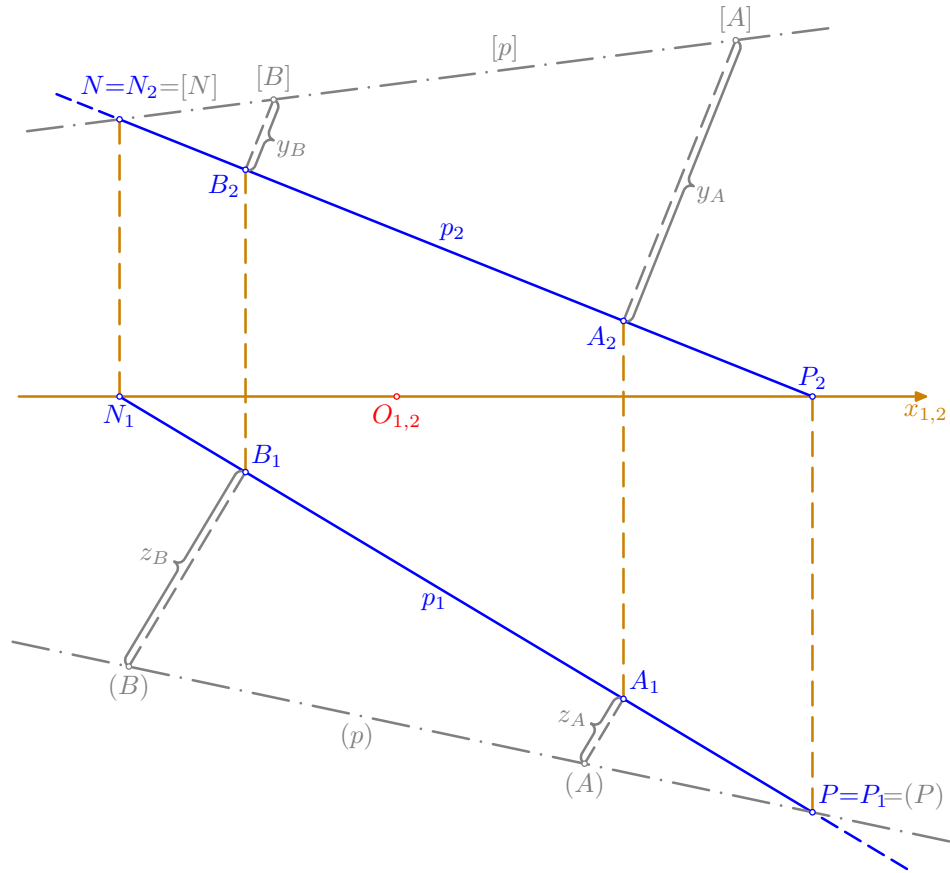
- pro nárys P_2 půdorysného stopníku $P=p \cap \pi$ platí $P_2=p_2 \cap x_{1,2}$ a půdorys P_1 najdeme na přímce p_1 a na ordinále



- skutečnou délku úsečky AB můžeme zjistit sklopením půdorysně promítací roviny přímkou p do π : sklopená poloha (A) bodu A leží na kolmici k přímce p_1 vedené bodem A_1 a platí $|(A)A_1|=z_A=1$ (výška bodu A nad π), podobně se sestrojí sklopená poloha (B) bodu B ($|(B)B_1|=z_B=3$); tím získáme sklopenou polohu $(p)=(A)(B)$ přímky p , skutečnou velikost úsečky AB ($|AB|=|(A)(B)|$) a také odchylku přímky p od půdorysny jako velikost úhlu, který svírají přímky $p_1, (p)$ (vrcholem tohoto úhlu je již sestrojený bod $P=P_1=(P)$, který při sklápění zřejmě zůstane na místě)

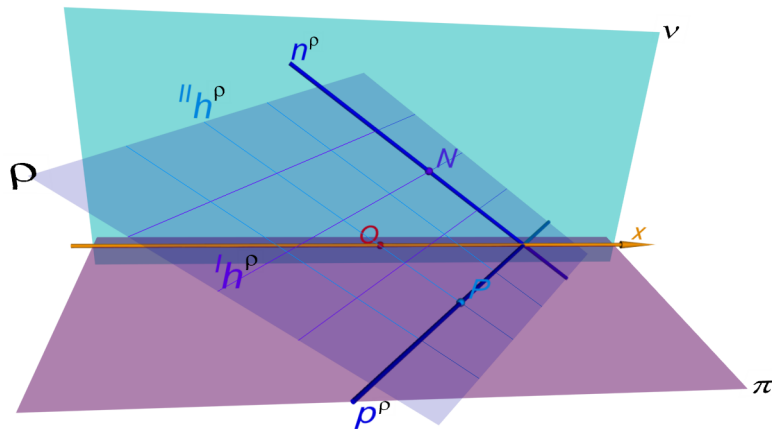


- analogicky lze sestavit sklopenou polohu $[p]=[A][B]$ přímky p do náryсны ν , tentokrát ovšem nanášíme y -ové souřadnice bodů A, B (tj. jejich vzdálenosti od náryсны)



□

2.3. Zobrazení roviny

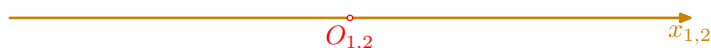




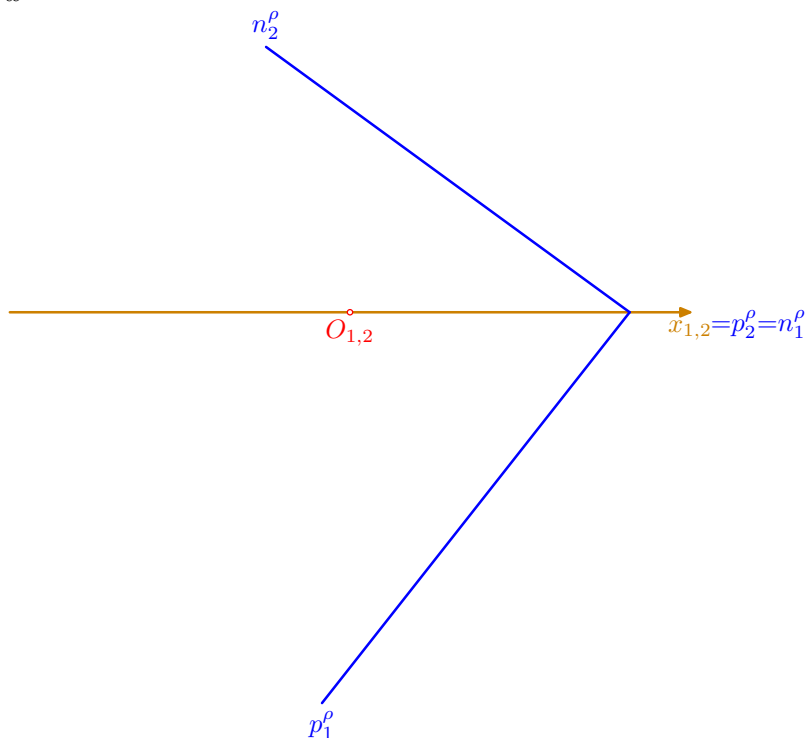
Výklad

Stopy a hlavní přímky roviny

- půdorysem resp. nárysem obecně položené roviny ρ je celá půdorysna π resp. celá nárysna ν



- průsečnice roviny ρ s půdorysnou (nárysnou) je tzv. **půdorysná (nárysná) stopa** p^ρ (n^ρ) roviny ρ – splývá se svým půdorysem p_1^ρ (nárysem n_2^ρ) a její nárys p_2^ρ (půdorys n_1^ρ) padne na osu x

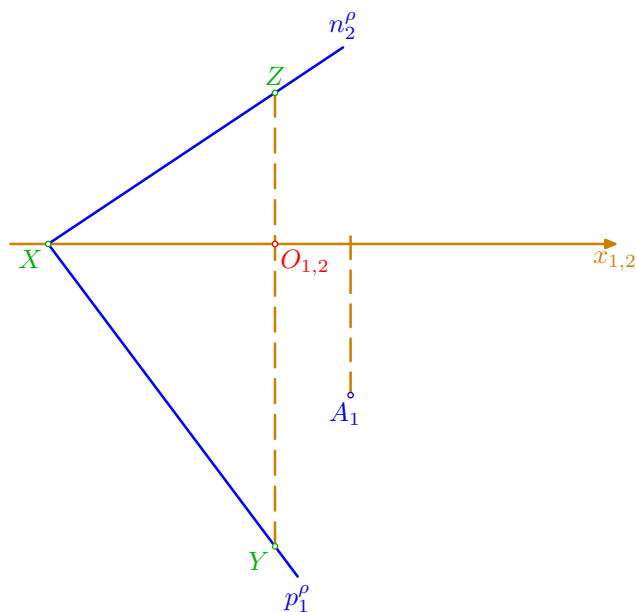




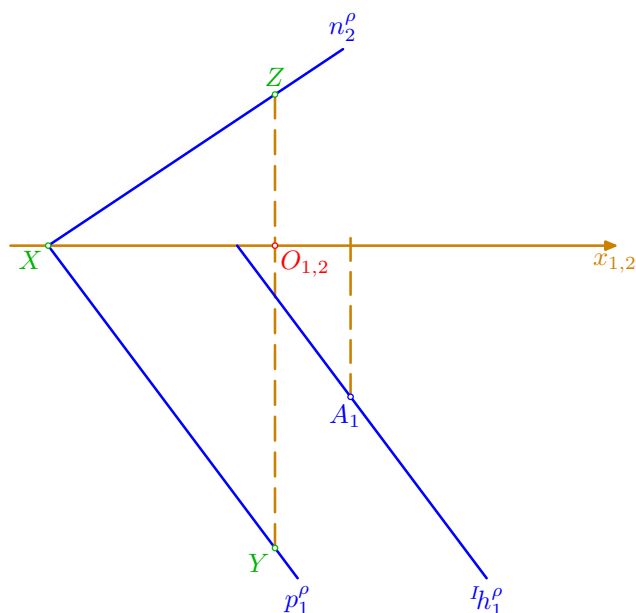
Řešené úlohy

Příklad: Najděte nárys bodu A ležícího v rovině ρ ; $\rho(-3; 4; 2)$, $A[1; 2; ?]$.

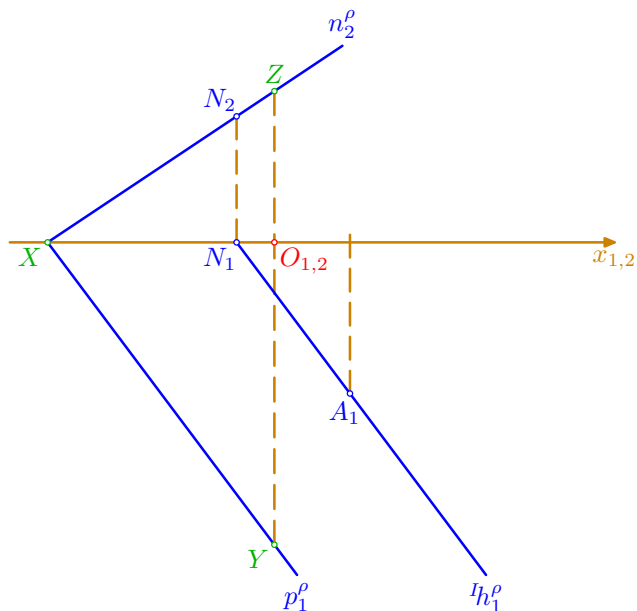
- zadání: stopy roviny ρ jsou určeny pomocí bodů X, Y, Z , kde $p_1^\rho = XY$, $n_2^\rho = XZ$, přičemž pro souřadnice bodů X, Y, Z platí $X[-3; 0; 0]$, $Y[0; 4; 0]$, $Z[0; 0; 2]$



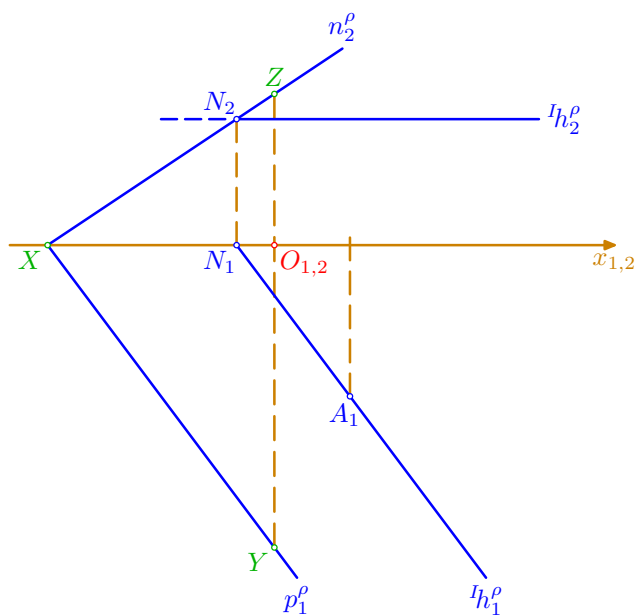
- 1. způsob řešení pomocí hlavní přímky I. osnovy roviny ρ : $A_1 \in I h_1^\rho$, $I h_1^\rho \parallel p_1^\rho$



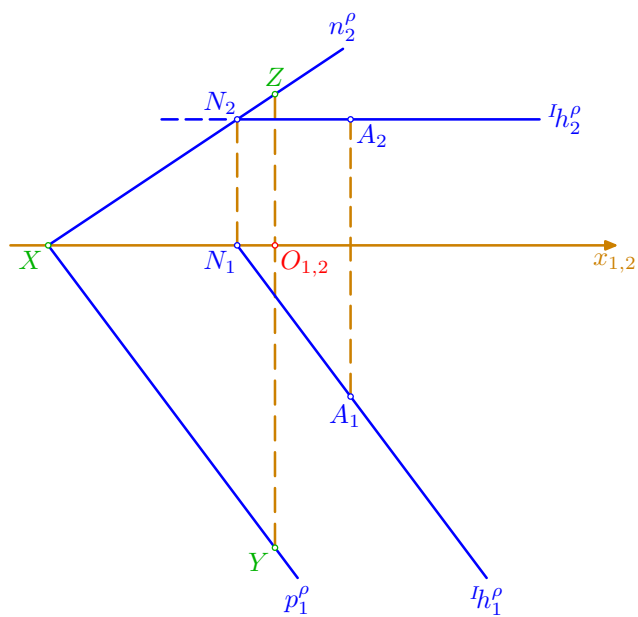
- najdeme její nárysny stopník N : $N_1 = I h_1^p \cap x$ a N_2 leží na ordinále a na stopě n_2^p



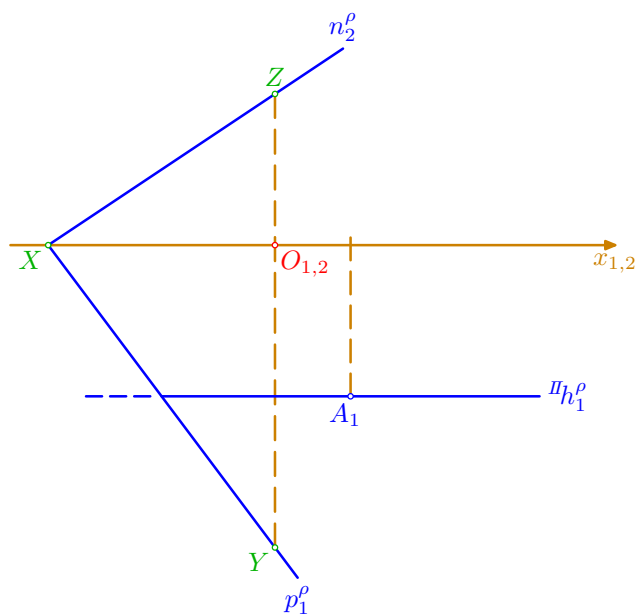
- bodem N_2 pak prochází nárys $I h_2^p \parallel x$



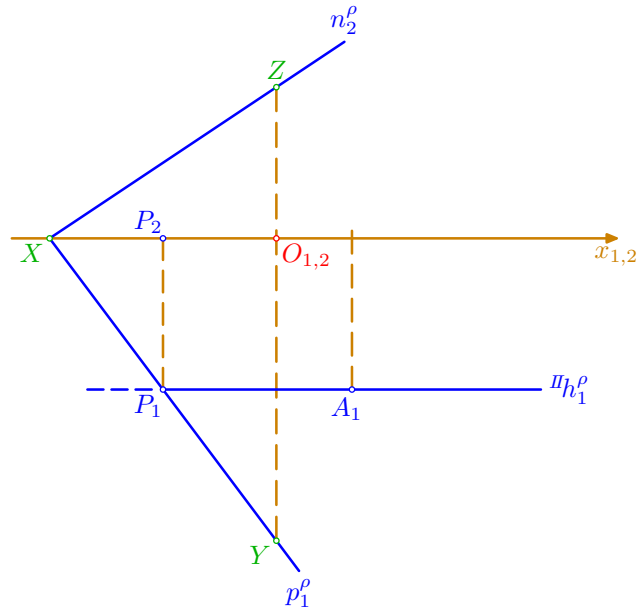
- a nárys A_2 bodu A najdeme na ordinále a na ${}^I h_2^\rho$



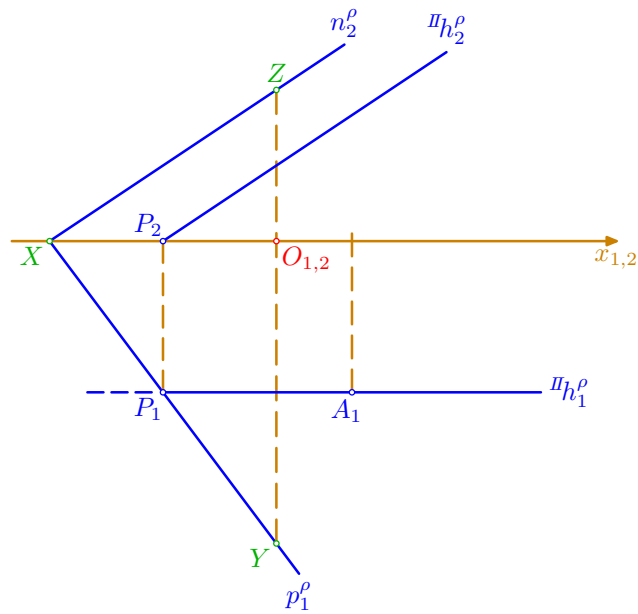
- 2. způsob řešení pomocí hlavní přímky II. osnovy: $A_1 \in {}^{II} h_1^\rho, {}^{II} h_1^\rho \parallel x$



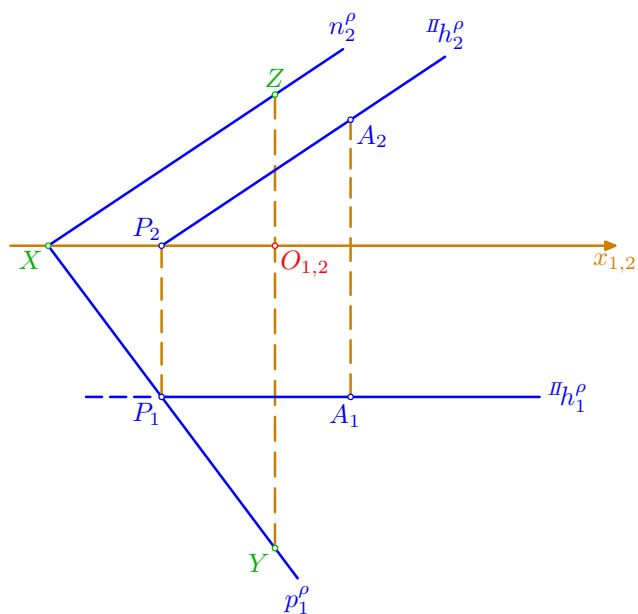
- najdeme její půdorysný stopník P : $P_1 = \Pi_{h_1}^\rho \cap p_1^\rho$ a P_2 leží na ordinále a na ose x



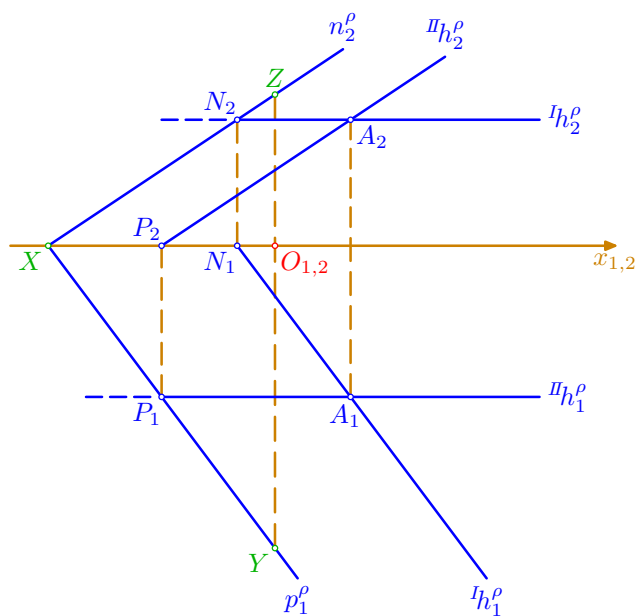
- bodem P_2 pak prochází nárys $\Pi_{h_2}^\rho \parallel n_2^\rho$



- a tím dojdeme k témuž výsledku



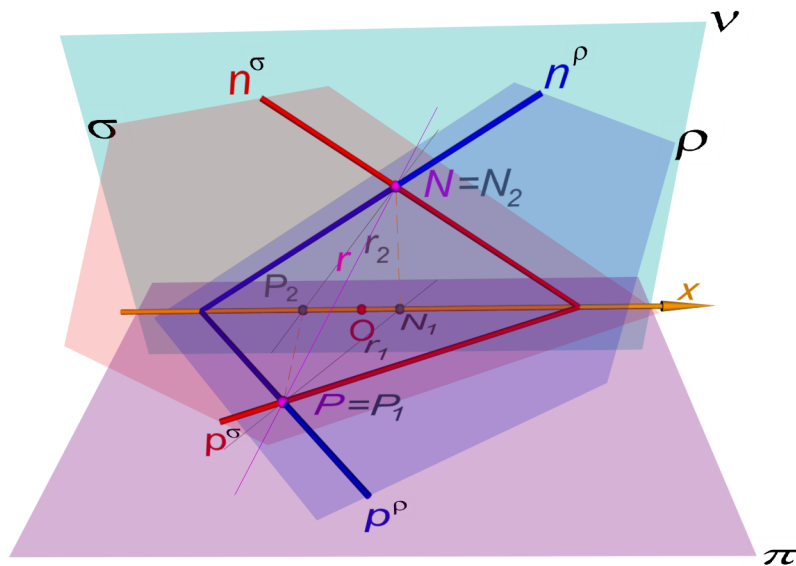
- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

3. Polohové úlohy v Mongeově promítání

3.1. Průsečnice dvou rovin



Výklad

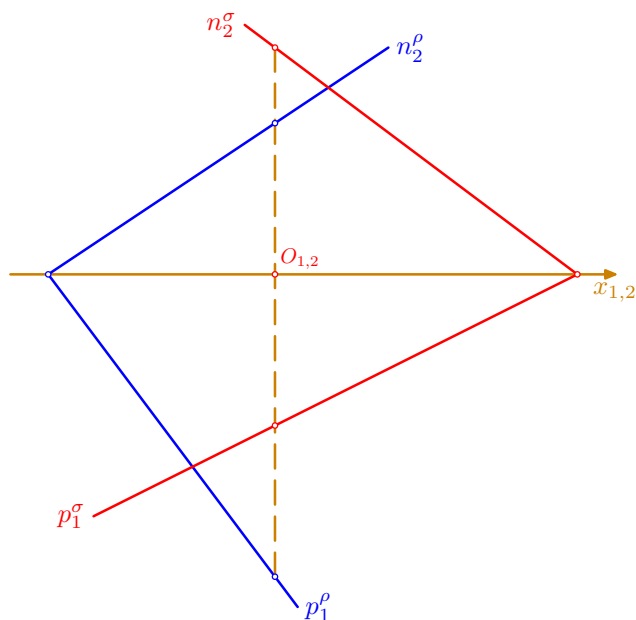
- dvě různoběžné roviny se protínají v přímce – k jejímu sestrojení tedy stačí znát dva společné body obou rovin
- v Mongeově promítání se nejčastěji užívají průsečíky půdorysných a nárysných stop, případně průsečíky hlavních přímek obou rovin ležících v některé rovině rovnoběžné s π nebo s ν



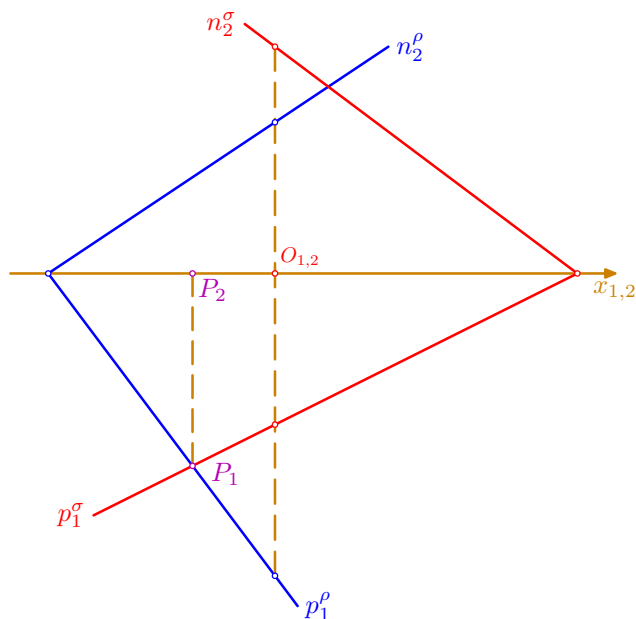
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte průsečnici r rovin ρ, σ ; $\rho(-3; 4; 2), \sigma(4; 2; 3)$.

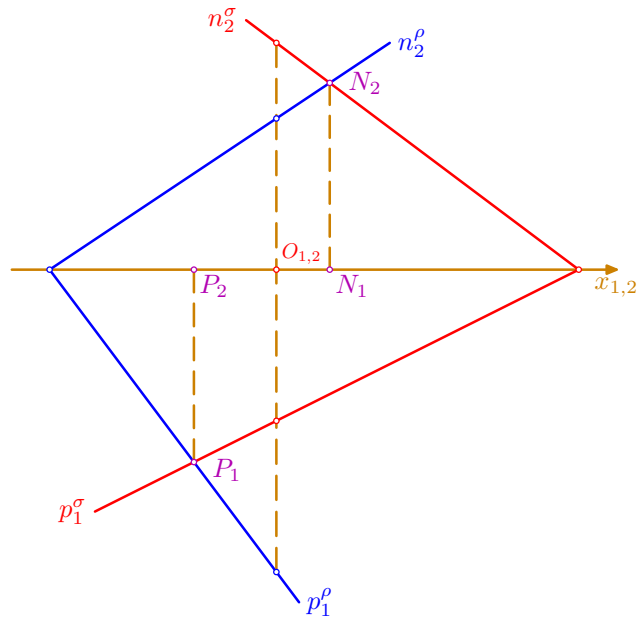
- podle zadání sestrojíme stopy p_1^{ρ}, n_2^{ρ} a $p_1^{\sigma}, n_2^{\sigma}$ obou rovin



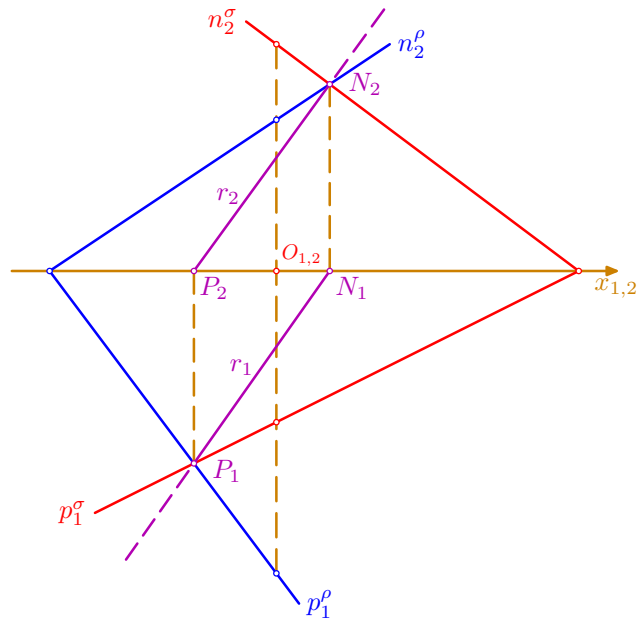
- půdorysný stopník P přímky $r = \rho \cap \sigma$ je průsečíkem půdorysných stop – tedy $P_1 = p_1^{\rho} \cap p_1^{\sigma}$ a nárys P_2 najdeme na ordinále a na ose x



- podobně pro nárysný stopník N hledané přímky r je $N_2 = n_2^\rho \cap n_2^\sigma$ a půdorys N_1 leží na ordinále a na ose x

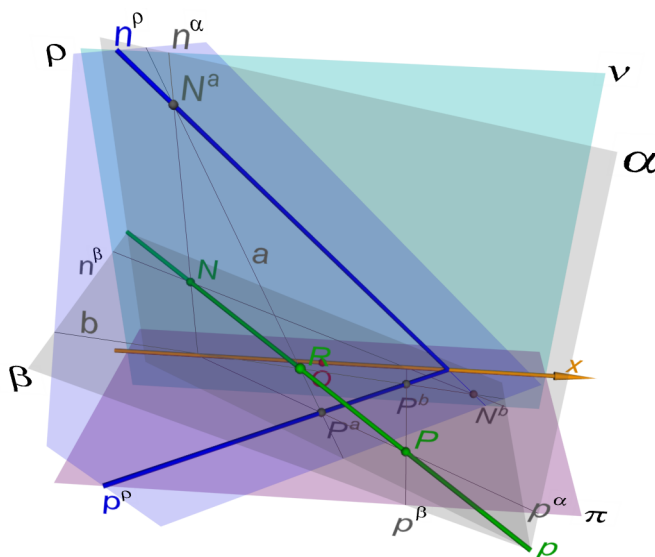


- na závěr stačí doplnit oba průměty $r_1 = P_1 N_1$ a $r_2 = P_2 N_2$ průsečnice $r = PN$ rovin ρ a σ



□

3.2. Průsečík přímky s rovinou



Výklad

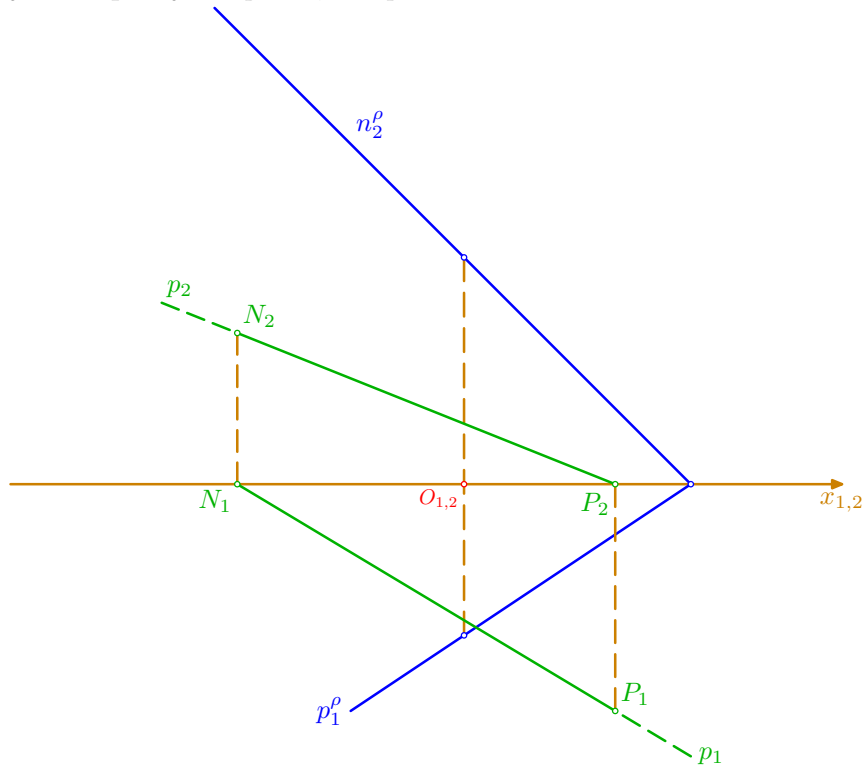
- k sestavení průmětu průsečíku dané přímky a roviny je třeba proložit zadanou přímkou **pomocnou rovinu**; obecně lze tuto rovinu volit libovolně vhodně – v Mongeově promítání se nejčastěji prokládá rovina kolmá k půdorysně π nebo k nárysně ν (užívá se tím tzv. **krycí přímka**)
- je-li tedy dána přímka p a rovina ρ , proložme přímkou p rovinu α (β) kolmou k π (ν); průsečnice a (b) rovin ρ a α (β) pak protíná přímkou p v hledaném průsečíku R přímky p s rovinou ρ



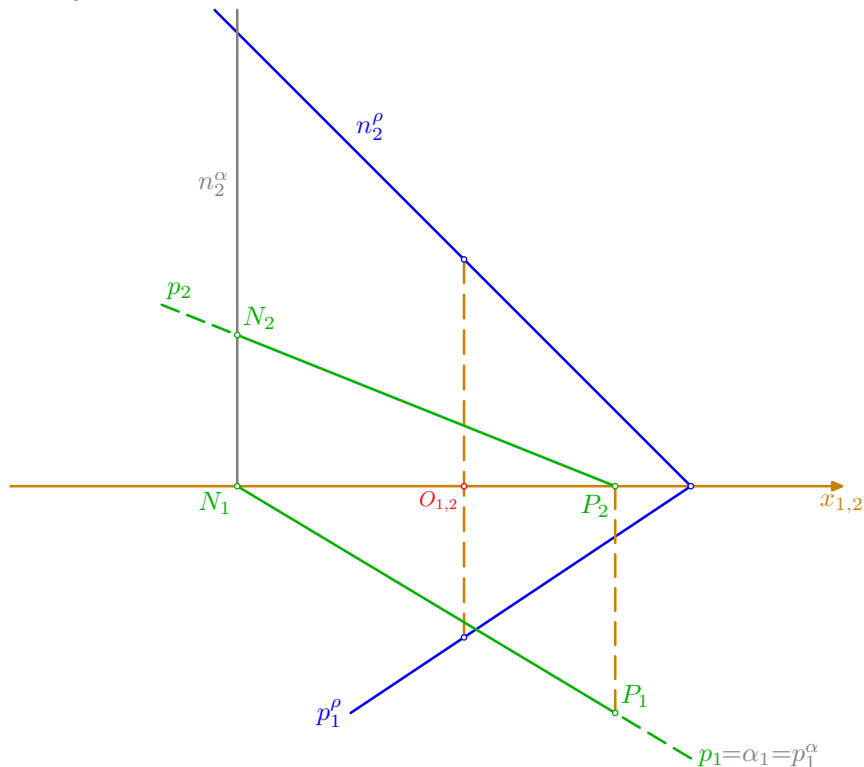
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte průsečík R přímky $p=PN$ s rovinou ρ ; $P[2; 3; 0]$, $N[-3; 0; 2]$, $\rho(3; 2; 3)$.

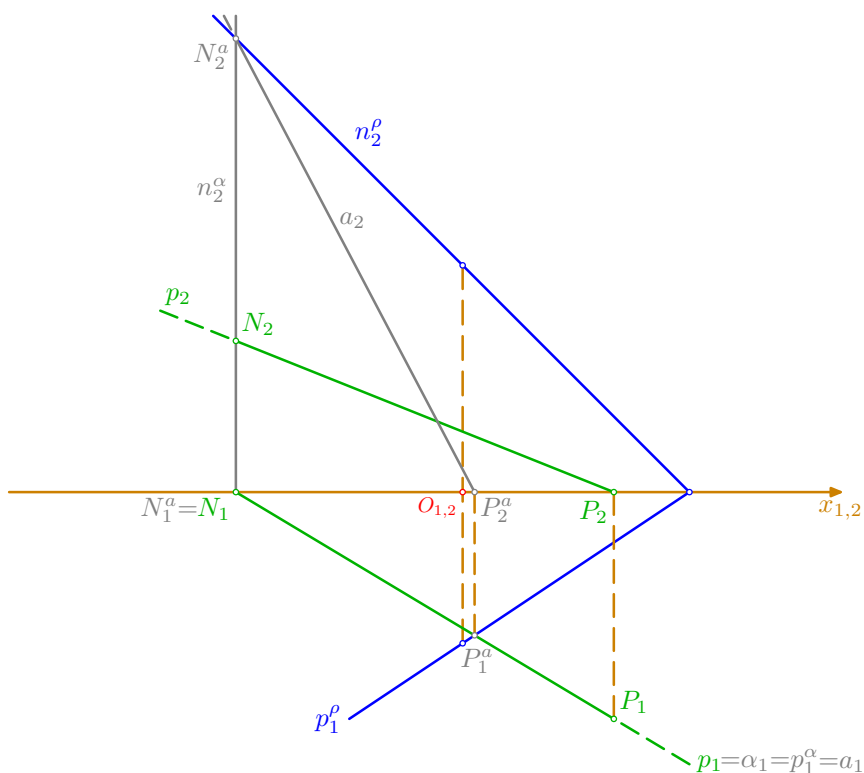
- podle zadání sestrojme stopy p_1^{ρ}, n_2^{ρ} roviny ρ a sdružené průměty p_1, p_2 přímky p , která je určena svými stopníky $P=p \cap \pi, N=p \cap \nu$



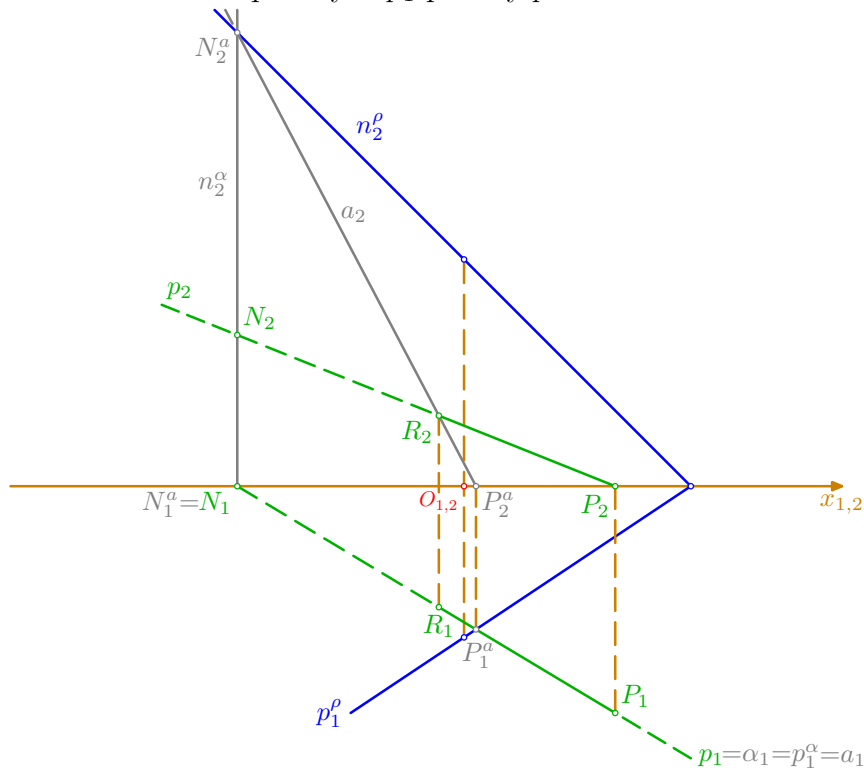
- 1. způsob řešení: přímkou p proložíme rovinu $\alpha \perp \pi$ – je tedy $p_1 = \alpha_1 = p_1^{\alpha}, n_2^{\alpha} \perp x$ a stopy $p_1^{\alpha}, n_2^{\alpha}$ se protínají na ose x



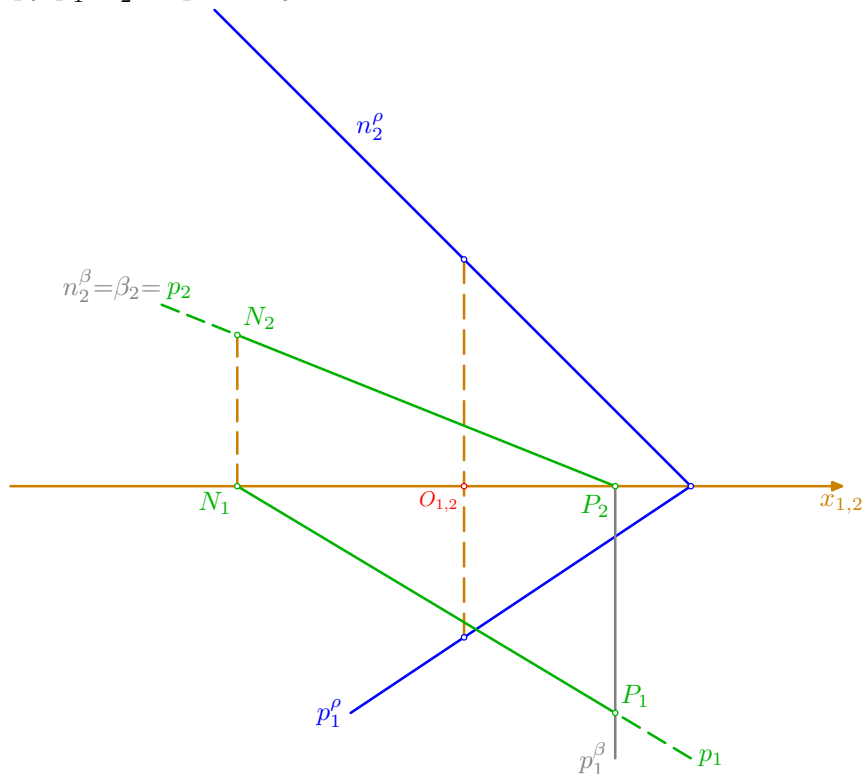
- sestrojme průsečnici $a = P^a N^a$ rovin α a ρ , kde $P_1^a = p_1^\rho \cap p_1^\alpha$, $N_2^a = n_2^\rho \cap n_2^\alpha$ a zbývající průměty P_2^a a N_1^a najdeme na ose x a příslušných ordinálách; v půdorysu se tudíž kryjí průměty přímek a a p ($a_1 = p_1$) a odtud pochází název **krycí přímka**, v náryse je $a_2 = P_2^a N_2^a$



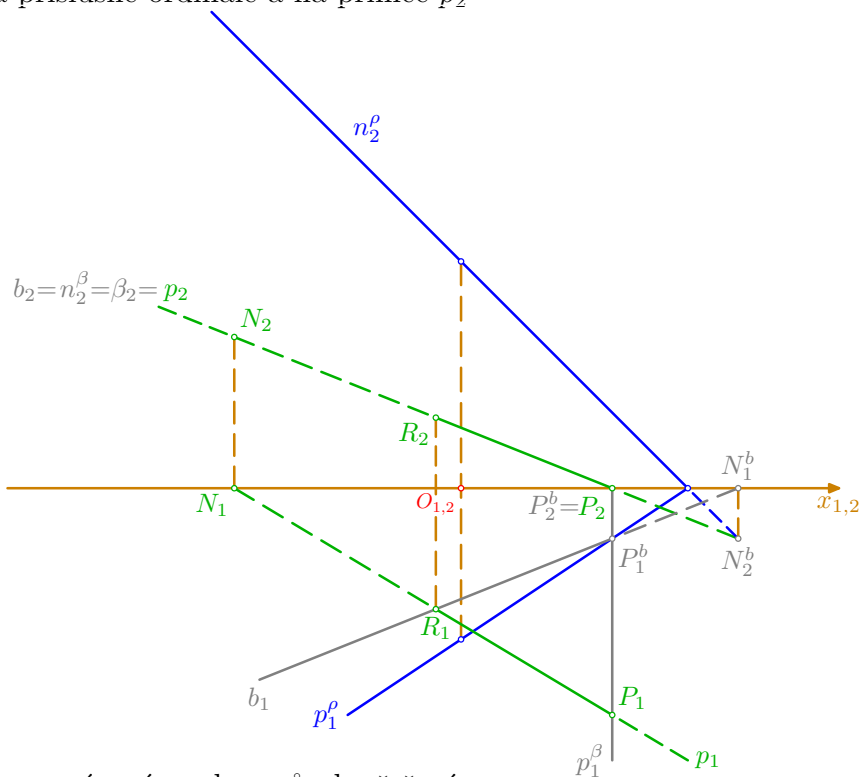
- přímky a, p se protínají v hledaném bodě $R=p \cap \rho$, jehož nárys je $R_2=a_2 \cap p_2$ a půdorys R_1 najdeme na ordinále a na půdorysu p_1 přímky p



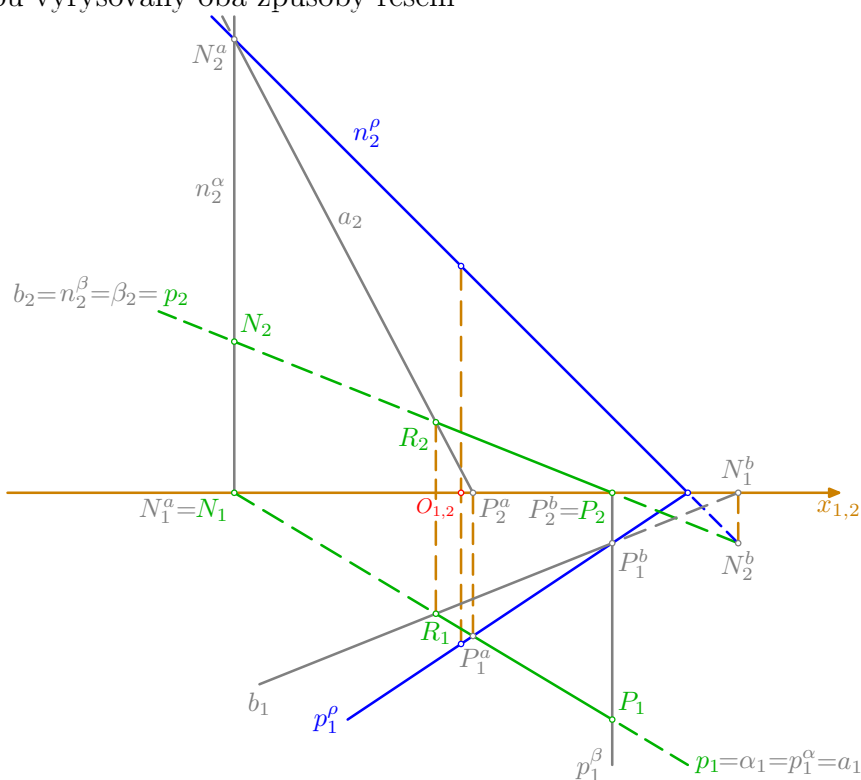
- 2. způsob řešení: analogicky proložme přímkou p rovinu $\beta \perp \nu$ – je tedy $n_2^\beta = \beta_2 = p_2$, $p_1^\beta \perp x$ a stopy p_1^β, n_2^β se protínají na ose x



- tentokrát najdeme nejdřív půdorys $R_1 = b_1 \cap p_1$ průsečíku $R = p \cap \rho$ a pak doplníme jeho nárys R_2 na příslušné ordinále a na přímce p_2



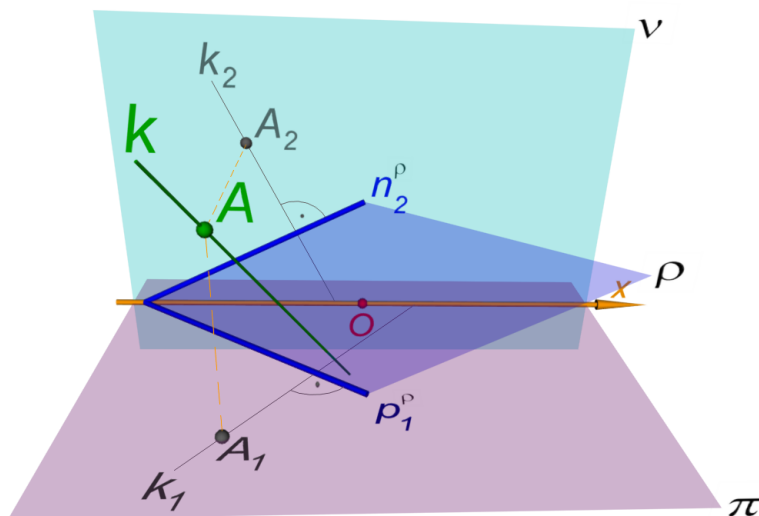
- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

4. Metrické úlohy v Mongeově promítání

4.1. Přímka kolmá k rovině



Výklad

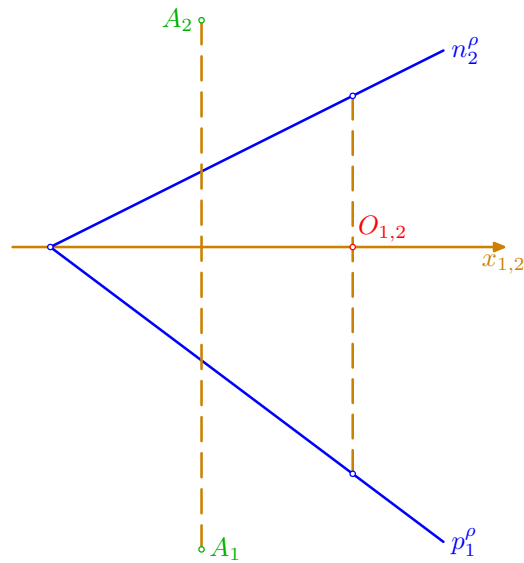
- přímka k kolmá k rovině ρ je kolmá ke všem přímkám této roviny, a tedy i k jejím stopám
- půdorysná (nárysná) stopa p^ρ (n^ρ) roviny ρ leží v půdorysně π (nárysně ν) a podle *Věty o pravouhlém průmětu pravého úhlu* musí být půdorys k_1 (nárys k_2) přímky k kolmý ke stopě p^ρ (n^ρ), tj. $k \perp \rho \Rightarrow k_1 \perp p_1^\rho$ a $k_2 \perp n_2^\rho$



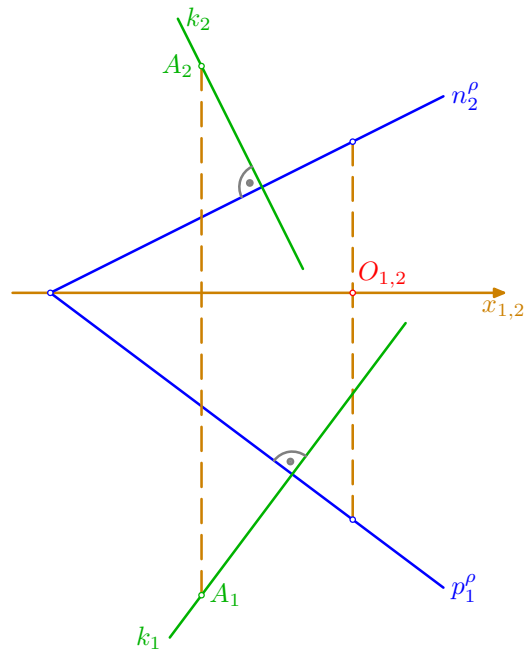
Řešené úlohy

Příklad: Bodem A veďte přímku k kolmou k rovině ρ ; $A[-2; 4; 3]$, $\rho(-4; 3; 2)$.

- podle zadání jsou sestrojeny sdružené průměty A_1, A_2 bodu A a stopy p_1^ρ, n_2^ρ roviny ρ

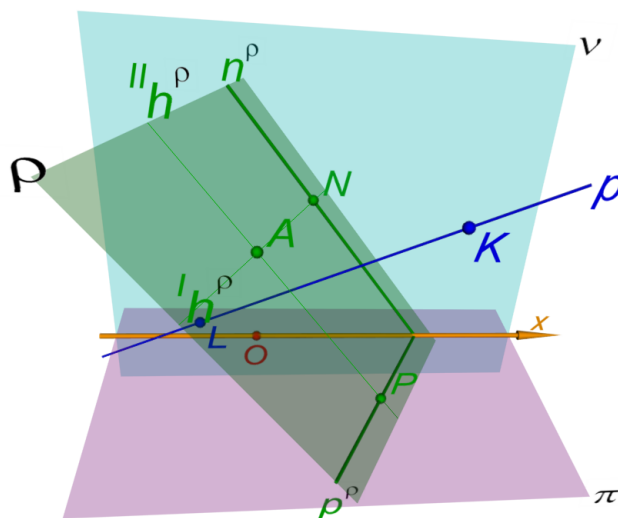


- podle výše uvedeného jsou tedy přímky $k_1 \perp p_1^\rho, A_1 \in k_1$, a $k_2 \perp n_2^\rho, A_2 \in k_2$, sdružené průměty přímky $k \perp \rho, A \in k$



□

4.2. Rovina kolmá k přímce



Výklad

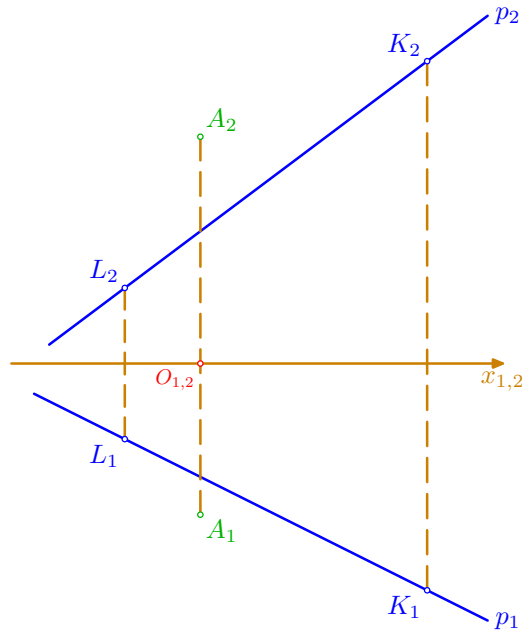
- jde o obrácenou úlohu k předchozí úloze *Přímka kolmá k rovině*, a proto lze použít analogické vztahy
- stopy hledané roviny kolmé k dané přímce ovšem nelze sestavit přímo a je třeba jít na ně oklikou přes hlavní přímku některé osnovy a její stopník
- v následujícím příkladě je úloha řešena nejprve pomocí hlavní přímky první osnovy a poté přes hlavní přímku osnovy druhé



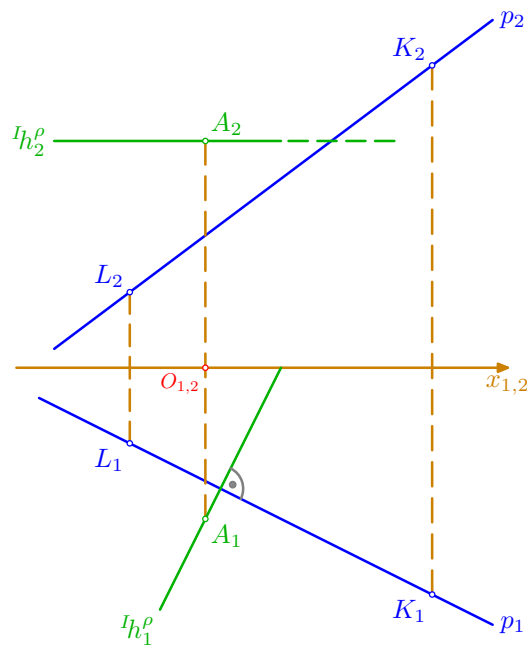
Řešené úlohy

Příklad: Bodem A veďte rovinu ρ kolmo k přímce $p=KL$; $A[0; 2; 3]$, $K[3; 3; 4]$, $L[-1; 1; 1]$.

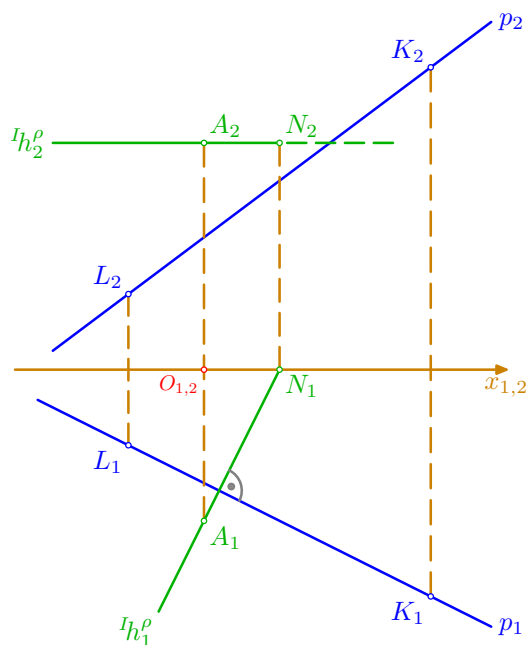
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, p_1=K_1L_1, p_2=K_2L_2$ bodu A a přímky $p=KL$



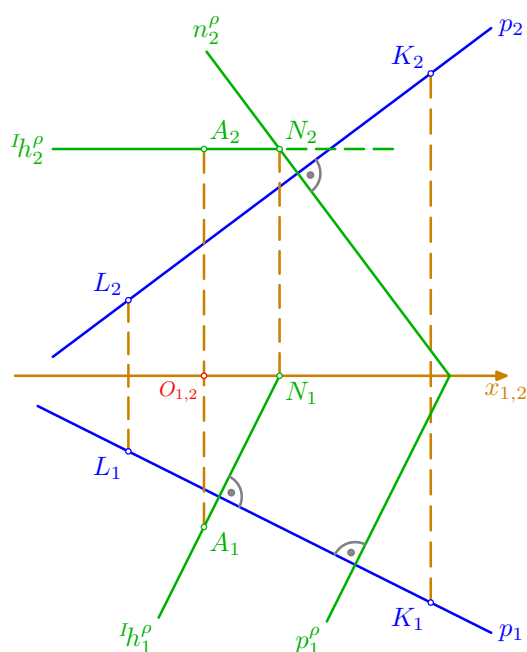
- 1. způsob řešení: bodem A vedeme hlavní přímku h^ρ I. osnovy roviny $\rho \perp p$ – v průmětech je tedy $h_1^\rho \perp p_1, A_1 \in h_1^\rho$ a $h_2^\rho \parallel x, A_2 \in h_2^\rho$



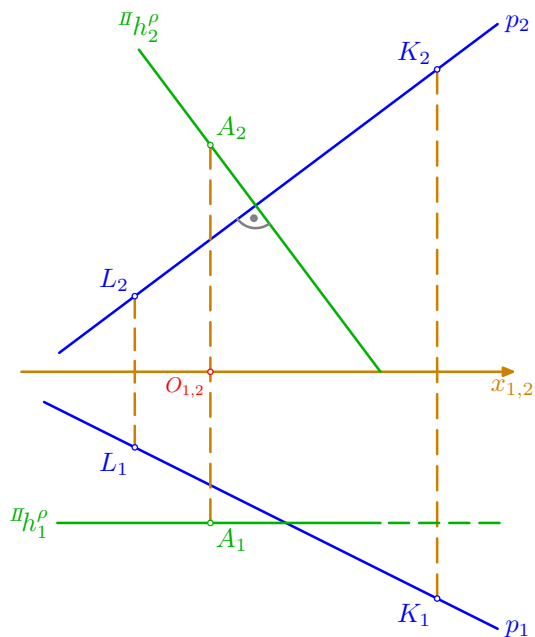
- najděme nárysný stopník $N = I_h^\rho \cap \nu$; pro jeho půdorys platí $N_1 = I_{h_1}^\rho \cap x$ a nárys N_2 leží na přímce $I_{h_2}^\rho$ a na ordinále



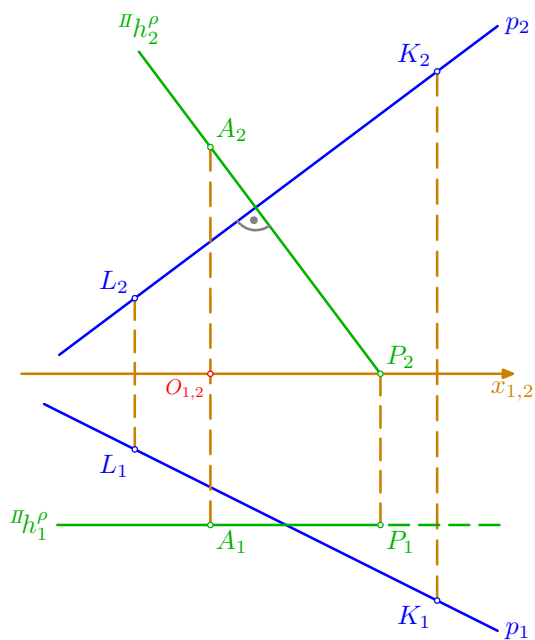
- nyní již lze sestrojít stopy p^ρ, n^ρ hledané roviny ρ : nejprve nárysnou $n_2^\rho \perp p_2, N_2 \in n_2^\rho$ a poté půdorysnou $p_1^\rho \perp p_1$, která se s nárysnou stopou n_2^ρ protíná na ose x



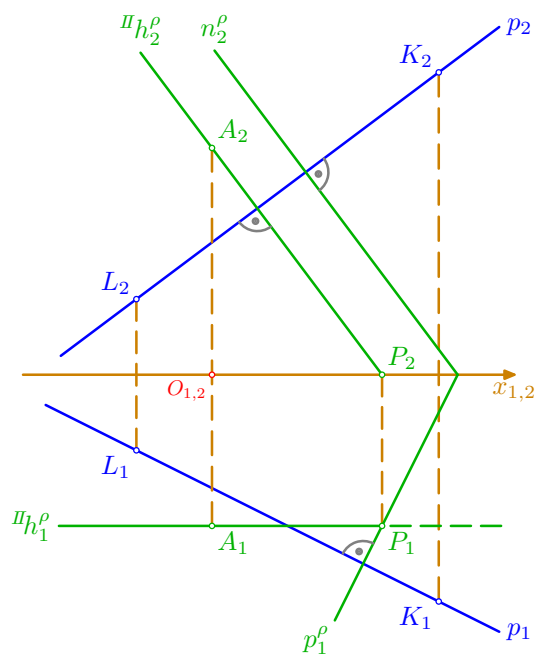
- 2. způsob řešení: analogicky ved' me bodem A hlavní přímkou ${}^{\parallel}h^{\rho}$ II. osnovy roviny $\rho \perp p$
 – v průmětech je tedy ${}^{\parallel}h_1^{\rho} \parallel x, A_1 \in {}^{\parallel}h_1^{\rho}$ a ${}^{\parallel}h_2^{\rho} \perp p_2, A_2 \in {}^{\parallel}h_2^{\rho}$



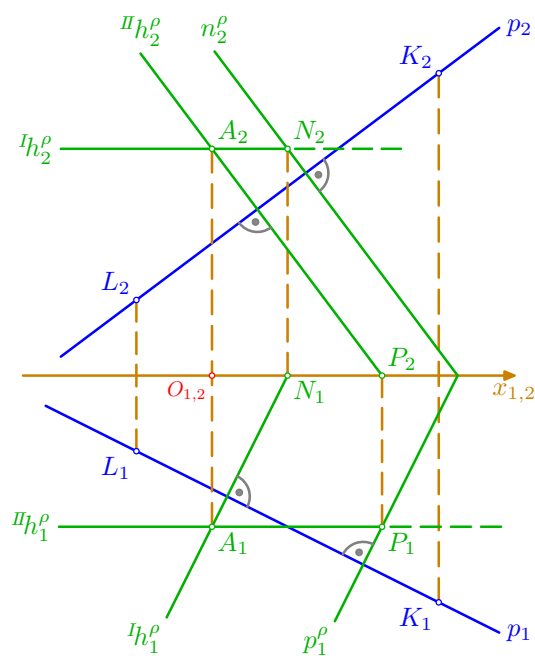
- tentokrát najdeme půdorysný stopník $P = {}^{\parallel}h^{\rho} \cap \pi$; pro jeho nárys platí $P_2 = {}^{\parallel}h_2^{\rho} \cap x$ a půdorys P_1 leží na přímce ${}^{\parallel}h_1^{\rho}$ a na ordinále



- stopy p^ρ, n^ρ sestrojíme nyní v opačném pořadí: nejprve půdorysnou $p_1^\rho \perp p_1, P_1 \in p_1^\rho$ a poté nárysnou $n_2^\rho \perp p_2$

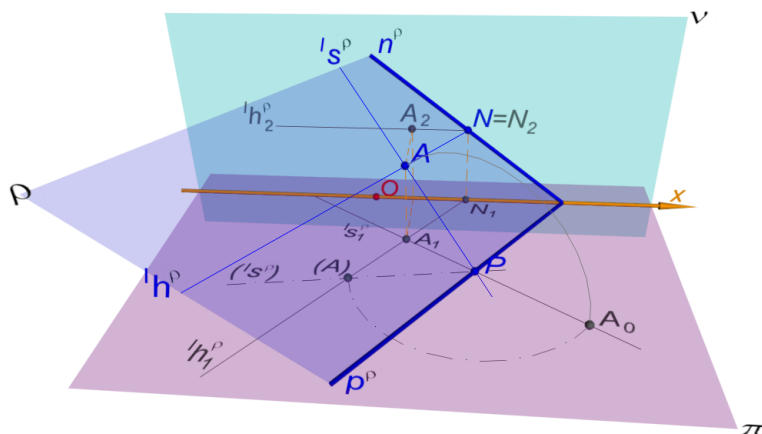


- na závěr jsou vyrýsovány oba způsoby řešení



□

4.3. Otáčení roviny



Výklad



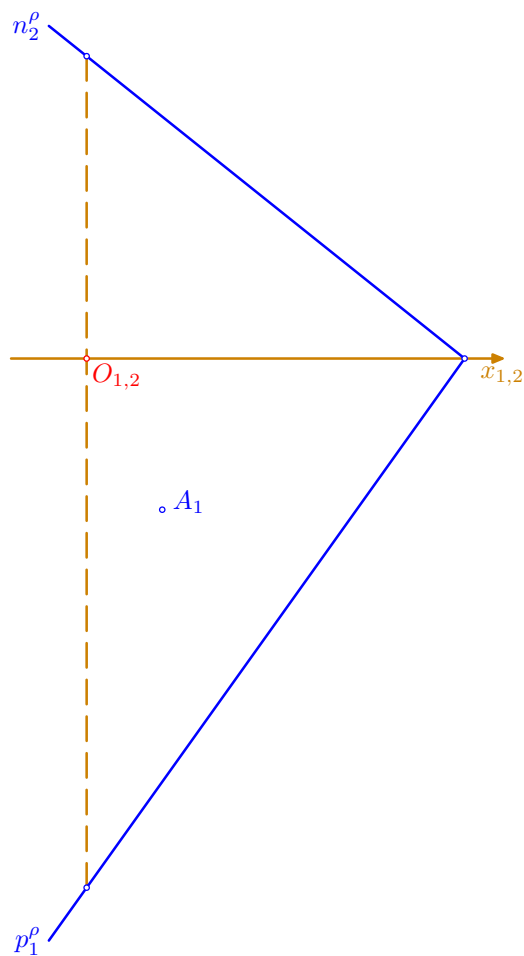
- při otáčení obecné roviny ρ do půdorysny π kolem stopy p^ρ se bod $A \in \rho$ pohybuje po kružnici, jejíž střed P je stopníkem tzv. spádové přímky I_s^ρ I. osnovy (ta je kolmá k hlavním přímkám I. osnovy) a poloměr otáčení se najde sklopením promítací roviny přímkou I_s^ρ
- rovinu lze kolem stopy otáčet na dvě strany – o větší nebo menší úhel (v následujícím příkladě je provedeno pouze otočení o větší úhel); podobně jako kolem stopy p^ρ do půdorysny π je možno rovinu ρ otočit také kolem stopy n^ρ do nárýsny ν
- otáčení roviny do průmětny kolem stopy vždy indukuje **osovou afinitu mezi oběma rovinami** a její kolmý průmět je pak pravouhloú **afinitou mezi průměty** (vzor A_1) **a otočenými polohami** (obraz A_0) – tuto afinitu lze s výhodou využít při otáčení složitějších útvarů
- konstrukce otáčení roviny se tedy užívá, je-li třeba sestrojít nějaký **pravidelný útvar** (např. pravidelný šestiúhelník nebo čtverec) ležící v obecné rovině (viz např. úlohu *Pravidelný osmistěn* na straně 97)



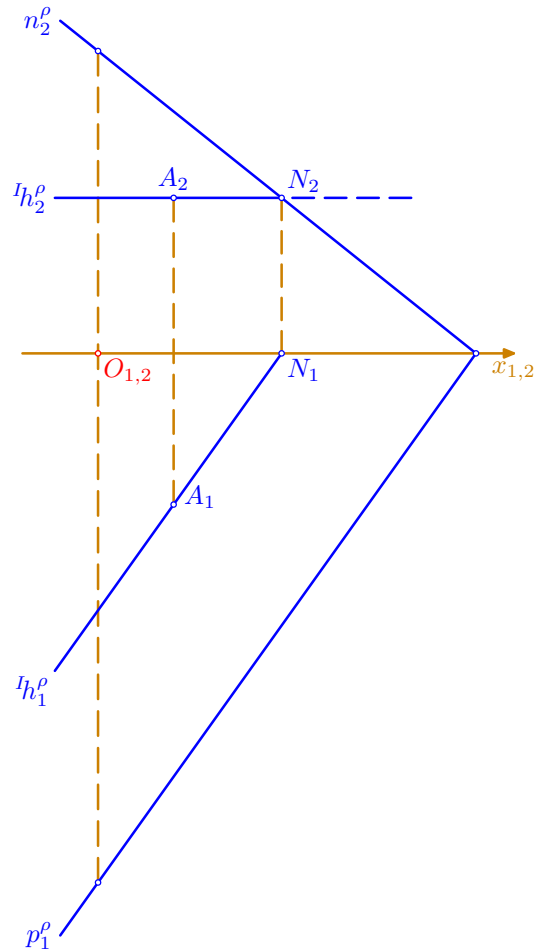
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte otočenou polohu bodu A ležícího v rovině ρ ; $\rho(5; 7; 4)$, $A[1; 2; ?]$.

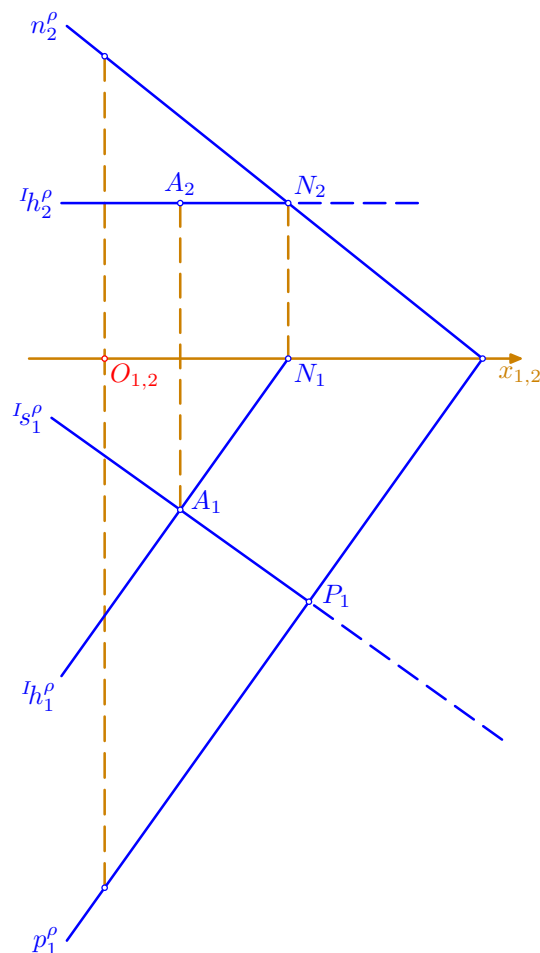
- podle zadání sestrojíme stopy p_1^{ρ} , n_2^{ρ} roviny ρ a půdorys A_1 bodu $A \in \rho$



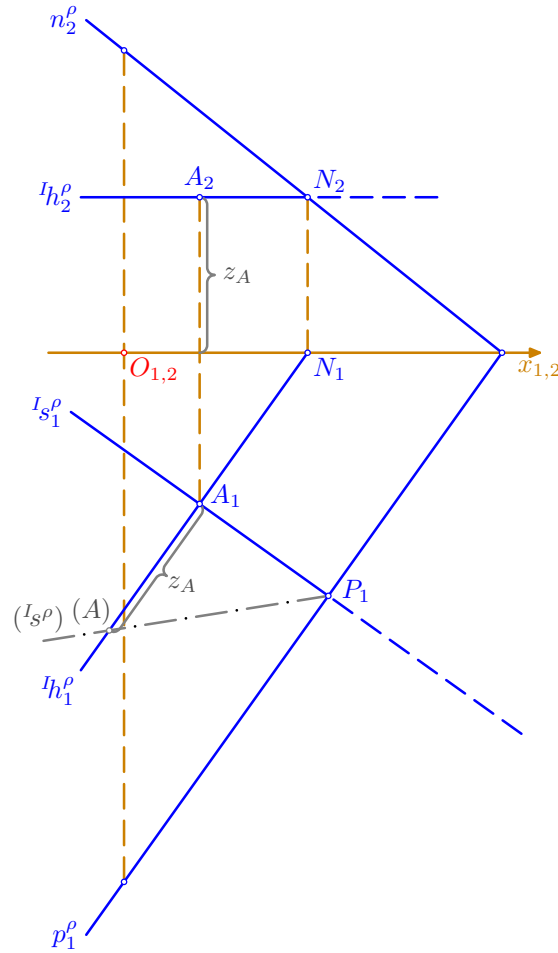
- pomocí hlavní přímky ${}^I h^\rho$ I. osnovy a jejího nárysného stopníku $N = {}^I h^\rho \cap \nu$ doplníme nárys A_2 bodu $A \in \rho$: ${}^I h_1^\rho \parallel p_1^\rho, A_1 \in {}^I h_1^\rho$, potom je $N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$ a nárys N_2 leží na ordinále a na stopě n_2^ρ ; dále je ${}^I h_2^\rho \parallel x, N_2 \in {}^I h_2^\rho$ a nárys A_2 najdeme po ordinále na přímce ${}^I h_2^\rho$



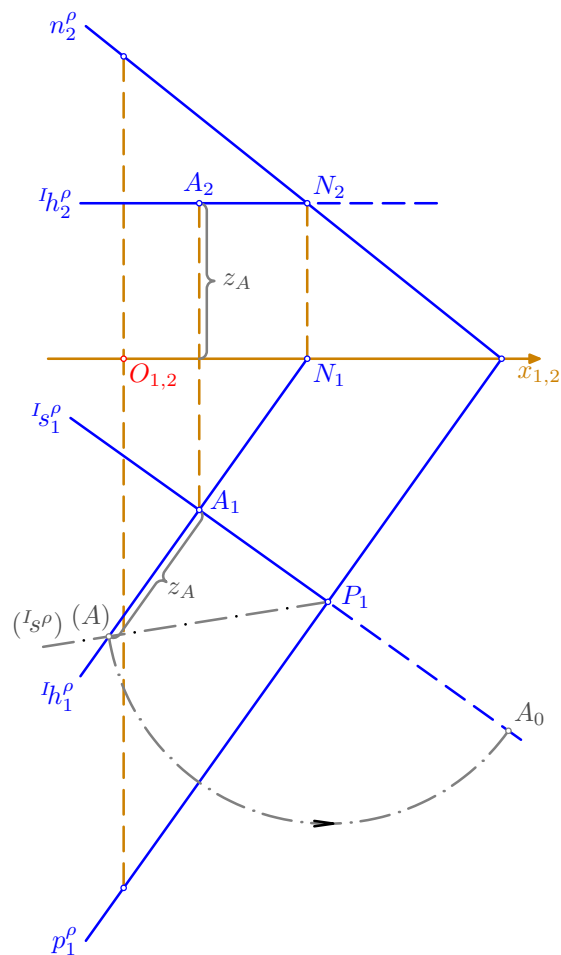
- bodem A vedeme spádovou přímku $l_{s^\rho} \perp p^\rho$ l. osnovy roviny ρ – v průmětu je sestrojen pouze její půdorys $l_{s_1^\rho}$ a podle *Věty o pravouhlém průmětu pravého úhlu* platí $l_{s_1^\rho} \perp p_1^\rho$, $A_1 \in l_{s_1^\rho}$; půdorysný stopník přímky l_{s^ρ} označme P , v průmětu je $P_1 = l_{s_1^\rho} \cap p_1^\rho$



- poloměr $|PA|$ otáčení bodu A zjistíme sklopením promítací roviny spádové přímky I_{s^ρ} , tj. $|PA|=|P_1(A)|$, kde bod (A) je sklopenou polohou bodu A a platí pro něj $|(A)A_1| = z_A = |A_2x|$; bod $P = P_1$ zůstává při sklápění na místě



- otočení bodu A (kolem bodu P) pak můžeme provést tzv. ve sklopení – pro otočenou polohu A_0 platí $A_0 \in I_{s_1}^\rho$ a $|A_0P_1| = |AP| = |(A)P_1|$ (zde je vidět možnost výběru otáčení o větší či menší úhel, obvykle volíme podle konkrétní situace v náčrtně)

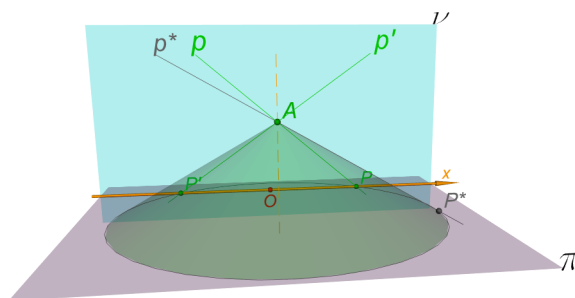


□

5. Procvičení základních úloh v Mongeově promítání

- v předchozích příkladech byly probrány tzv. **základní úlohy** Mongeova promítání, které tvoří jakousi malou násobilku této zobrazovací metody a jejich zvládnutí je nezbytně nutné pro řešení komplexnějších úloh; ty budou postupně následovat

5.1. Konstrukce přímky

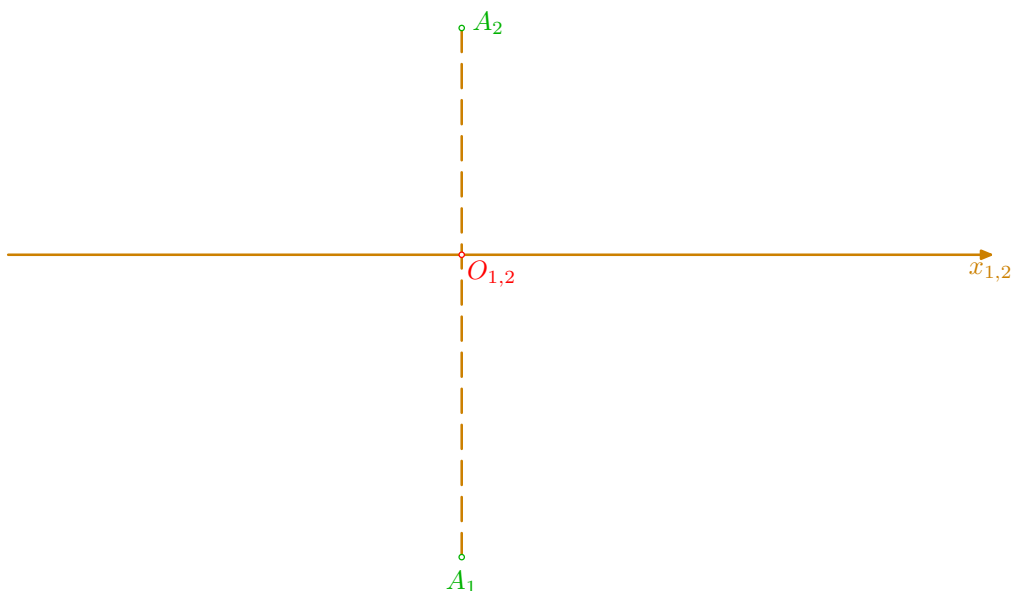


Řešené úlohy

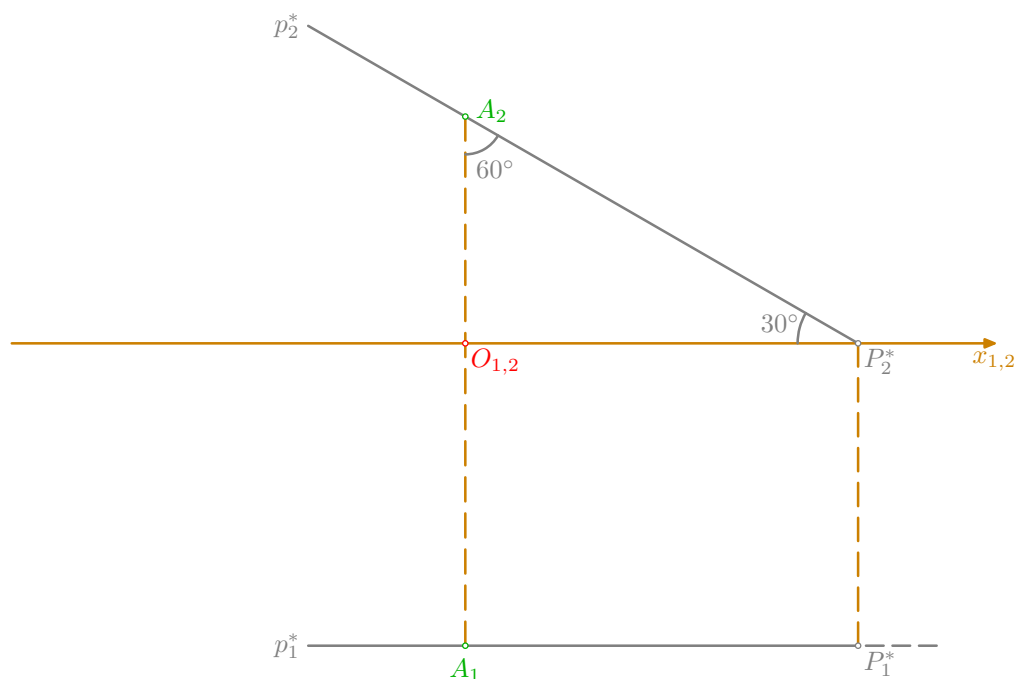
Příklad: Sestrojte přímku p , která prochází bodem A , od půdorysny má odchylku 30° a je různoběžná s osou x ; $A[0; 4; 3]$.



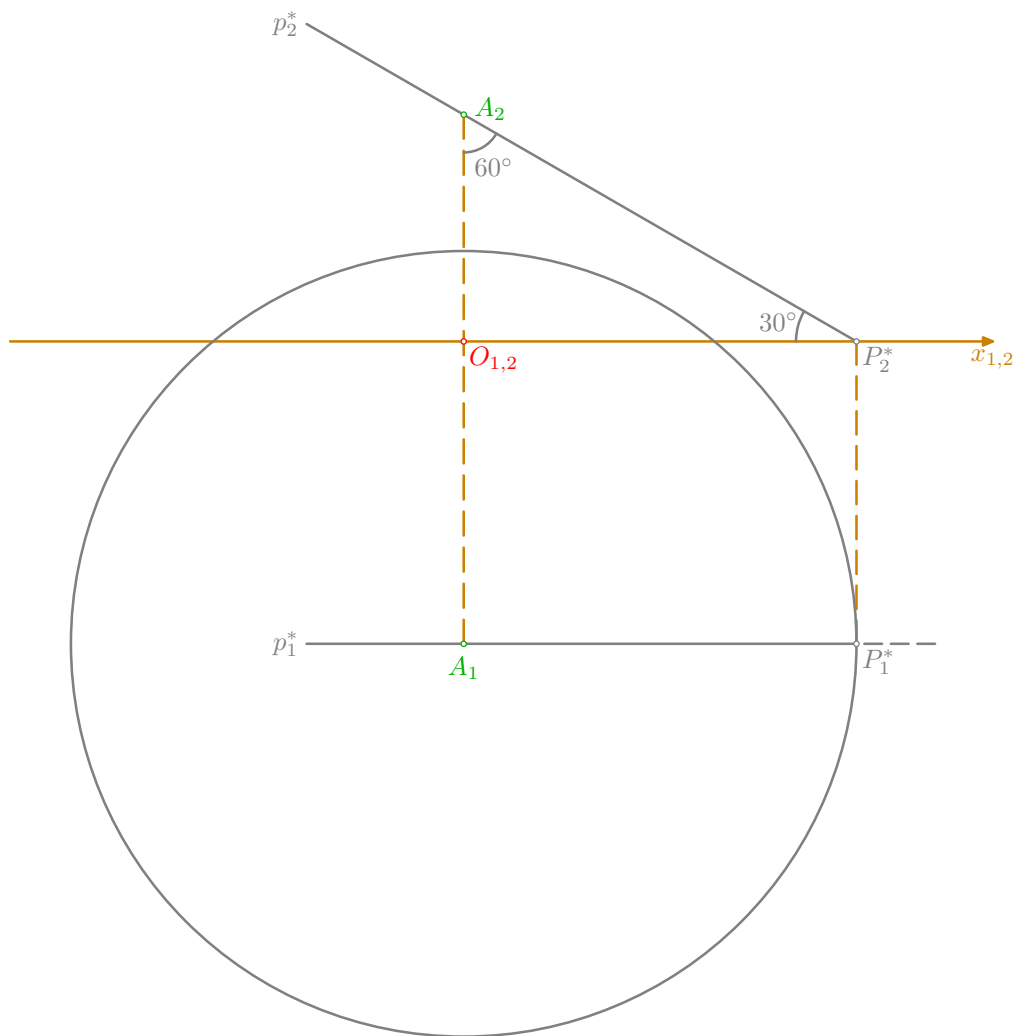
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty A_1, A_2 bodu A



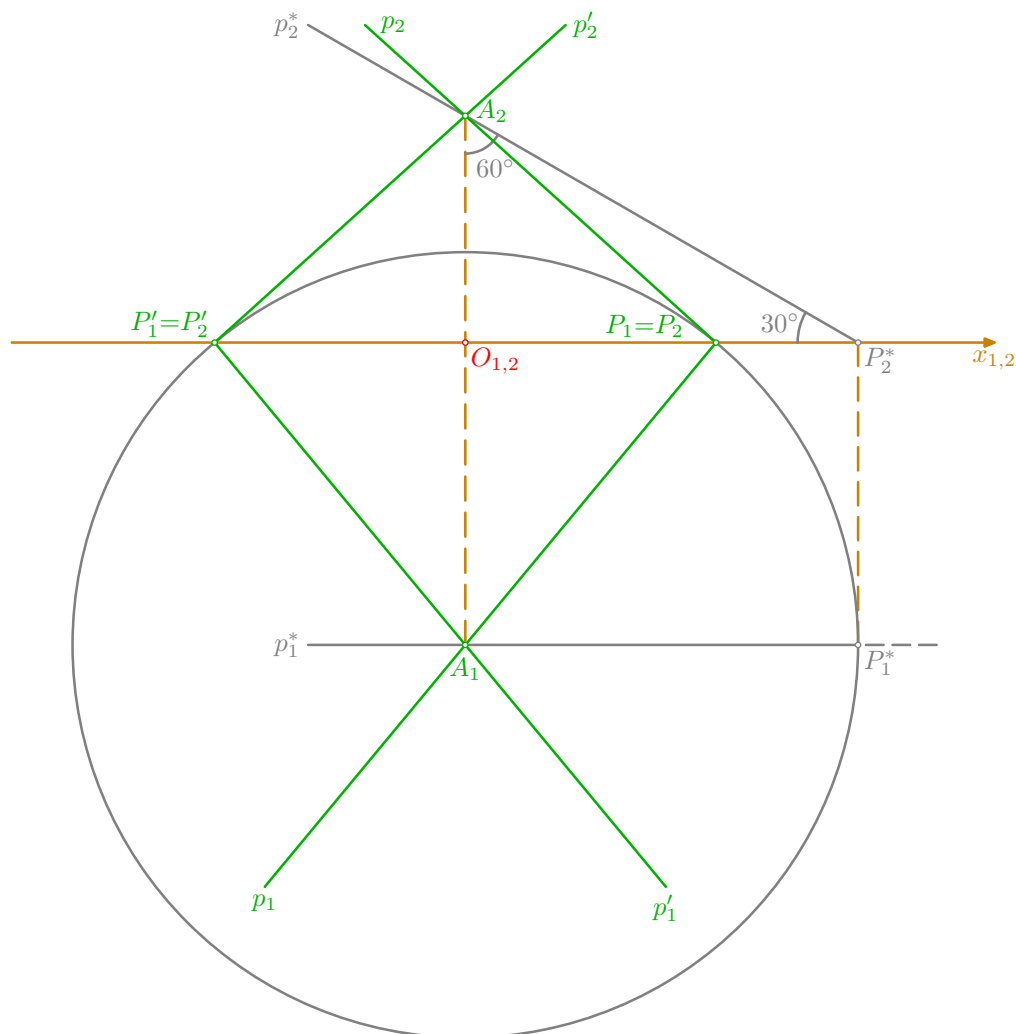
- bodem A vedeme přímku $p^* \parallel \nu$, která má od půdorysny odchylku 30° (zvolme jednu ze dvou možností), a sestrojme její půdorysný stopník $P^* = p^* \cap \pi$: pro půdorys p_1^* platí $p_1^* \parallel x$, $A_1 \in p_1^*$, nárys p_2^* prochází bodem A_2 a svírá s osou x úhel dané velikosti 30° , tj. s ordinálou bodu A svírá úhel velikosti 60° ; dále je $P_2^* = p_2^* \cap x$ a půdorys P_1^* leží na p_1^* a na ordinále



- rotací přímky p^* kolem osy AA_1 vznikne rotační kuželová plocha s vrcholem v bodě A ; na ní leží všechny přímky, které procházejí bodem A a mají od půdorysny odchylku 30° ; tato kuželová plocha protíná půdorysnu π v kružnici, která má střed v bodě A_1 a prochází bodem P_1^*

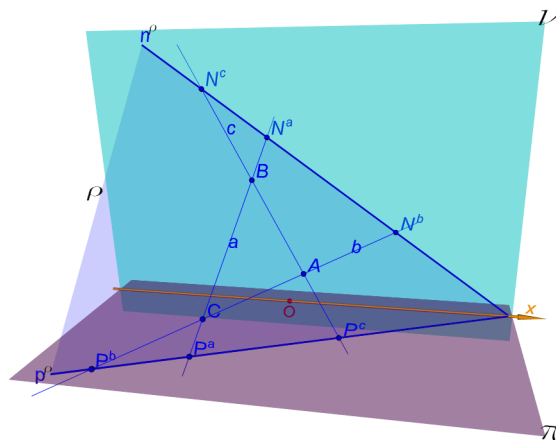


- sestřená kružnice protíná osu x v bodech $P = P_1 = P_2$, $P' = P'_1 = P'_2$ a přímky $p = AP$, $p' = AP'$ ($p_1 = A_1P_1, p_2 = A_2P_2$ a $p'_1 = A_1P'_1, p'_2 = A_2P'_2$) pak splňují všechny zadané podmínky, tj. prochází bodem A , mají danou odchylku 30° od π a jsou různoběžné s osou x



□

5.2. Konstrukce stop roviny

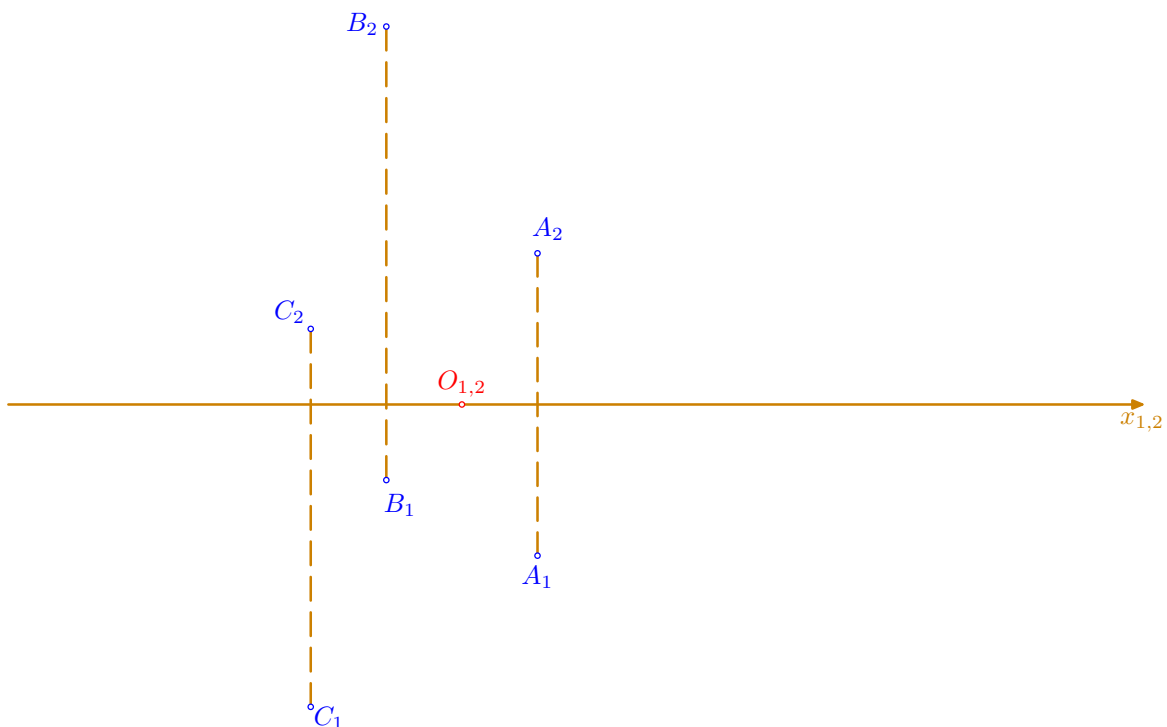


Řešené úlohy

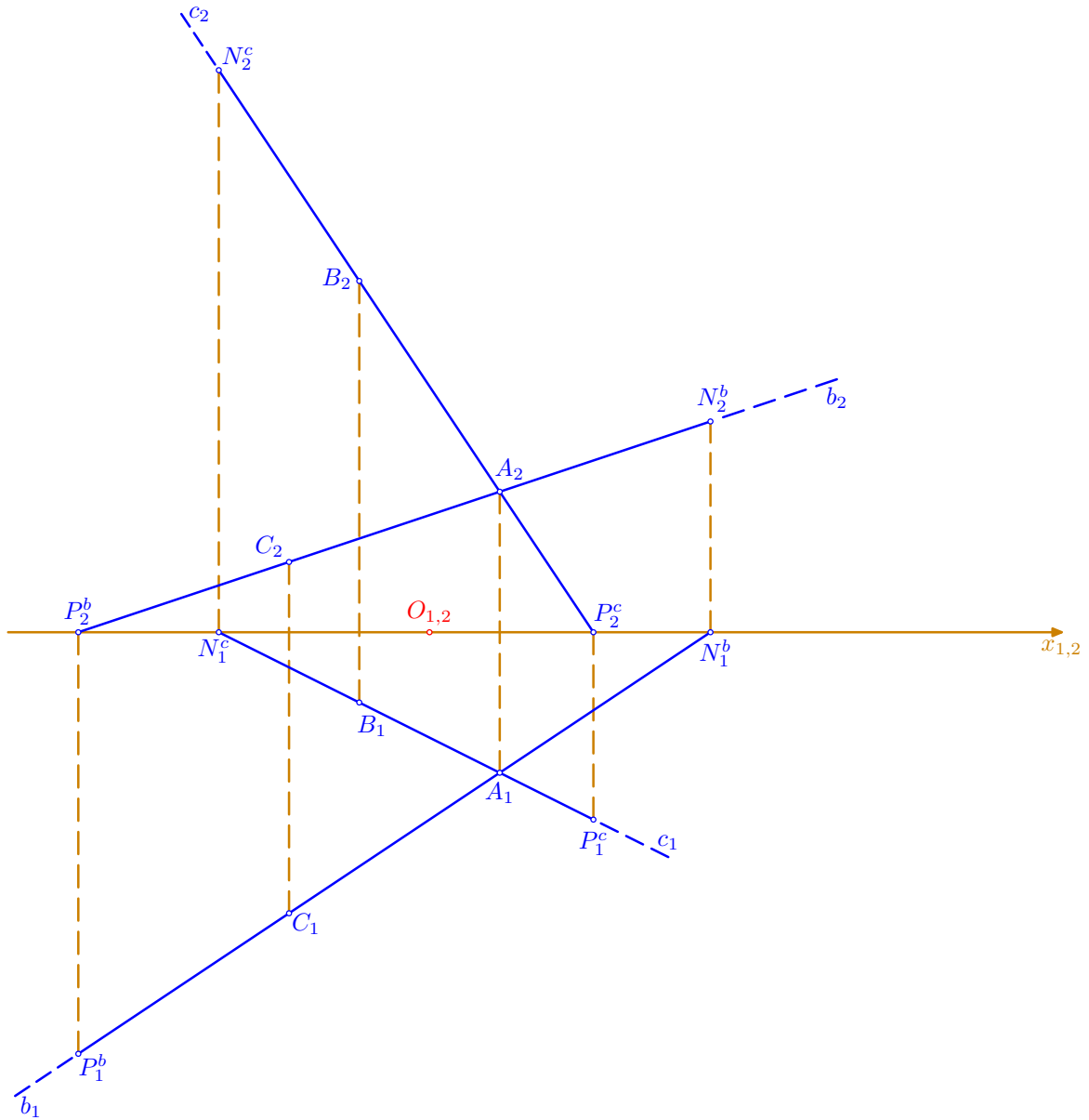


Příklad: Sestrojte stopy roviny $\rho = ABC$; $A[1; 2; 2]$, $B[-1; 1; 5]$, $C[-2; 4; 1]$.

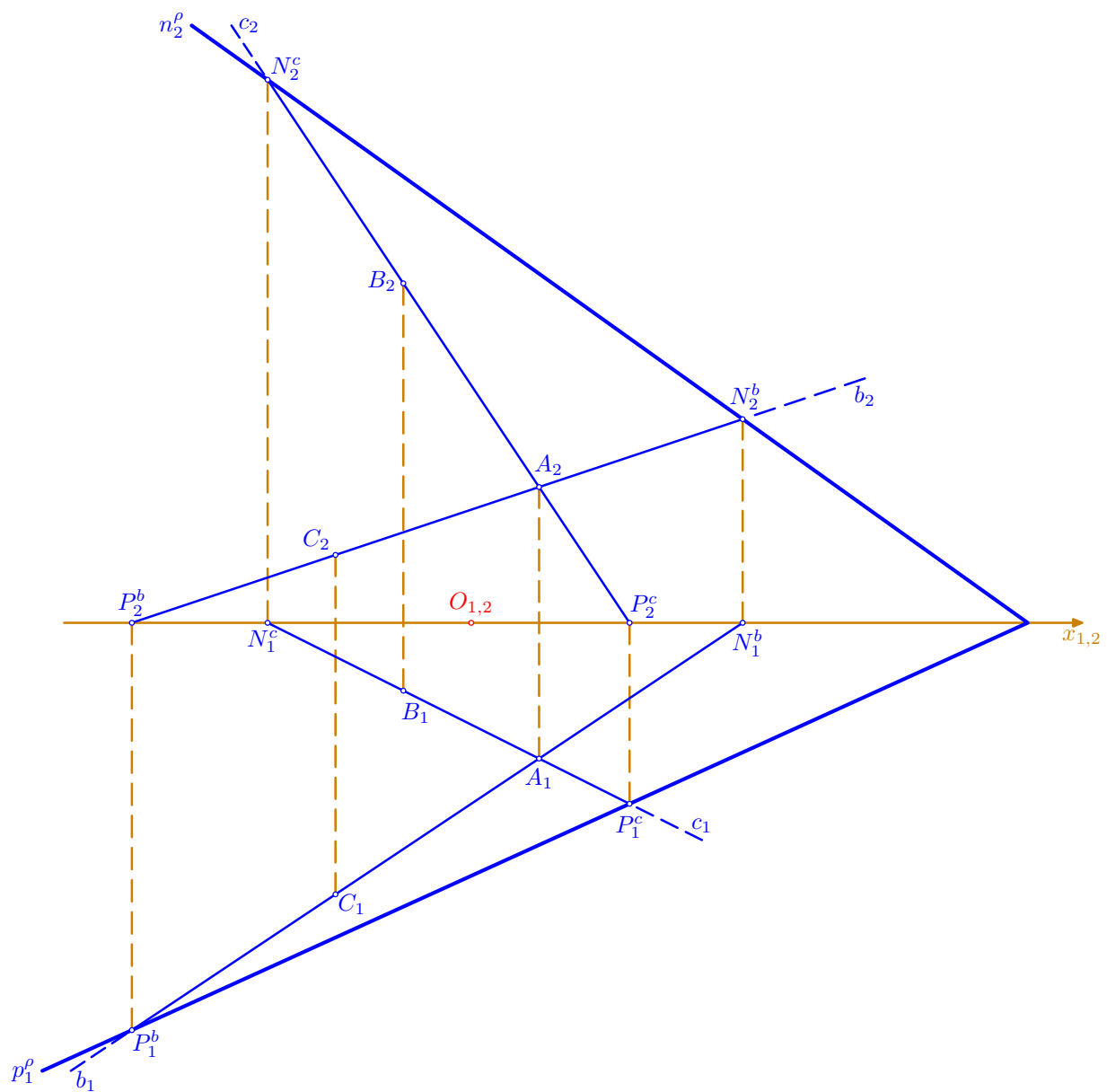
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojíme sdružené průměty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ bodů A, B, C



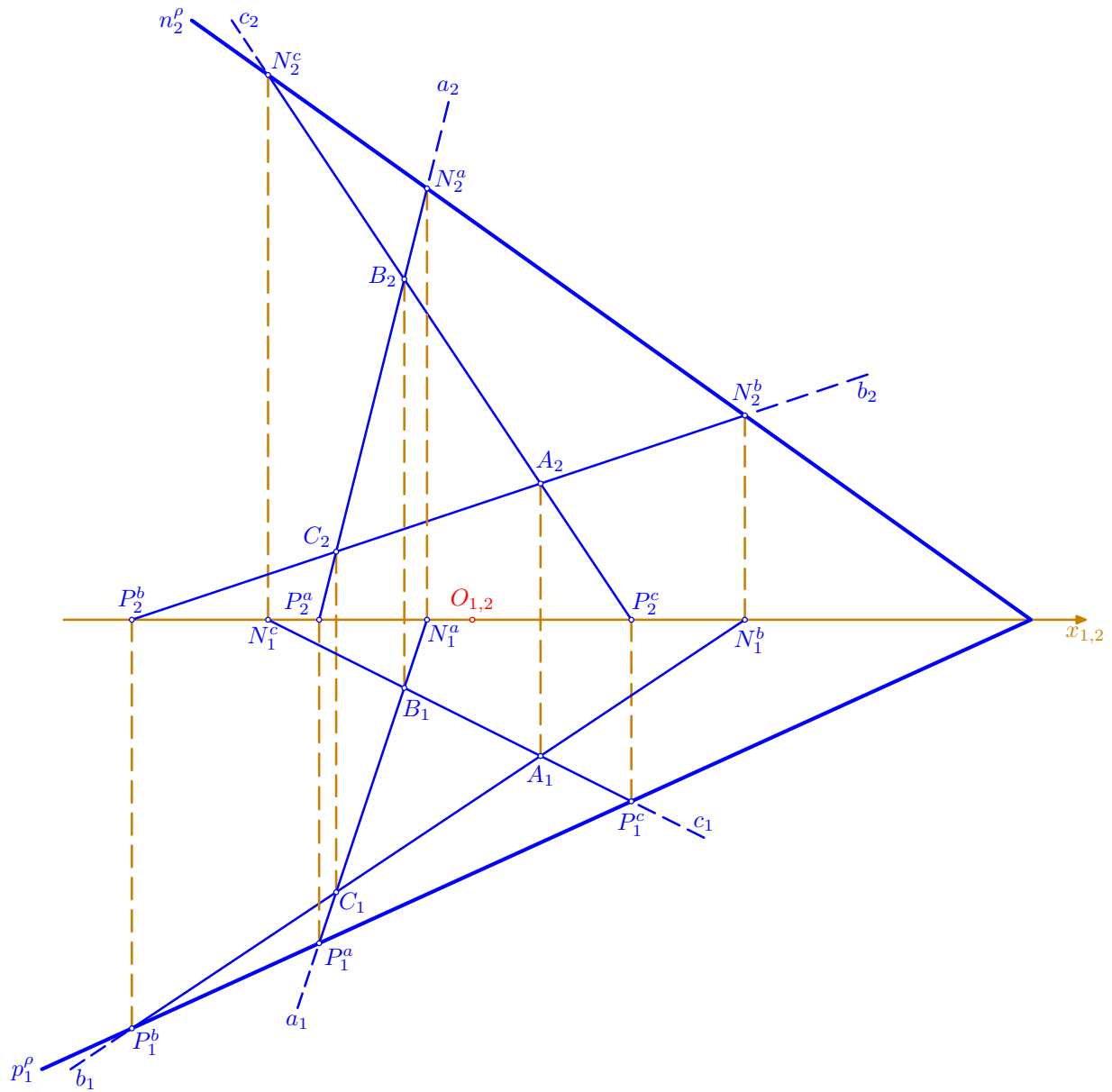
- stejným způsobem jako v předchozím kroku sestrojme sdružené průměty $b_1 = A_1C_1$, $b_2 = A_2C_2$ přímky $b = AC$ a určíme její stopníky $P^b = b \cap \pi$, $N^b = b \cap \nu$: $P_2^b = b_2 \cap x$ a půdorys P_1^b leží na b_1 a na ordinále, podobně $N_1^b = b_1 \cap x$ a nárys N_2^b leží na b_2 a na ordinále



- nyní již snadno sestojíme stopy roviny ρ , které se protínají na ose x : $p_1^\rho = P_1^c P_1^b$ a $n_2^\rho = N_2^c N_2^b$

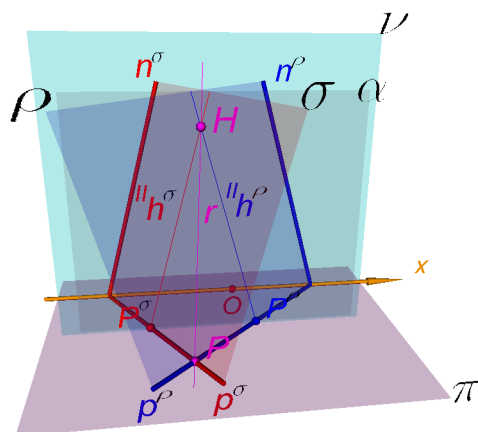


- na závěr můžeme ještě doplnit i sdružené průměty přímky $a = BC$ a jejích stopníků
 $P^a = a \cap \pi$, $N^a = a \cap \nu$



□

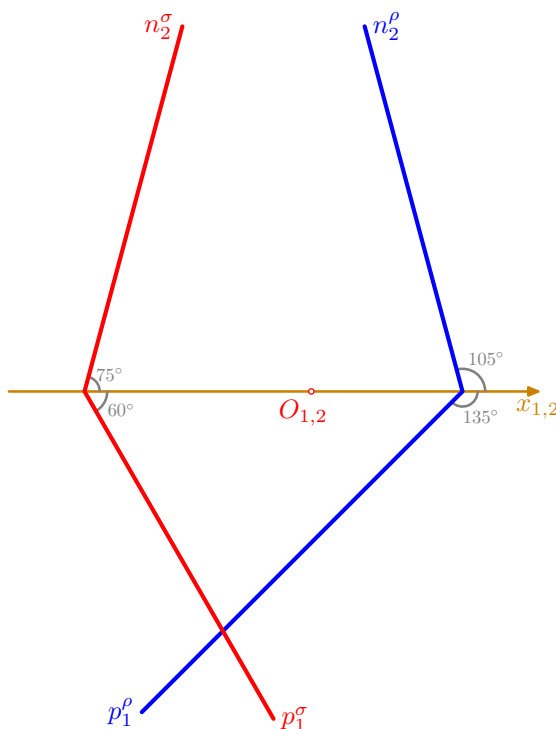
5.3. Průsečnice dvou rovin



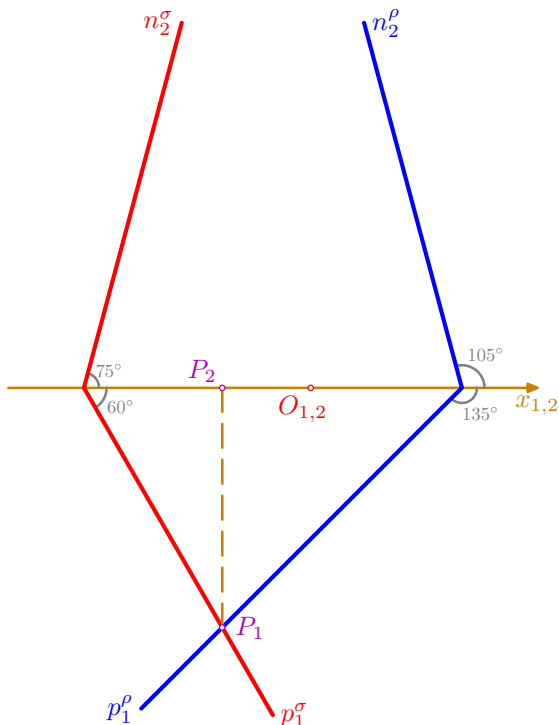
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte průsečnici r rovin ρ, σ ; $\rho(2; 135^\circ; 105^\circ), \sigma(-3; 60^\circ; 75^\circ)$.

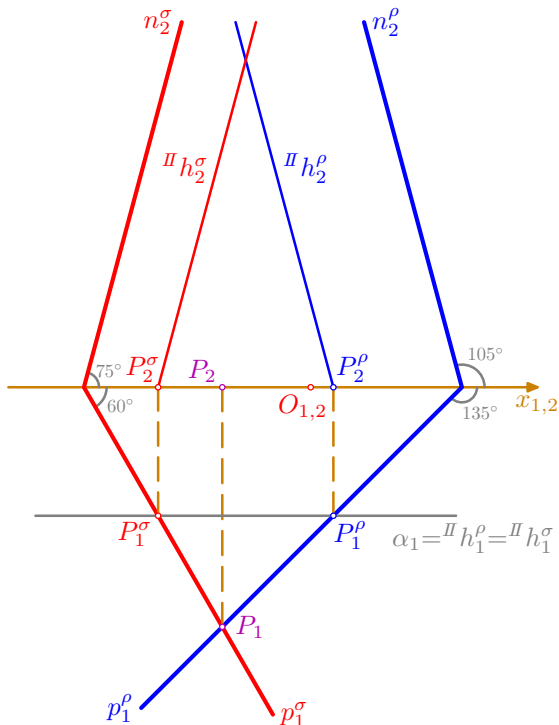
- podle zadání sestrojíme stopy $p_1^\rho, n_2^\rho, p_1^\sigma, n_2^\sigma$ rovin ρ, σ – konstrukce je patrná z obrázku; toto ojedinělé zadání je zvoleno záměrně proto, aby byl průsečík nárysnych stop špatně dostupný



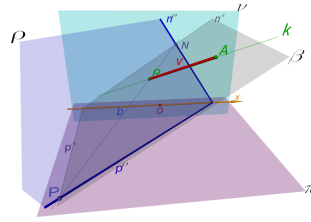
- sestrojme průsečík P půdorysných stop: v půdoryse je $P_1 = p_1^\rho \cap p_2^\sigma$ a nárys P_2 leží na ordinále a na ose x



- dále ved' me libovolně vhodně rovinu $\alpha \parallel \nu$, která protne roviny ρ, σ v hlavních přímkách ${}^{\parallel}h^\rho, {}^{\parallel}h^\sigma$ \perp osnovy, jejichž půdorysné stopníky P^ρ, P^σ leží na příslušných půdorysných stopách: $\alpha_1 = {}^{\parallel}h_1^\rho = {}^{\parallel}h_1^\sigma, P_1^\rho = \alpha_1 \cap p_1^\rho, P_1^\sigma = \alpha_1 \cap p_1^\sigma, {}^{\parallel}h_2^\rho \parallel n_2^\rho, P_2^\rho \in {}^{\parallel}h_2^\rho, {}^{\parallel}h_2^\sigma \parallel n_2^\sigma, P_2^\sigma \in {}^{\parallel}h_2^\sigma$



5.4. Vzdálenost bodu od roviny

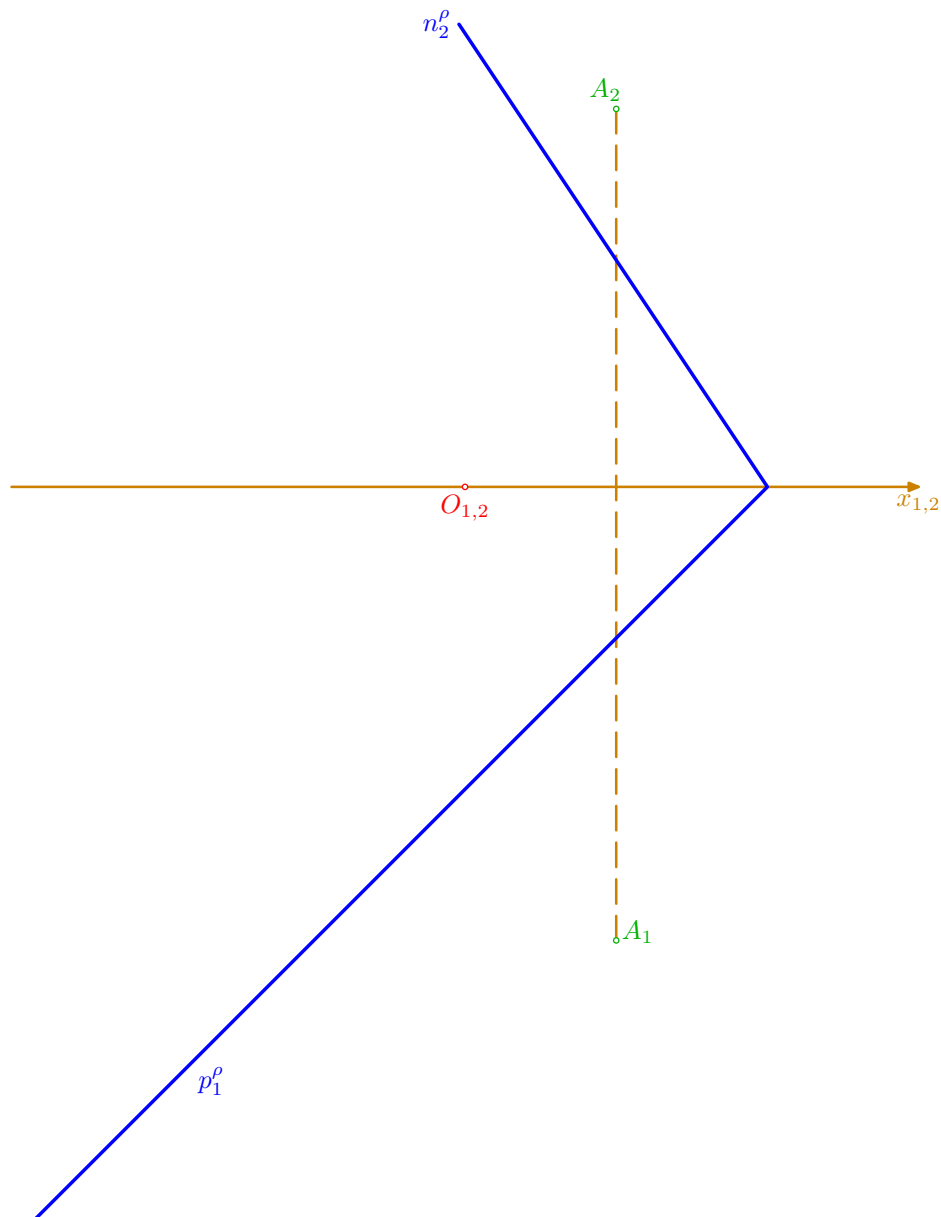


Řešené úlohy

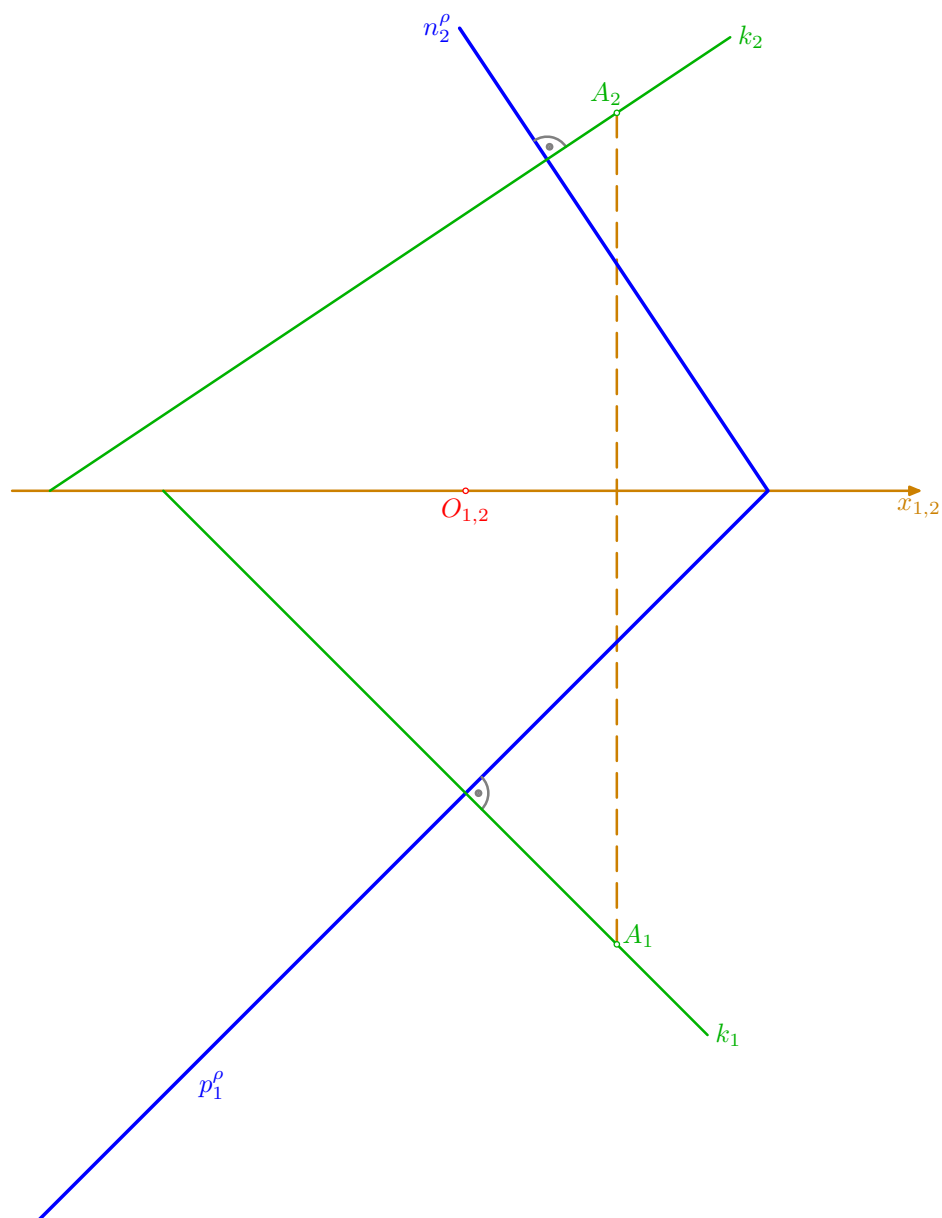


Příklad: Určete vzdálenost $v = |A\rho|$ bodu A od roviny ρ ; $A[2; 6; 5], \rho(4; 4; 6)$.

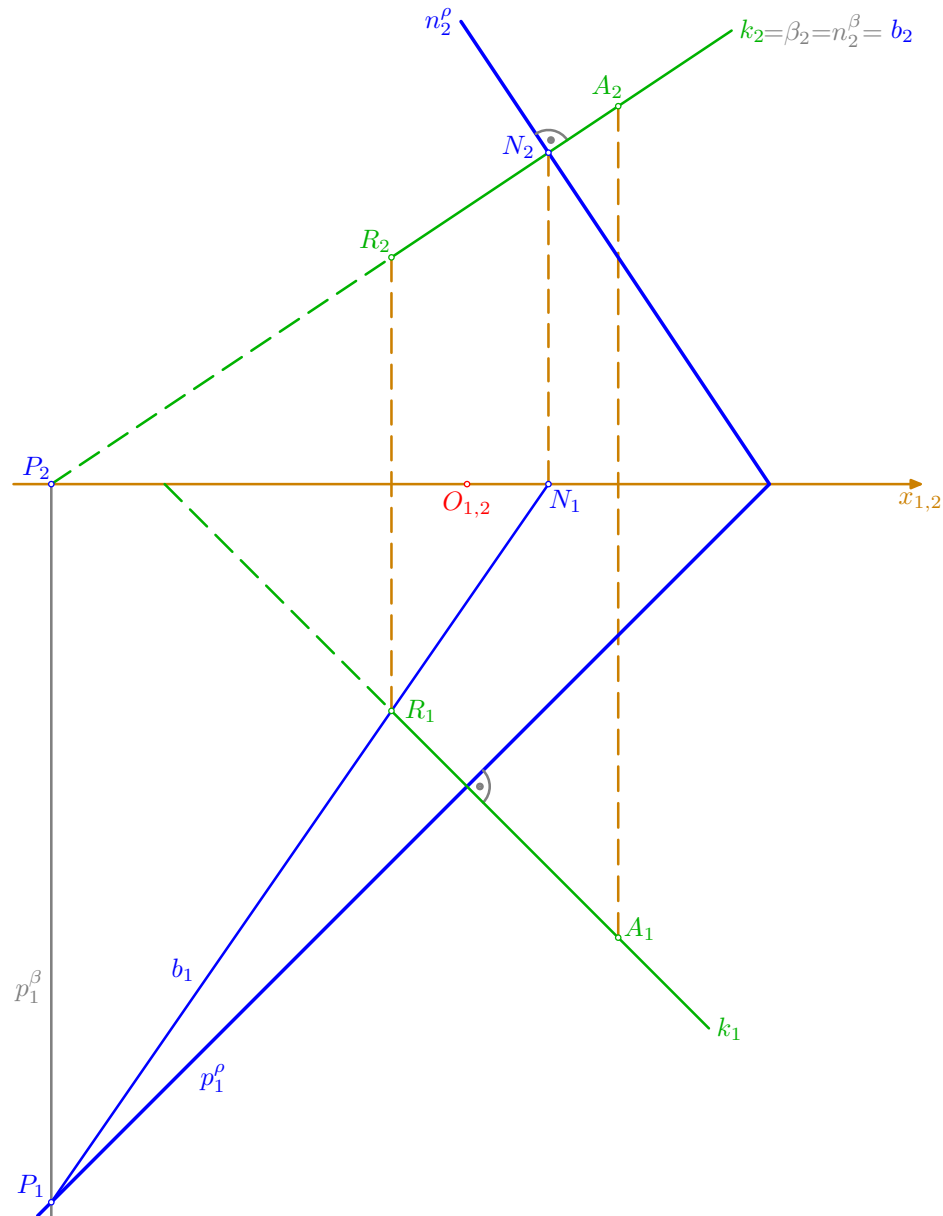
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1, A_2 bodu A a stopy p_1^ρ, n_2^ρ roviny ρ



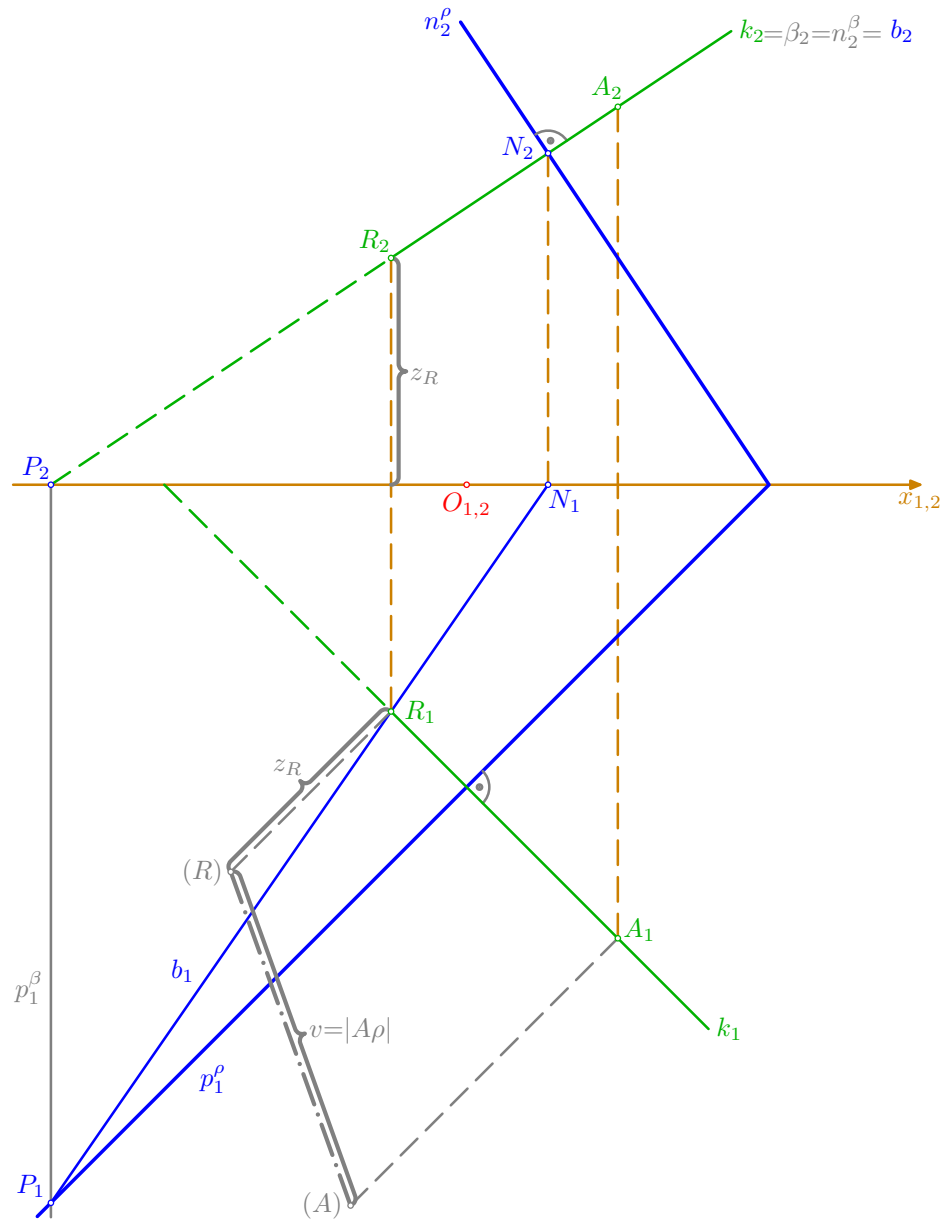
- vzdálenost bodu A od roviny ρ změříme na kolmici $k \perp \rho$, $A \in \rho$: pro její půdorys k_1 platí $k_1 \perp p_1^\rho$, $A_1 \in k_1$, podobně je v náryse $k_2 \perp n_2^\rho$, $A_2 \in k_2$



- přímka k protíná rovinu ρ v bodě $R = k \cap \rho$, který sestrojíme proložením pomocné roviny $\beta \perp \nu, k \subseteq \beta$; rovina β , kde $\beta_2 = n_2^\beta = k_2$ a $p_1^\beta \perp x$, protíná danou rovinu ρ v krycí přímce $b = PN$ ($b_2 = k_2$ a $b_1 = P_1N_1$, konstrukce je zřejmá z obrázku); pro půdorys bodu $R = k \cap \rho$ je pak $R_1 = b_1 \cap k_1$ a nárys R_2 najdeme na ordinále a na přímce $b_2 = k_2$



- na závěr stačí určit skutečnou délku úsečky AR ; provedme to sklopením půdorysně promítací roviny přímkou k : pro sklopené polohy $(A), (R)$ bodů A, R platí $|(A)A_1| = z_A = 5$, $|(R)R_1| = z_R = |xR_2|$; řešením úlohy je délka $v = |A\rho| = |AR| = |(A)(R)|$



□

5.5. Vzdálenost bodu od přímky

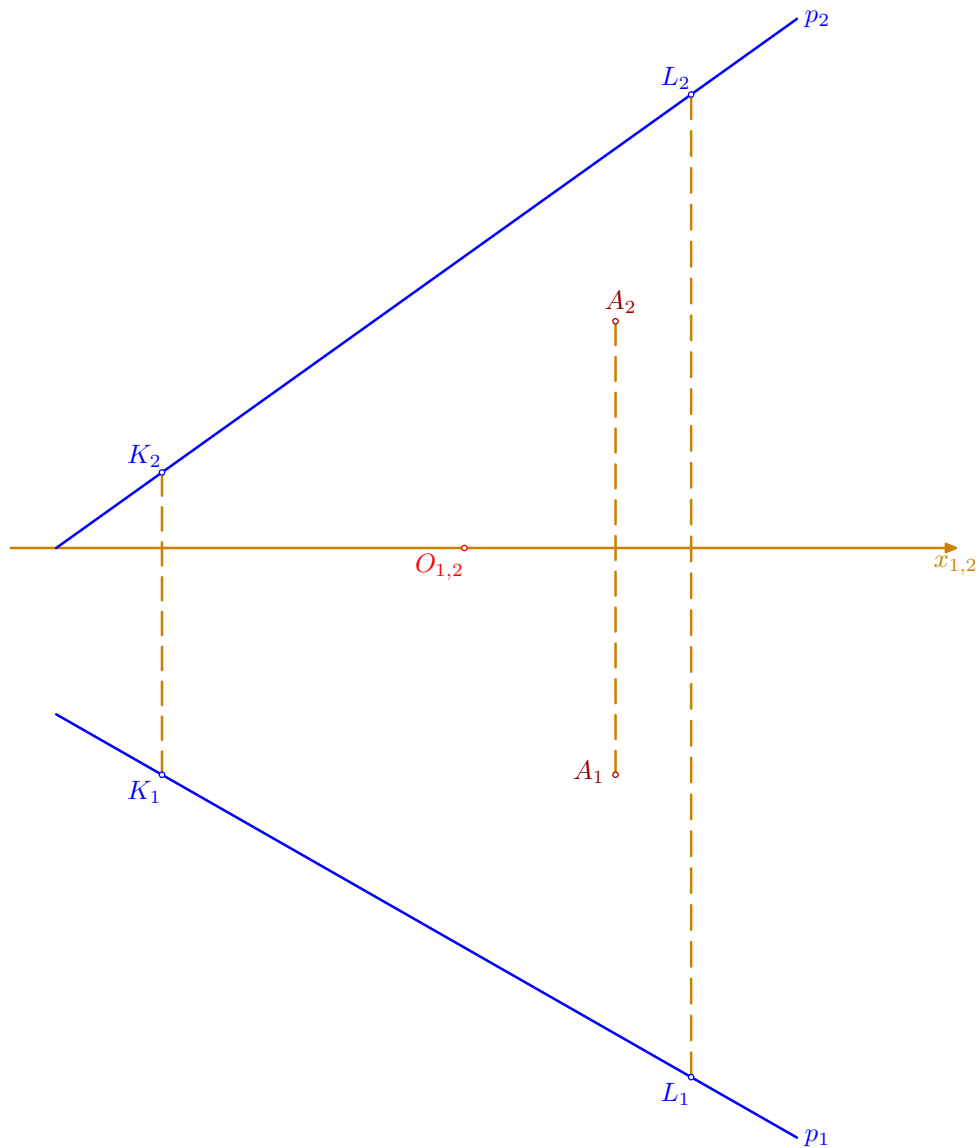
Řešené úlohy



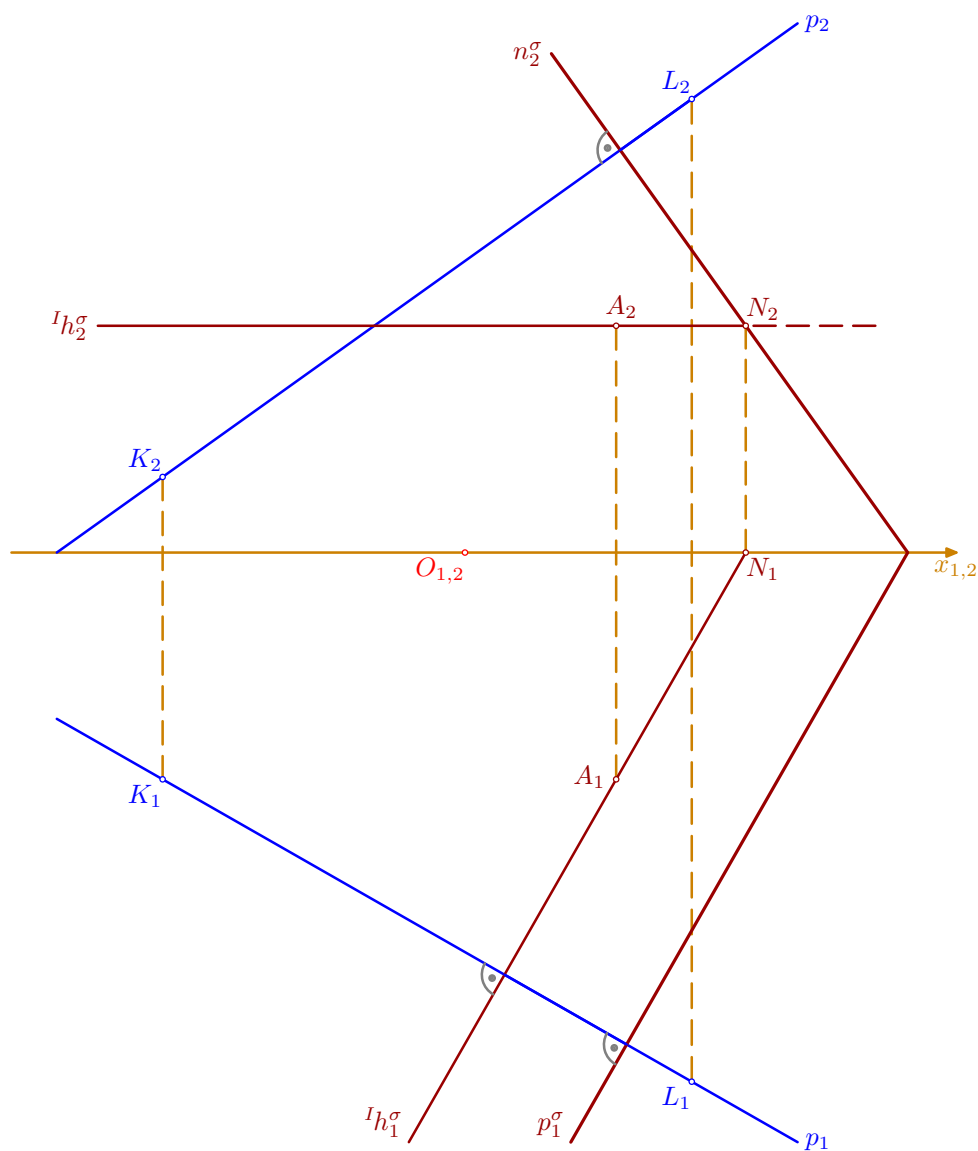
1. způsob řešení – užití roviny vedené daným bodem kolmo k dané přímce

Příklad: Určete vzdálenost $v = |Ap|$ bodu A od přímky $p = KL$; $A[2; 3; 3]$, $K[-4; 3; 1]$, $L[3; 7; 6]$.

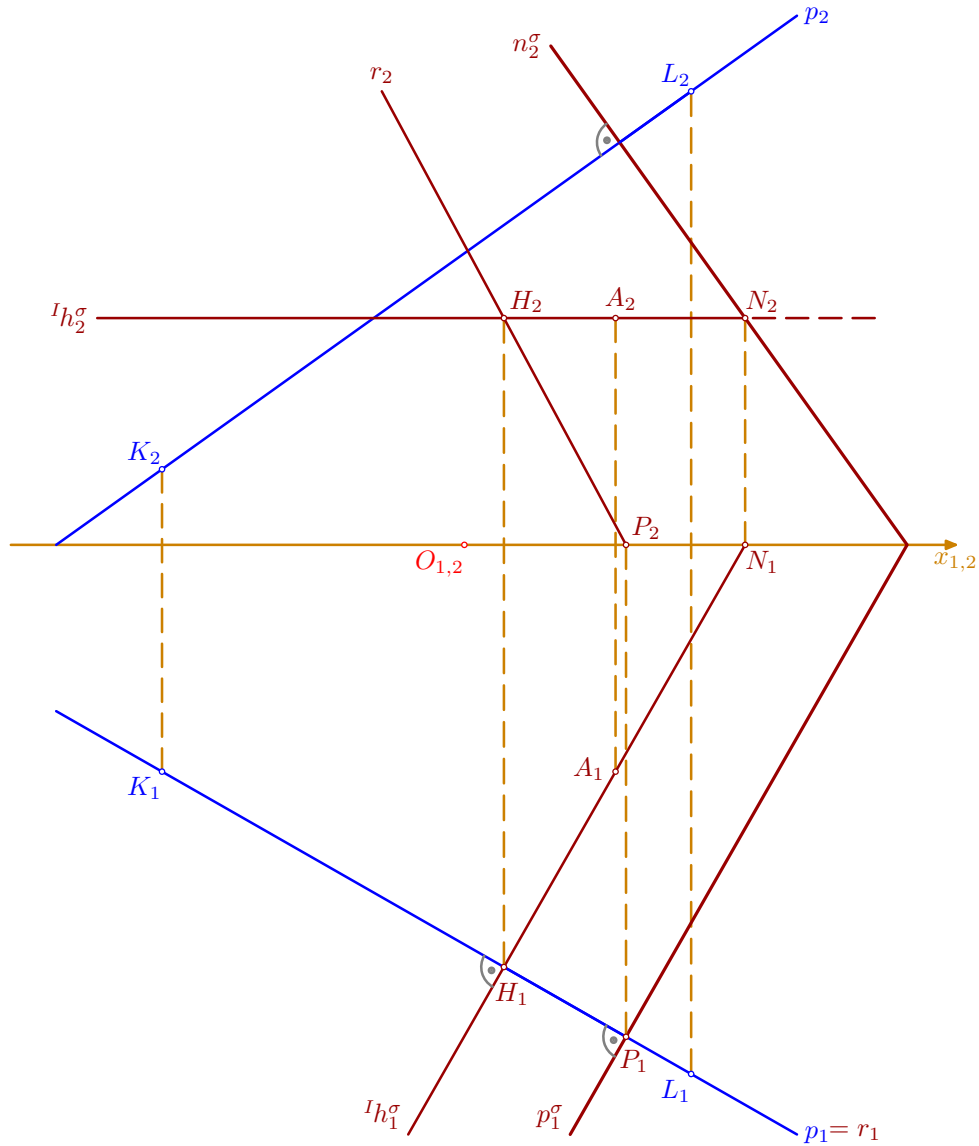
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, K_1, K_2, L_1, L_2, p_1, p_2$ bodů A, K, L a přímky $p = KL$



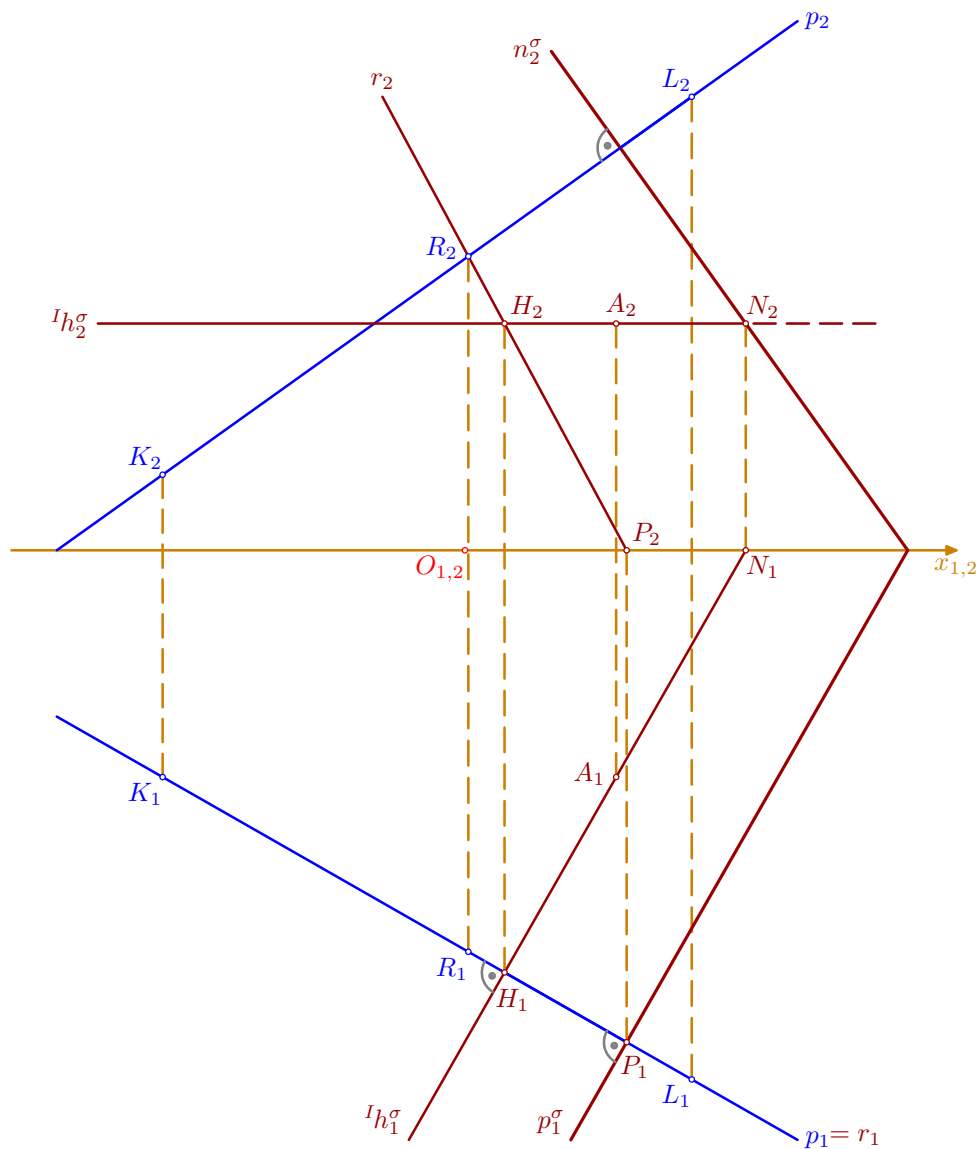
- bodem A vedeme rovinu $\sigma \perp p$: přímka ${}^I h_1^\sigma \perp p_1$, $A_1 \in {}^I h_1^\sigma$ je půdorysem hlavní přímky I. osnovy roviny σ , pro její nárys platí ${}^I h_2^\sigma \parallel x_{1,2}$, $A_2 \in {}^I h_2^\sigma$; bod $N_1 = {}^I h_1^\sigma \cap x_{1,2}$ je půdorysem nárysného stopníku $N = {}^I h^\sigma \cap \nu$ sestřojené hlavní přímky, jeho nárys N_2 leží na ordinále a na přímce ${}^I h_2^\sigma$; a bodem N_2 prochází nárysná stopa $n_2^\sigma \perp p_2$, která se s půdorysnou stopou $p_1^\sigma \perp p_1$ protíná na ose x



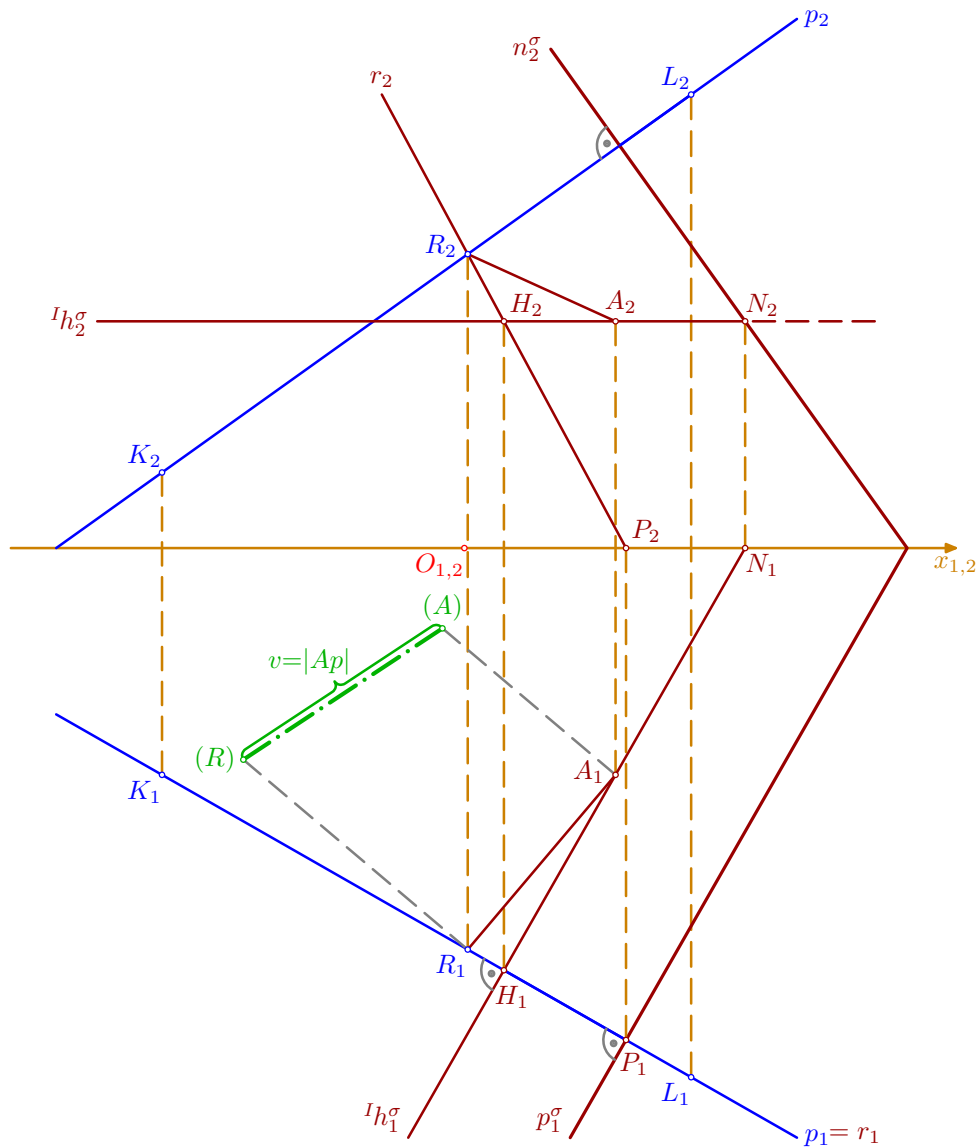
- půdorysně promítací rovina přímky p protíná rovinu σ v přímce $r = PH$, kde $P_1 = p_1^\sigma \cap p_1$ a nárys P_2 leží na ordinále a na ose x , podobně je $H_1 = {}^I h_1^\sigma \cap p_1$ a nárys H_2 leží na ordinále a na přímce ${}^I h_2^\sigma$; v půdoryse je pak $r_1 = P_1 H_1 = p_1$ (r je půdorysně krycí přímka) a v naryse dostaneme $r_2 = P_2 H_2$



- sestrojená přímka r protíná danou přímku p v bodě R , který je současně průsečíkem přímky p s rovinou σ ; v náryse je $R_2 = p_2 \cap r_2$ a půdorys R_1 na ordinále a na přímce $p_1 = r_1$



- na závěr stačí určit skutečnou délku úsečky AR ; provedme to sklopením její půdorysně promítací roviny: pro sklopené polohy $(A), (R)$ bodů A, R platí $|(A)A_1| = z_A = 3$, $|(R)R_1| = z_R = |xR_2|$; řešením úlohy je délka $v = |Ap| = |AR| = |(A)(R)$

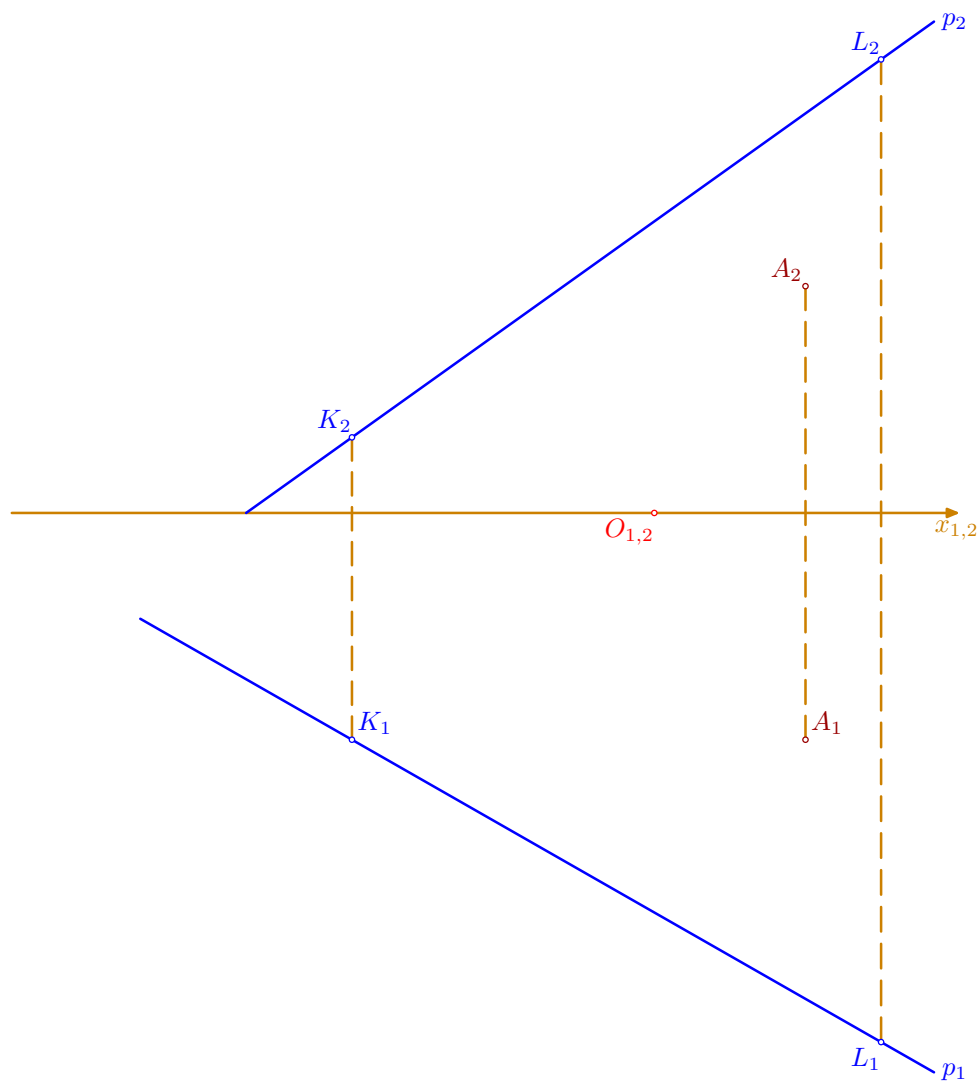


□

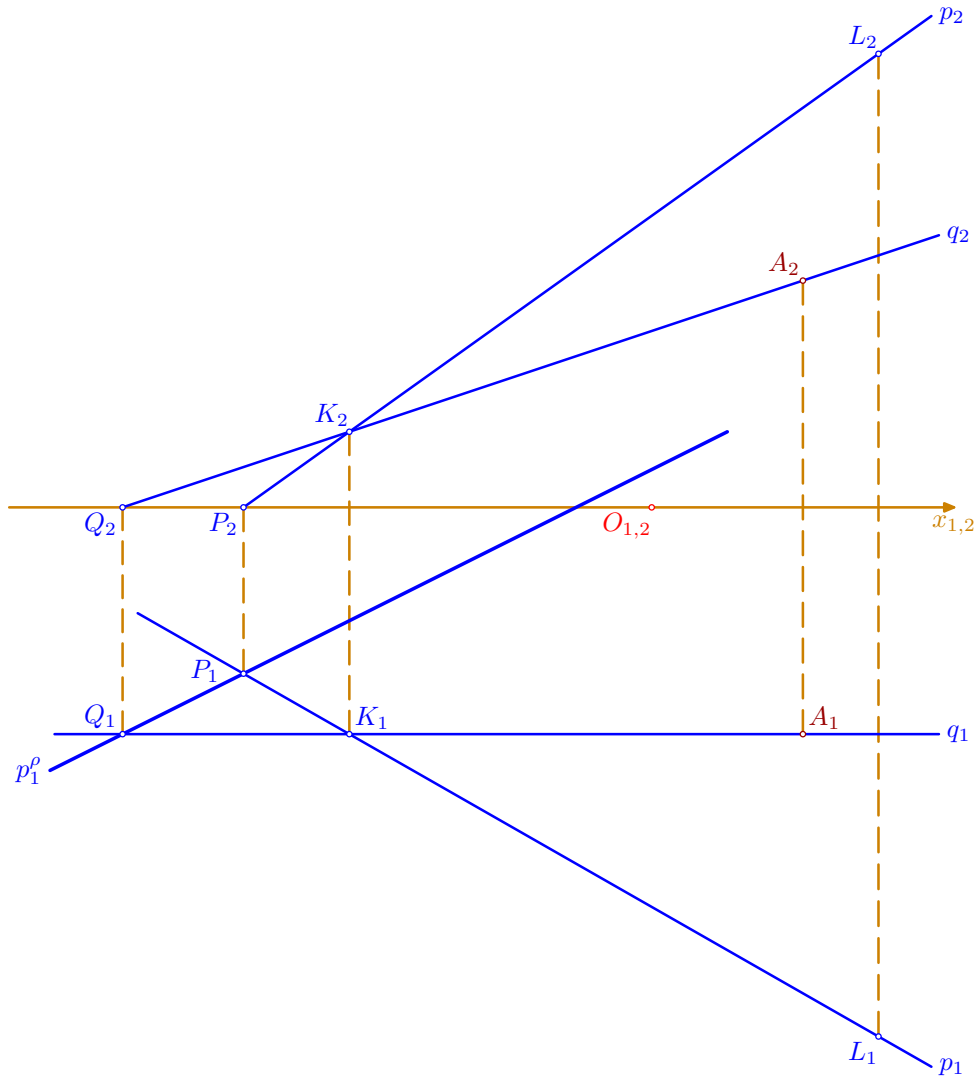
2. způsob řešení – pomocí otočení roviny určené daným bodem a danou přímkou

Příklad: Určete vzdálenost $v = |Ap|$ bodu A od přímky $p = KL$; $A[2; 3; 3]$, $K[-4; 3; 1]$, $L[3; 7; 6]$.

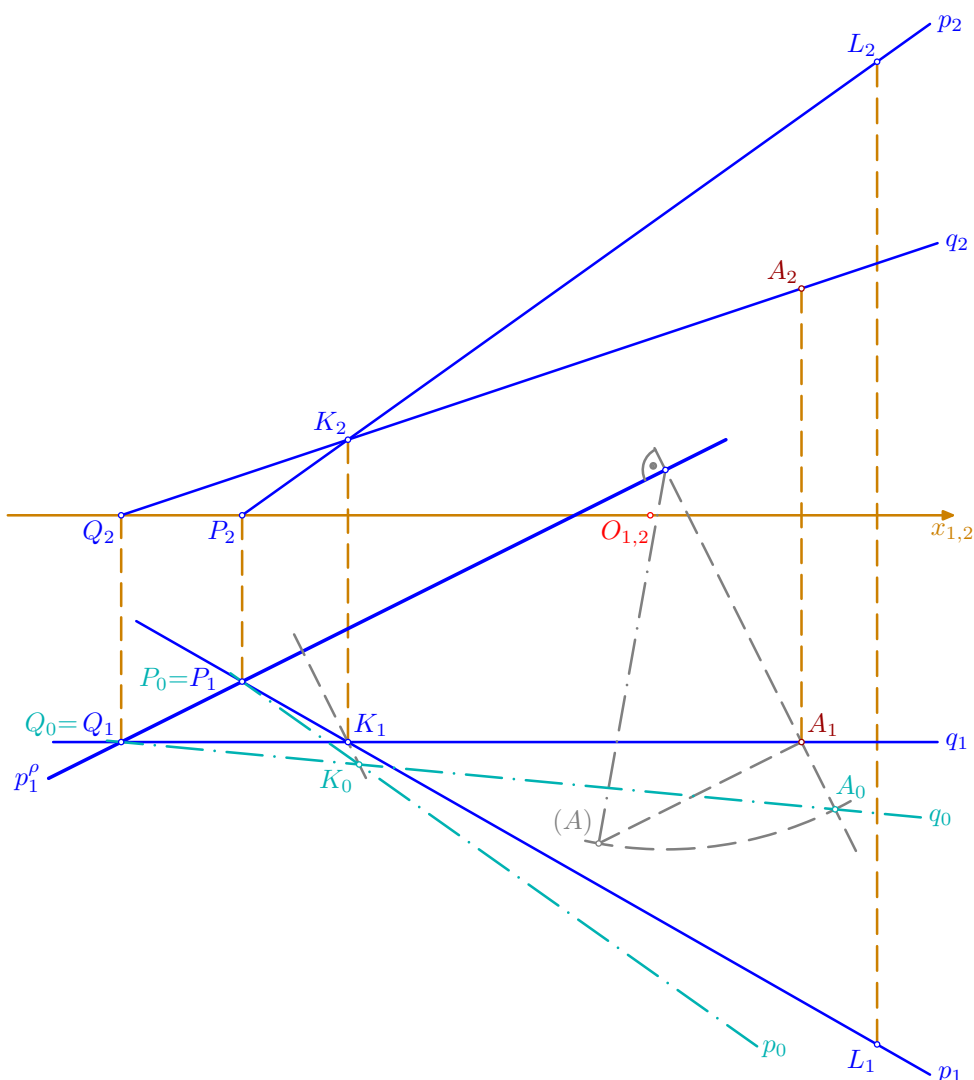
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, K_1, K_2, L_1, L_2, p_1, p_2$ bodů A, K, L a přímky $p = KL$



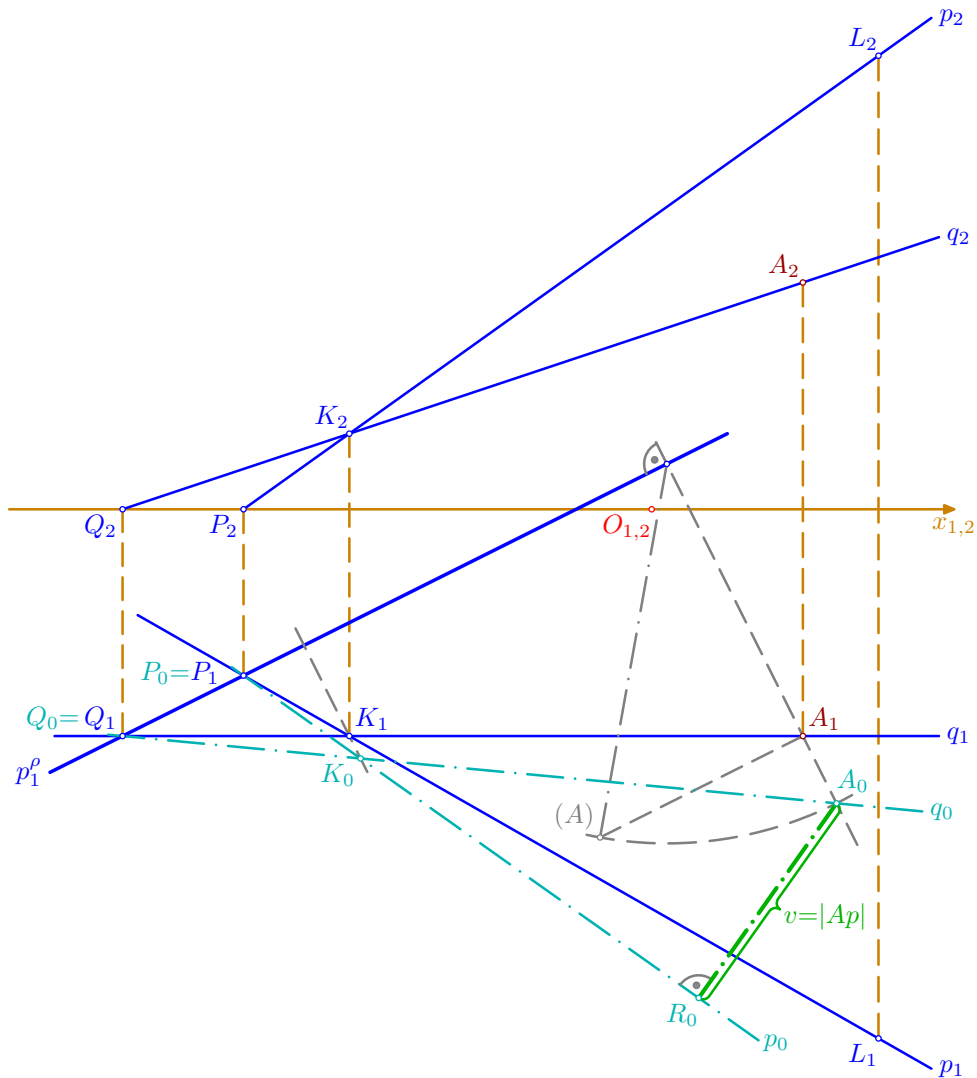
- sestrojme půdorysnou stopu $p^p = PQ$ roviny $\rho = Ap = AKL$, kde body P, Q jsou půdorysné stopníky přímk $p = KL, q = AK$: v náryse je $P_2 = p_2 \cap x_{1,2}$ a $Q_2 = q_2 \cap x_{1,2}$, půdorysy $P_1 \in p_1, Q_1 \in q_1$ leží na příslušných ordinálách; půdorysná stopa je přímka $p_1^p = P_1Q_1$



- rovinu ρ otočme kolem půdorysné stopy p^ρ do půdorysny, sestrojme otočené polohy A_0, p_0 bodu A a přímky p : nejprve určíme poloměr otáčení bodu A sklopením příslušné roviny otáčení (viz sklopená poloha (A) bodu A , kde $|A_1(A)| = z_A = 3$) a sestrojme otočenou polohu A_0 (volíme variantu otočení o menší úhel); bod $Q = Q_1 = Q_0$ zůstává při otáčení na místě a přímka $q_0 = Q_0A_0$ je otočenou polohou přímky q ; na ní sestrojíme otočenou polohu K_0 bodu K a následně otočenou polohu $p_0 = P_0K_0$ přímky p , kde $P_0 = P_1 = P$; jinak řečeno, body A_1 a A_0 , resp. K_1 a K_0 , si odpovídají v pravoúhlé osové afinitě, jejíž osou je stopa p_1^ρ ; v této afinitě si také odpovídají přímky p_1 a p_0 , resp. q_1 a q_0 , které se protínají v samodružném bodě $P_1 = P_0$, resp. $Q_1 = Q_0$, na ose p_1^ρ



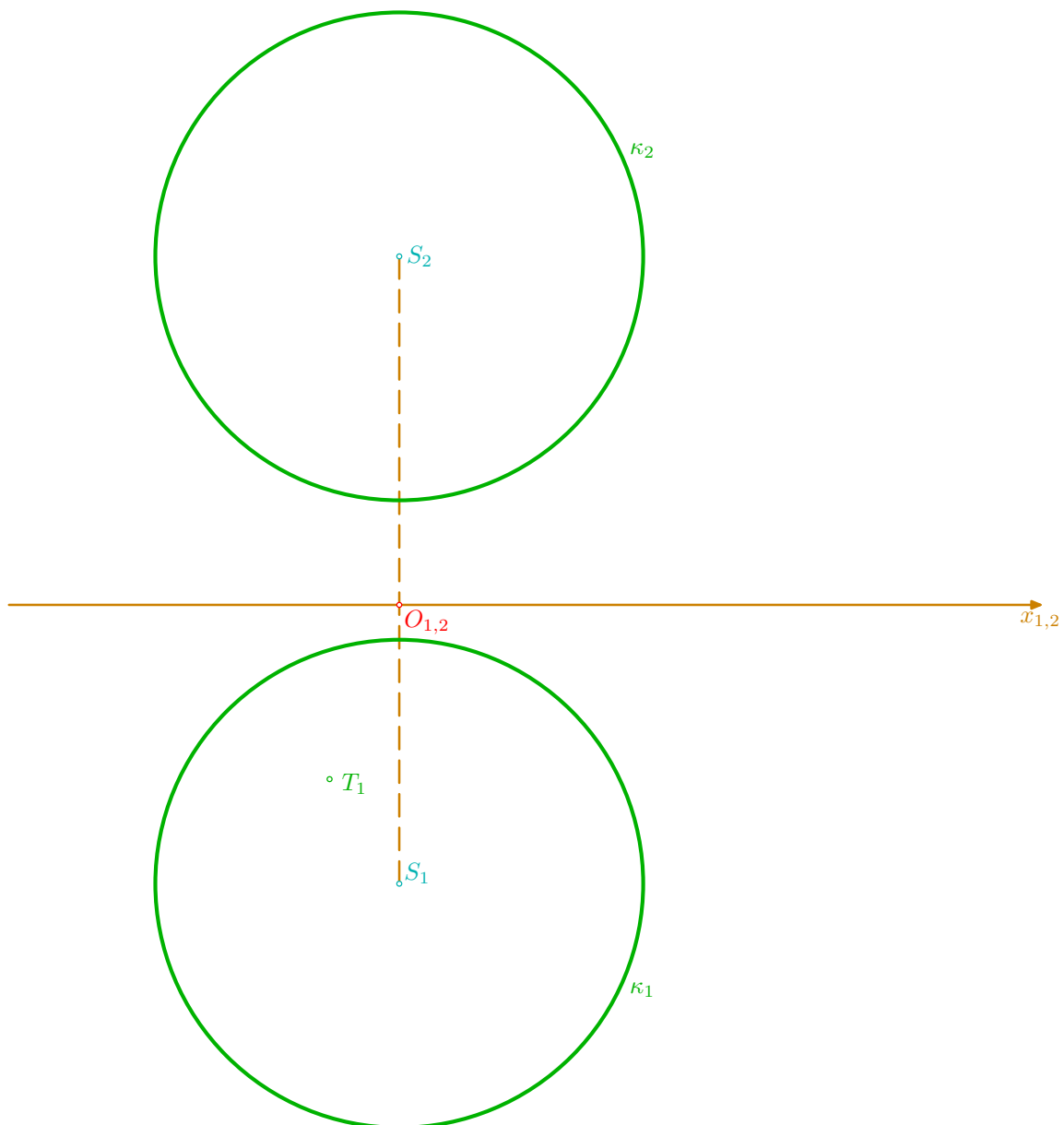
- nyní již snadno úlohu dořešíme v otočení: bodem A_0 ved' me kolmici k přímce p_0 , její patu označme R_0 a svorkou zvýrazněme výsledek, jímž je velikost $v = |A_0R_0| = |A_0p_0| = |Ap|$ úsečky A_0R_0



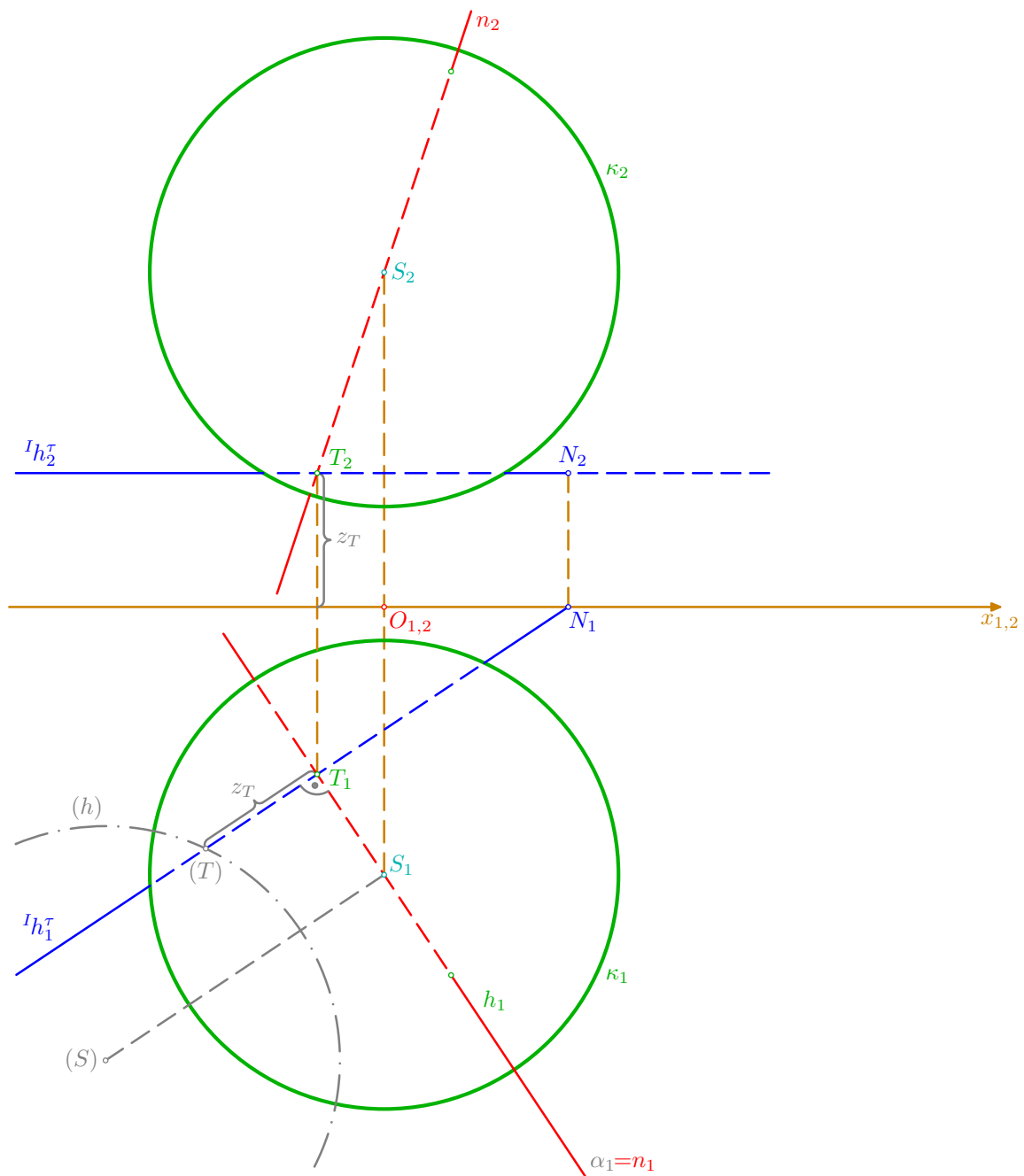
□

Např. pomocí kružítko můžeme zkusit ověřit, že oba způsoby řešení vedou k témuž výsledku. . .

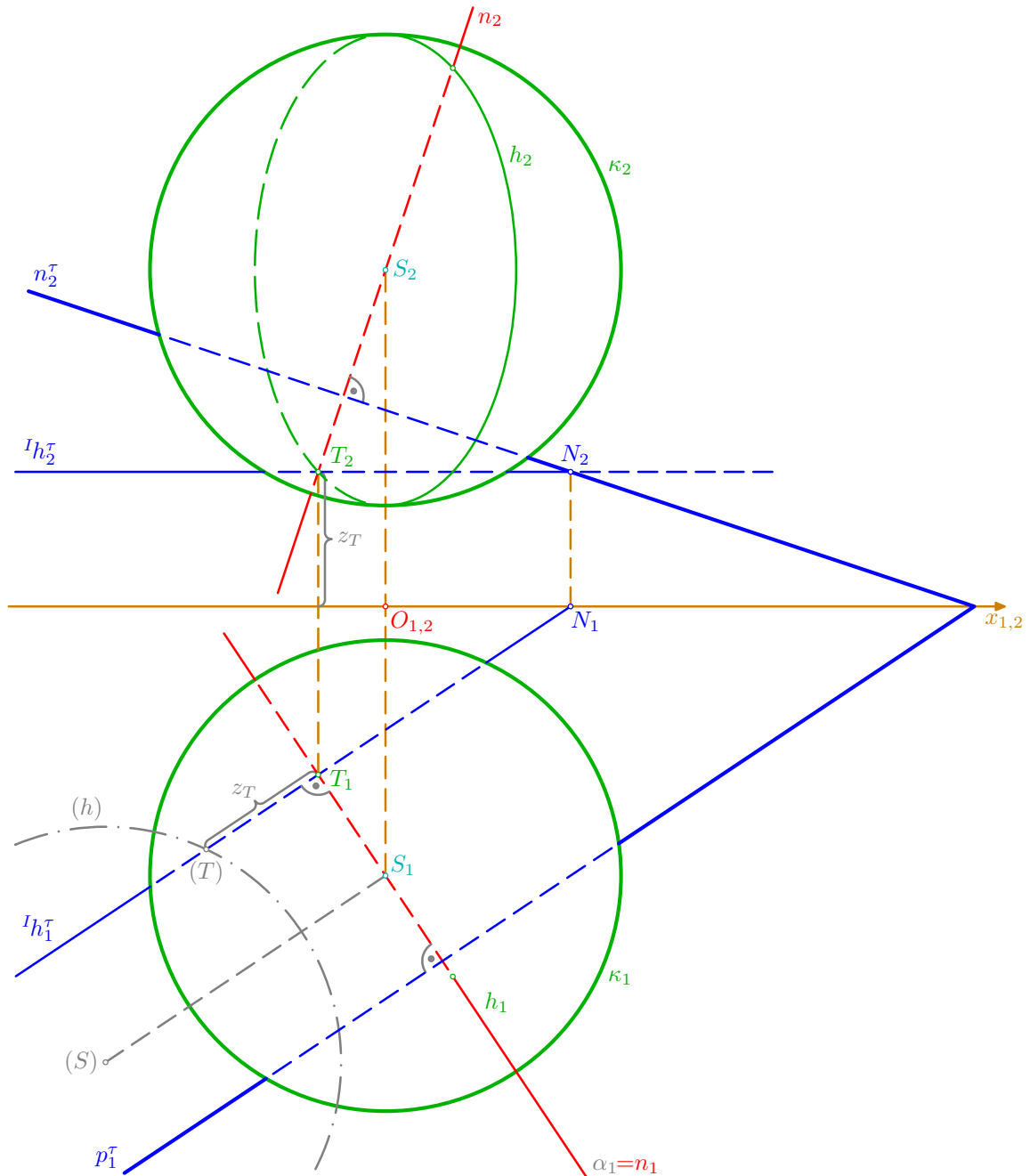
- podle zadání vynesme souřadnice a sestrojme sdružené průměty S_1, S_2 bodu S a půdorys T_1 bodu T ; půdorysem κ_1 , resp. nárysem κ_2 , kulové plochy κ je kruh o středu S_1 , resp. S_2 , a poloměru $r = 3,5$



- pro rovinu $\tau \perp n$ je nejprve bodem T vedena hlavní přímka ${}^I h^\tau$ její I. osnovy: v půdoryse je ${}^I h_1^\tau \perp n_1, T_1 \in {}^I h_1^\tau$ a v náryse platí ${}^I h_2^\tau \parallel x_{1,2}, T_2 \in {}^I h_2^\tau$; současně je sestaven také nárysný stopník N přímky ${}^I h^\tau$: pro jeho půdorys platí $N_1 = {}^I h_1^\tau \cap x_{1,2}$ a nárys leží na ordinále a na přímce ${}^I h_2^\tau$

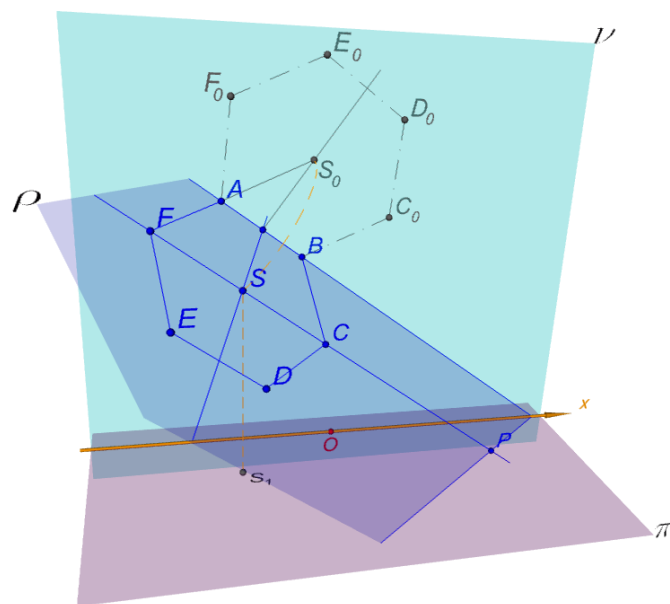


- na závěr již snadno doplníme stopy hledané tečné roviny τ , která se dotýká dané kulové plochy $\kappa(S, r)$ v jejím daném bodě T : nárysná stopa n_2^τ prochází bodem N_2 kolmo k přímce $n_2 = S_2T_2$ a protíná se s půdorysnou stopou $p_1^\tau \perp n_1$ na ose $x = x_{1,2}$



□

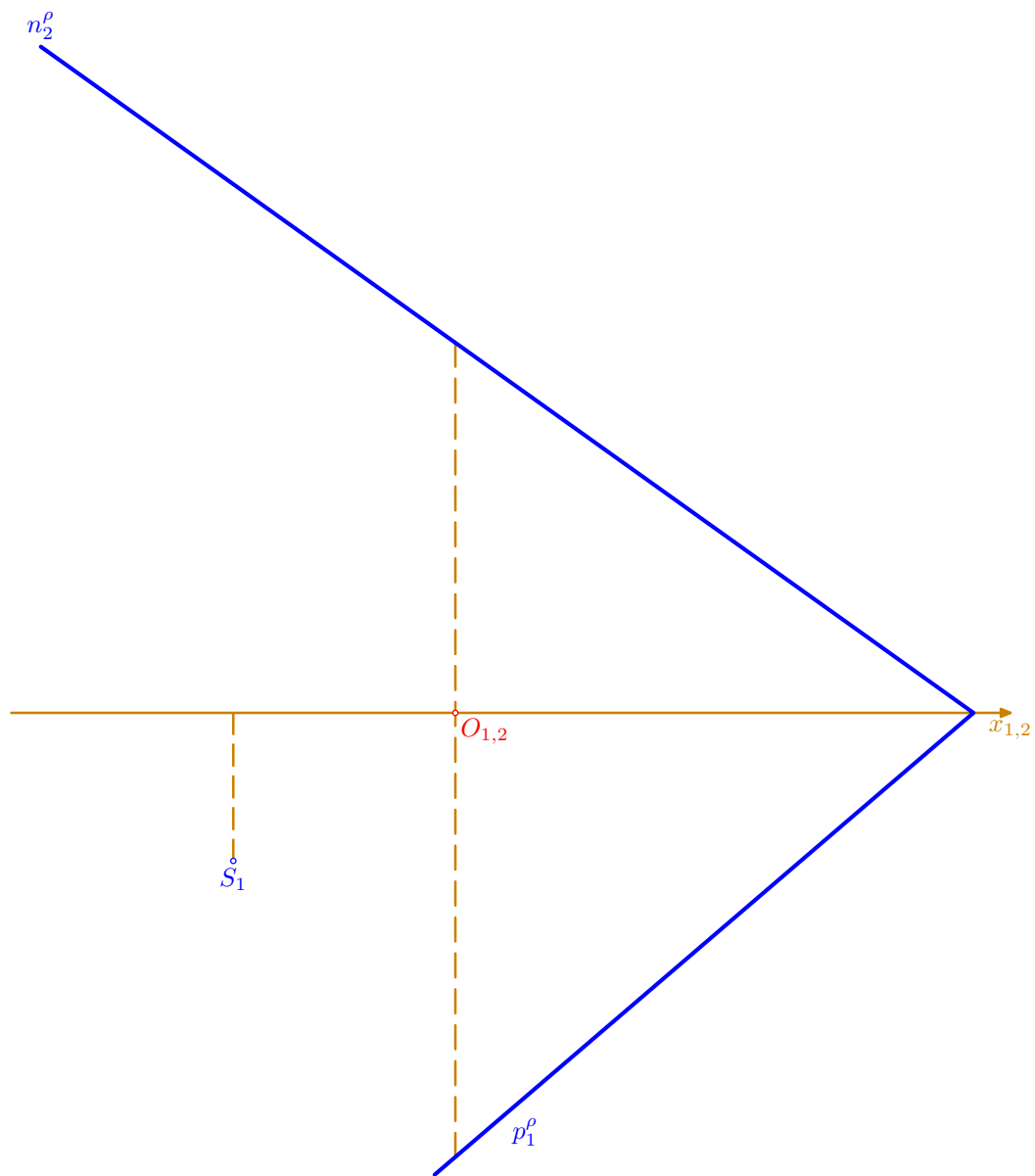
5.7. Konstrukce pravidelného šestiúhelníka



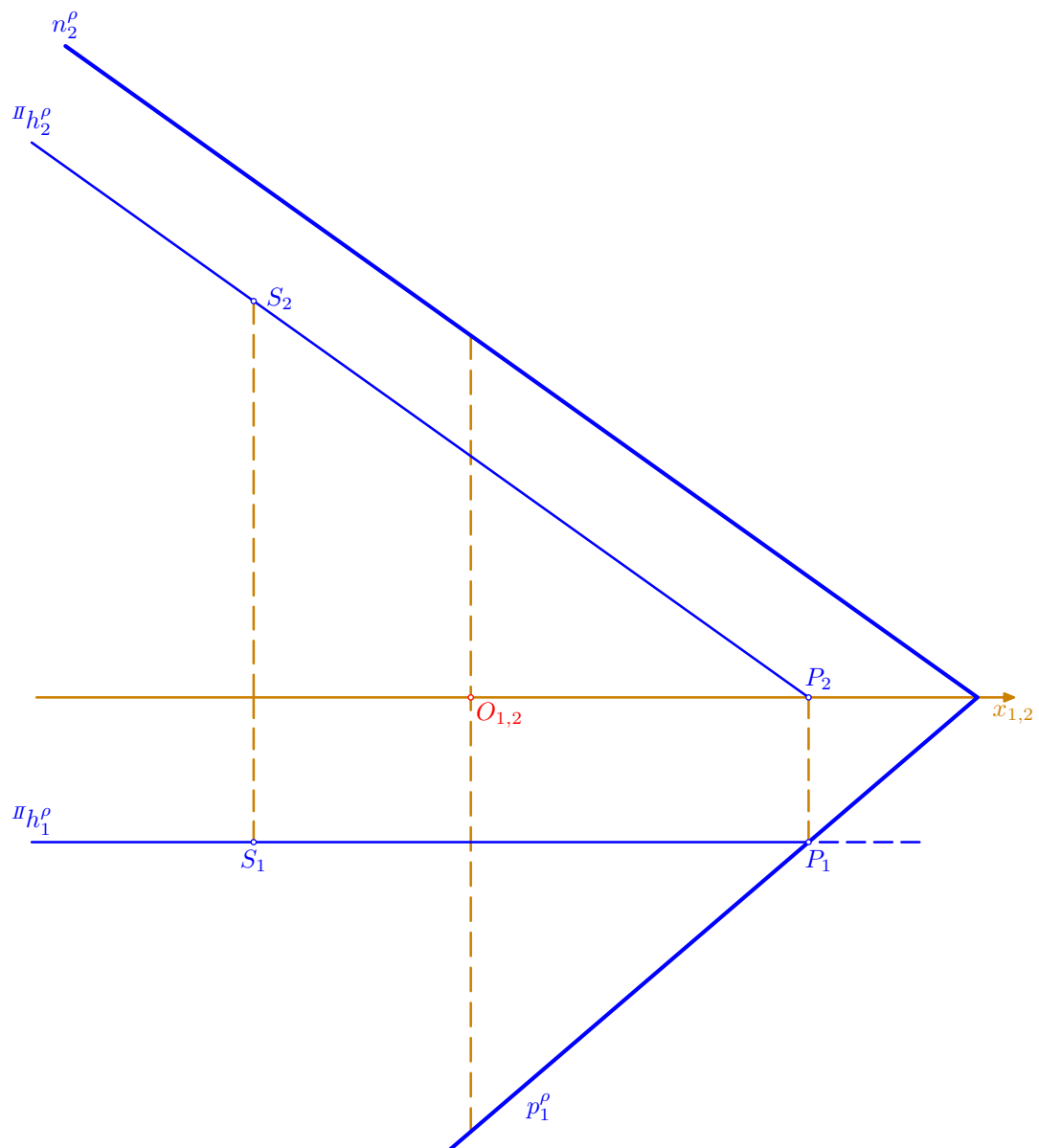
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte pravidelný šestiúhelník v rovině ρ , je-li dán jeho střed S a jedna strana leží v nárysně ν ; $\rho(7; 6; 5), S[-3; 2; ?]$.

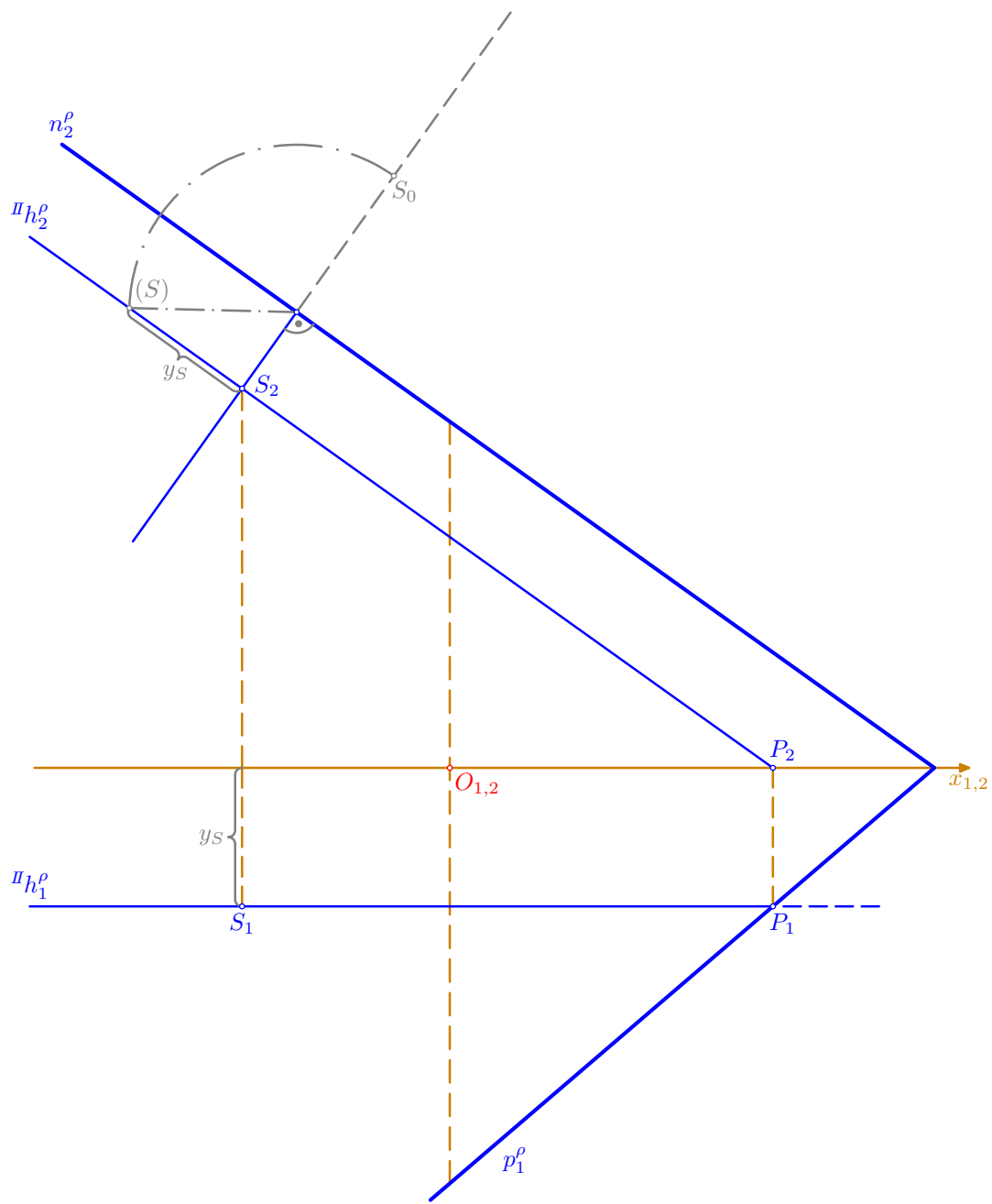
- podle zadání sestrojme stopy p_1^{ρ} , n_2^{ρ} roviny ρ a půdorys S_1 bodu S



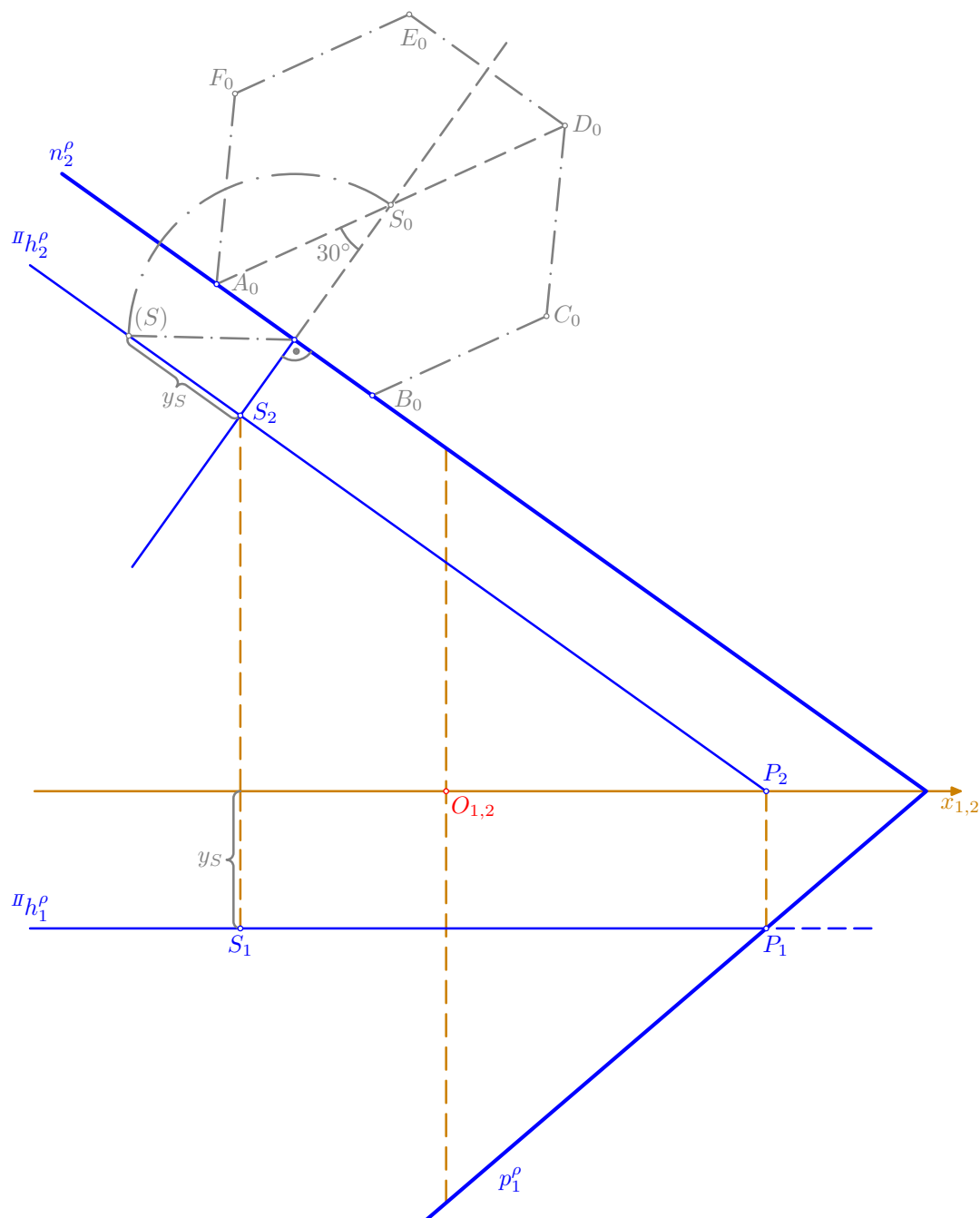
- doplníme nárys S_2 bodu S pomocí hlavní přímky ${}^{II}h^\rho$ II. osnovy roviny ρ a jejího půdorysného stopníku $P = {}^{II}h^\rho \cap \pi$: v půdorysu je ${}^{II}h_1^\rho \parallel x_{1,2}$, $S_1 \in {}^{II}h_1^\rho$ a $P_1 = {}^{II}h_1^\rho \cap p_1^\rho$, nárys P_2 leží na ordinále a na ose x a pro nárys přímky ${}^{II}h^\rho$ platí ${}^{II}h_2^\rho \parallel n_2^\rho$, $P_2 \in {}^{II}h_2^\rho$; nárys S_2 leží na příslušné ordinále a na sestrojené přímce ${}^{II}h_2^\rho$



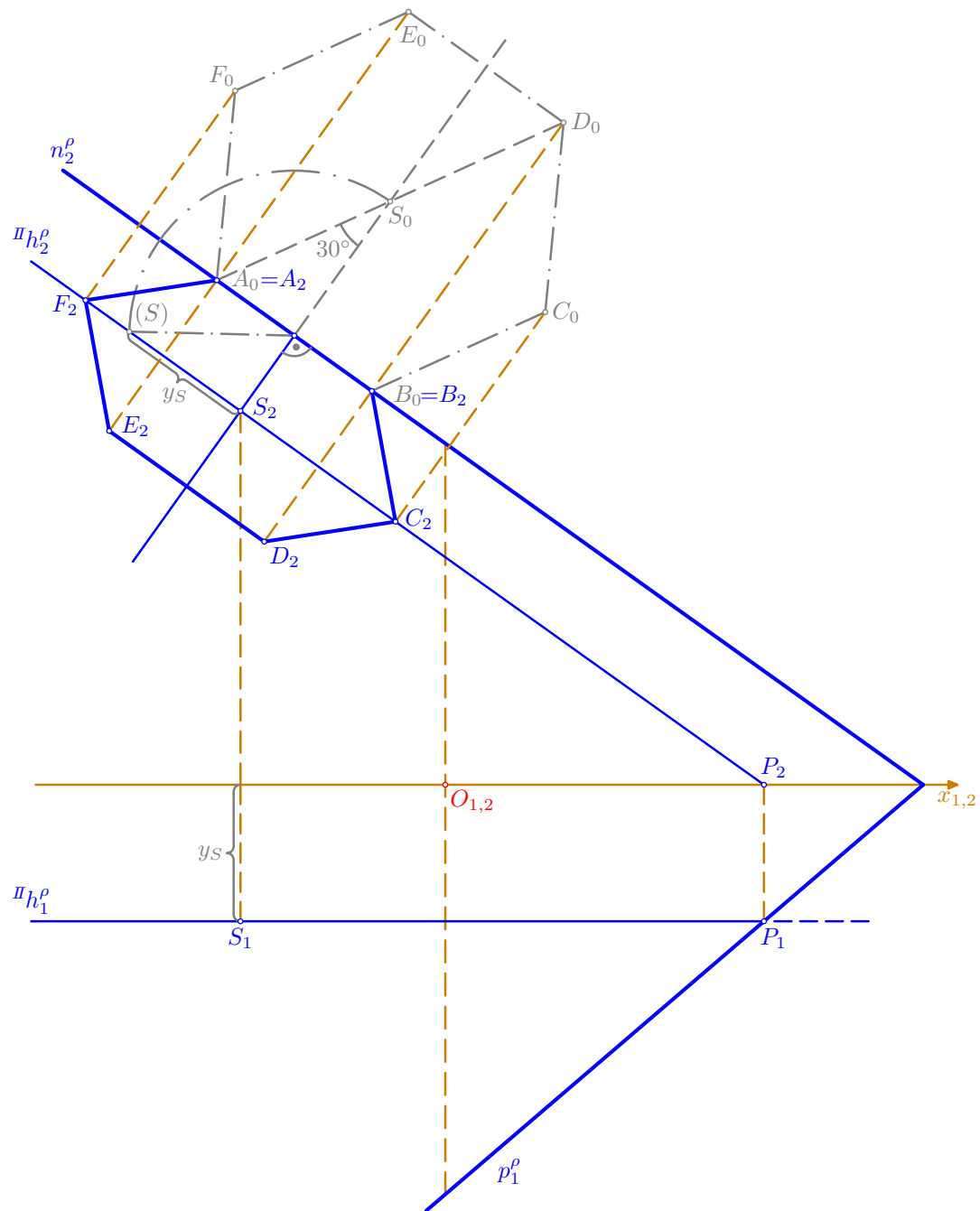
- sestrojme otočenou polohu S_0 bodu S v otočení roviny ρ do nárýsny kolem nárýsné stopy n^ρ : poloměr $|Sn^\rho|$ otáčení zjistíme ve sklopení příslušné roviny otáčení, kde pro sklopenou polohu (S) bodu S platí $(S) \in \Pi h_2^\rho$, $|S_2(S)| = y_S = |S_1 x_{1,2}| = 2$, a následně provedeme otočení do bodu S_0 v uvedeném sklopení; konstrukce jsou provedeny obvyklým způsobem, tj. čerchovaně



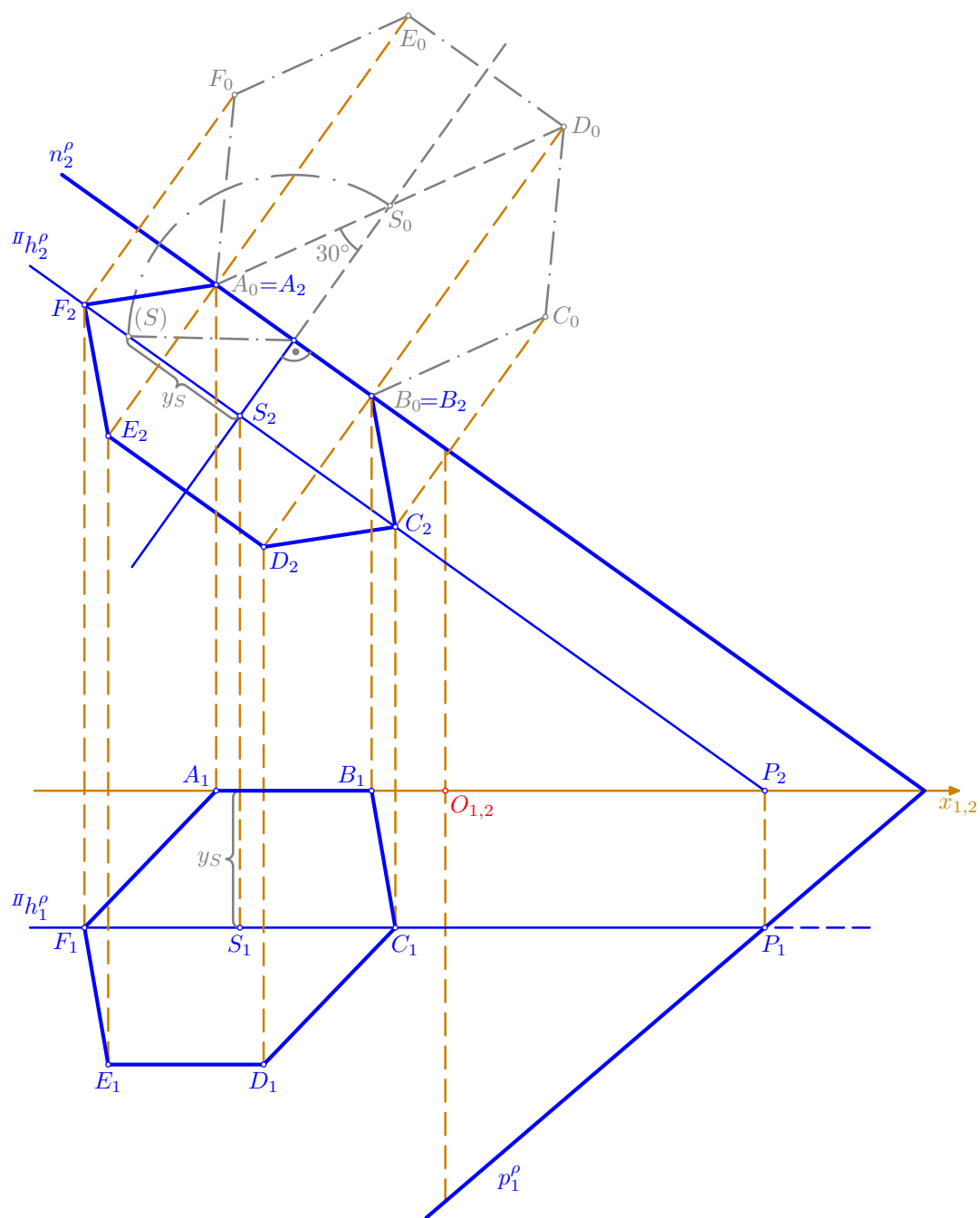
- v otočení vyřešíme zadanou úlohu: sestrojíme pravidelný šestiúhelník $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$, který má střed S_0 a jehož strana A_0B_0 leží na nárysné stopě n_2^p (způsob konstrukce je patrný z obrázku); tento šestiúhelník je vskutku řešením, neboť po otočení zpět do roviny ρ bude mít střed v bodě S a strana AB zůstane ležet v nárysně



- provedme otočení zpět a sestrojme nárys $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ šestiúhelníka $ABCDEF$; při tom lze využít pravoúhlou osovou afinitu, jejíž osou je nárysná stopa n_2^p a v níž si odpovídají body S_0 a S_2 ; při ručním rýsování vede ovšem její užití často k nepřesnostem a je velmi vhodné průběžně konstrukce kontrolovat pomocí středové souměrnosti, která se v průmětu zachová

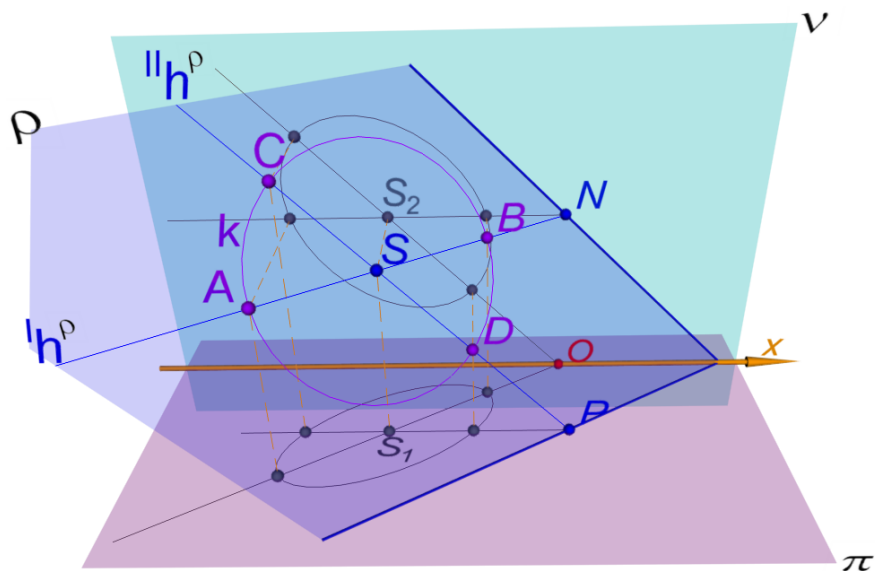


- na závěr doplňme půdorys $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ šestiúhelníka $ABCDEF$; zde využijeme ordinály a opět středovou souměrnost tentokrát podle bodu S_1



□

6. Zobrazení kružnice v Mongeově promítání



Výklad

- půdorysem i nárysem kružnice, která leží v rovině obecně položené k oběma průmětnám, jsou **elipsy**, jež mají délky hlavních poloos rovny poloměru dané kružnice
- je-li kružnice v obecné rovině dána svým středem a poloměrem, lze její průměty snadno sestrojít podle následujícího příkladu
- pokud je kružnice dána jinak, např. třemi body nebo středem a tečnou, je obvykle nejvýhodnější **otočit rovinu této kružnice** do některé z průmětem, v otočení kružnici sestrojít a poté vrátit zpět do půdorysu a nárysu

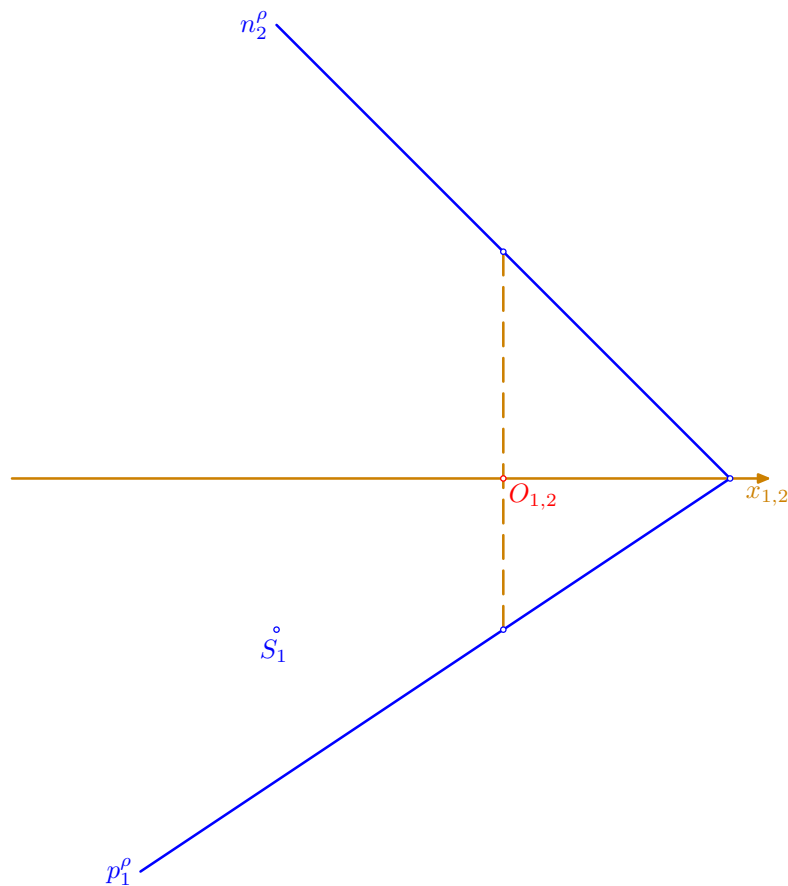




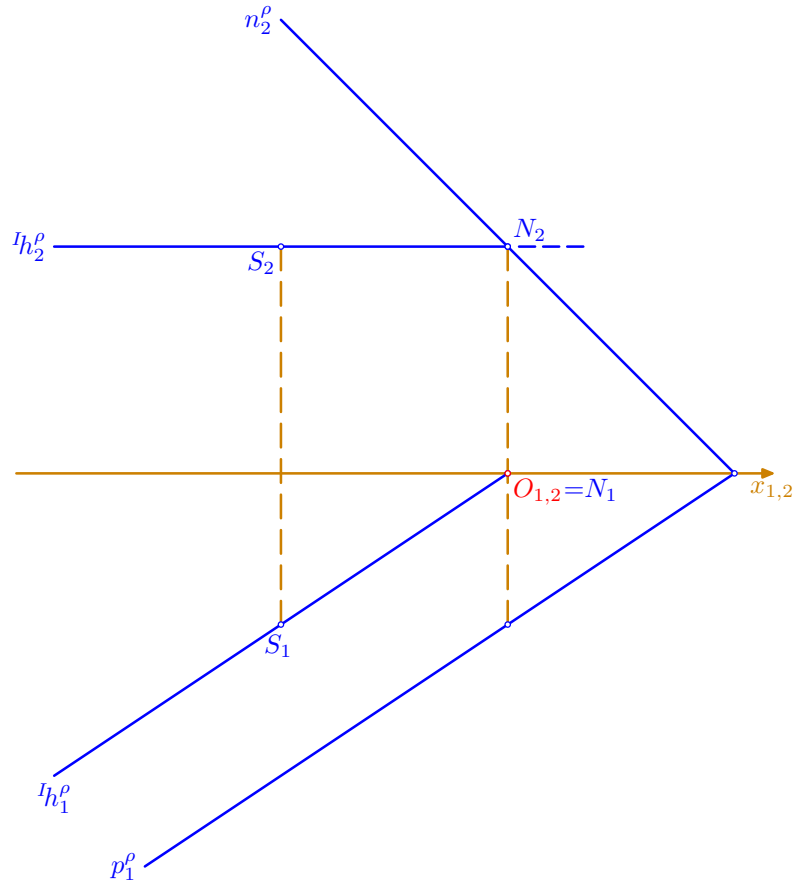
Řešené úlohy

Příklad: V rovině ρ sestrojte kružnici $k(S, r)$; $\rho(3; 2; 3)$, $S[-3; 2; ?]$, $r = 2$.

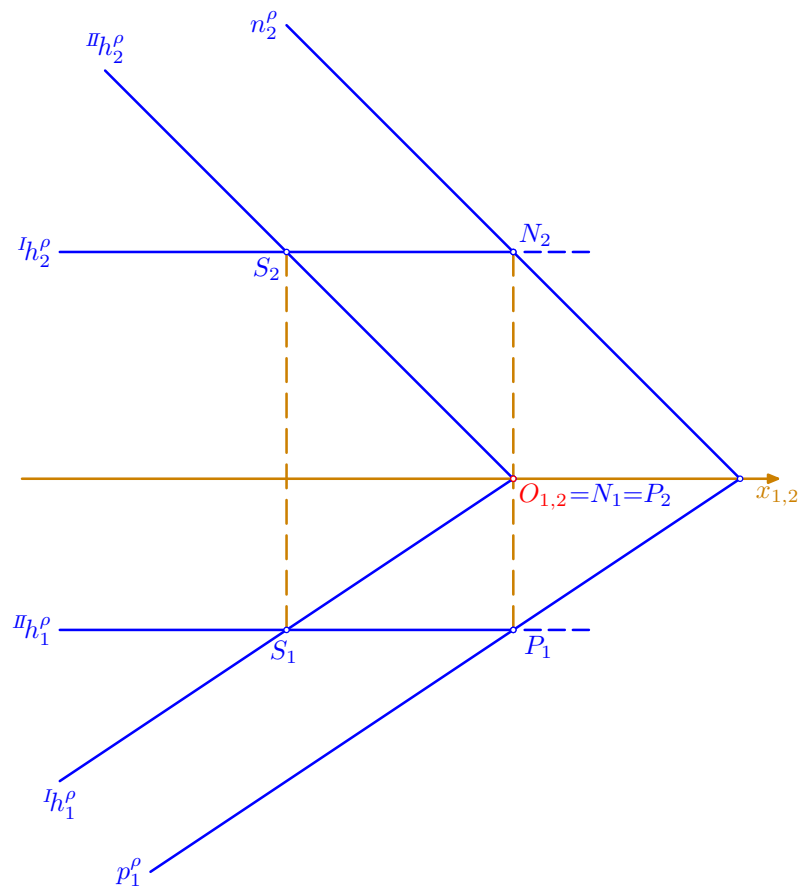
- podle zadání sestrojme stopy p_1^{ρ} , n_2^{ρ} roviny ρ a půdorys S_1 středu S ; poloměr r použijeme později



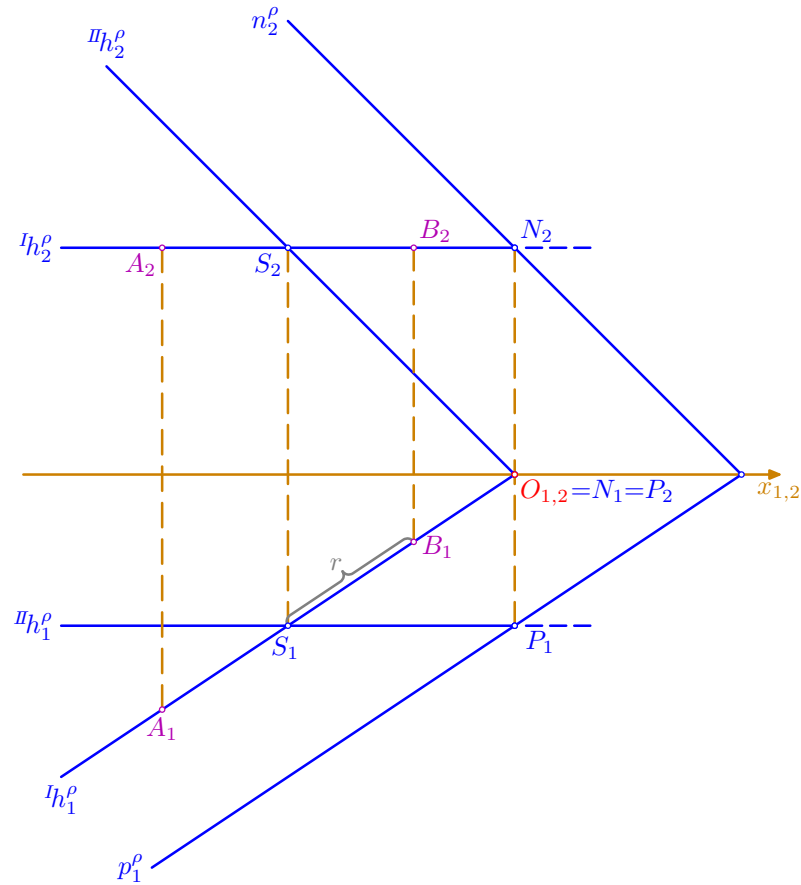
- pomocí hlavní přímky h^{ρ} I. osnovy doplníme nárys bodu $S \in \rho$: je $h_1^{\rho} \parallel p_1^{\rho}, S_1 \in h_1^{\rho}$, nárysny stopník N má půdorys $N_1 = h_1^{\rho} \cap x$ (vychází do počátku O), nárys N_2 leží na ordinále a na stopě n_2^{ρ} , jím prochází nárys $h_2^{\rho} \parallel x$ užité hlavní přímky; bod S_2 najdeme na ordinále a sestrojíme přímce h_2^{ρ}



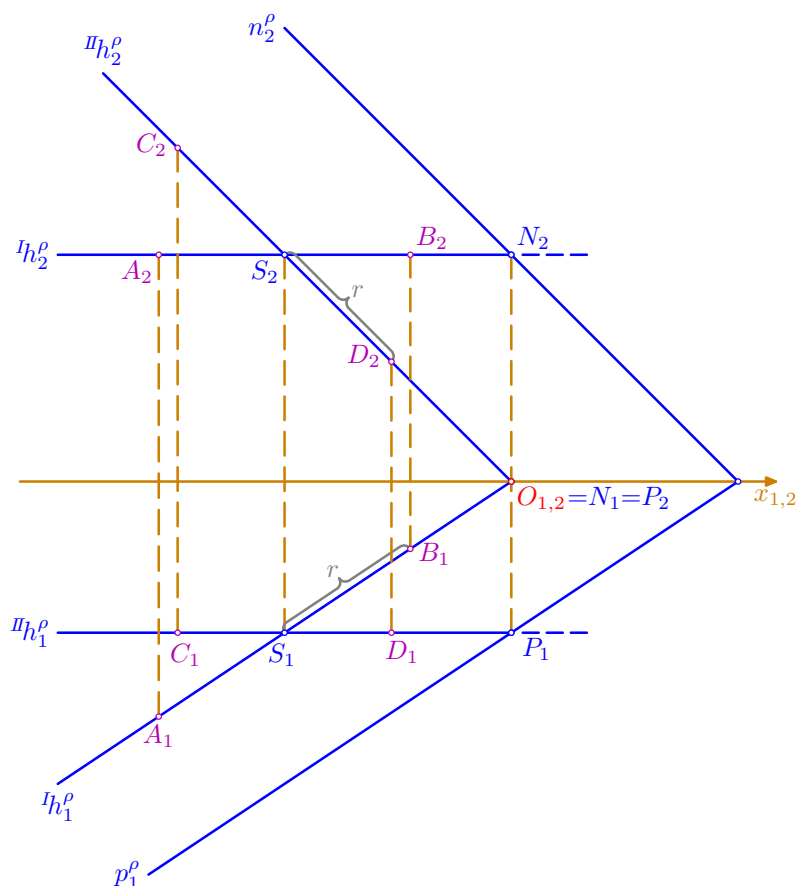
- bodem S vedme také hlavní přímku h^p II. osnovy: pro její sdružené průměty platí $h_1^p \parallel x, S_1 \in h_1^p$ a $h_2^p \parallel n_2, S_2 \in h_2^p$; pro půdorysný stopník P této hlavní přímky platí $P_1 = h_1^p \cap p_1^p$ a P_2 leží na ordinále a na ose x (také vychází do počátku O)



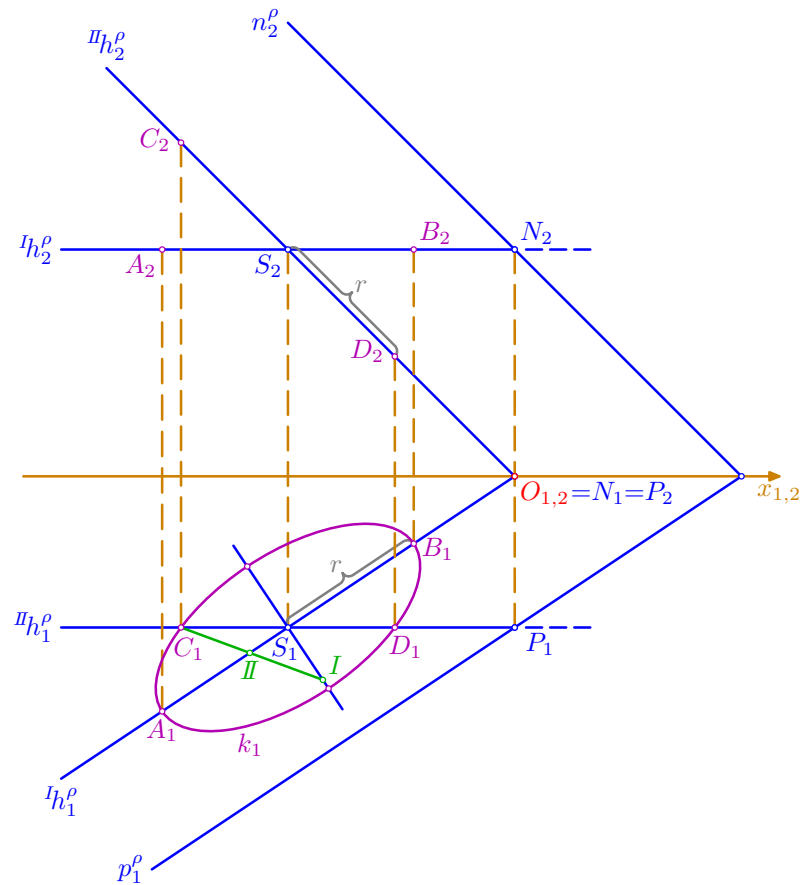
- sestrojme body $A, B = I_{h^{\rho}} \cap k$: v půdorysu se na $I_{h_1^{\rho}}$ zachová délka úsečky a platí tedy $|A_1 S_1| = |B_1 S_1| = r$, nárysy A_2, B_2 bodů A, B najdeme po ordinálách na přímce $I_{h_2^{\rho}}$; úsečka AB je jediný průměr kružnice k , který se v půdorysu nezkrátí, a tudíž jsou body A_1, B_1 hlavní vrcholy elipsy k_1 , která je půdorysem dané kružnice k ; nárysy A_2, B_2 jsou obecnými body elipsy k_2 , která je nárysem kružnice k



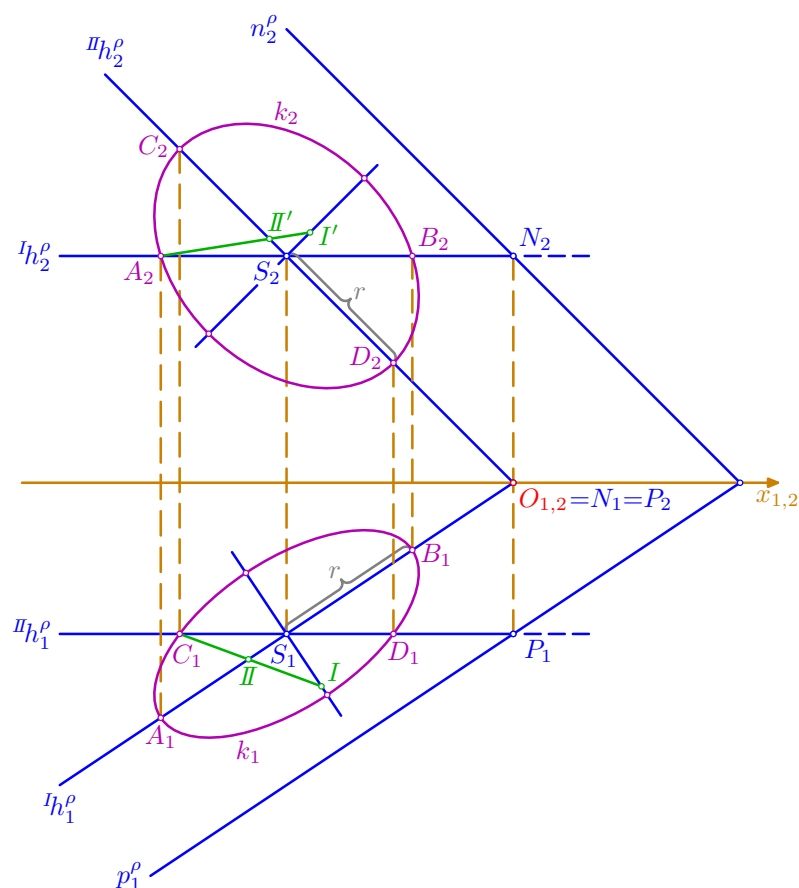
- podobně sestrojme body $C, D = \Pi h^p \cap k$: tentokrát se zachová délka na nárysu Πh_2^p , kde můžeme nanést poloměr r kružnice k ve skutečné velikosti, tj. $|C_2 S_2| = |D_2 S_2| = r$, a půdorysy C_1, D_1 získáme opět po ordinálách na přímce Πh_1^p ; tím jsme analogicky jako v předchozím kroku získali hlavní vrcholy C_2, D_2 elipsy k_2 a obecné body C_1, D_1 , kterými bude procházet elipsa k_1



- pro půdorys k_1 kružnice k již stačí jen doplnit vedlejší vrcholy – to je provedeno pomocí **rozdílové proužkové konstrukce** (podrobněji viz na straně 196): bod I leží na vedlejší ose a platí pro něj $|IC_1|=|A_1S_1|$, délka úsečky IIC_1 , kde $II=C_1I \cap A_1S_1$, pak udává délku vedlejší poloosy elipsy k_1 , kterou je (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech) nyní možno vyrýsovat



- taktéž v nárysu jsou vedlejší vrcholy elipsy k_2 sestrojeny pomocí **rozdílové proužkové konstrukce** (pomocné body I' , II'), jinak je postup stejný jako v půdorysu; elipsy k_1 a k_2 jakožto sdružené průměty kružnice k mají tedy stejnou délku hlavní poloosy navíc rovnou poloměru r , délka vedlejší poloosy je však v obou průmětech obecně různá

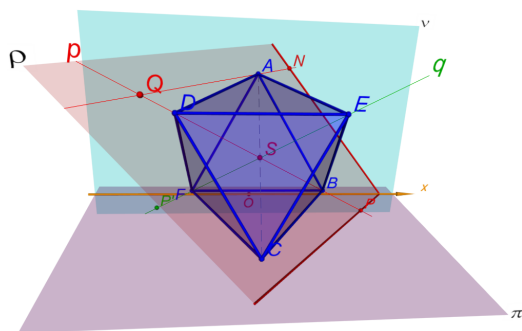


□

7. Konstrukční úlohy v Mongeově promítání

- v následujících úlohách jde o to sestavit určený geometrický objekt z daných prvků
- přitom je vždy nejprve na základě vztahů mezi danými a hledanými útvary, tj. na základě **rozboru** úlohy, stanoven **postup** konstrukcí v prostoru, tzv. **prostorový princip** řešení
- poté je krok po kroku provedena konstrukce v Mongeově promítání

7.1. Pravidelný osmistěn

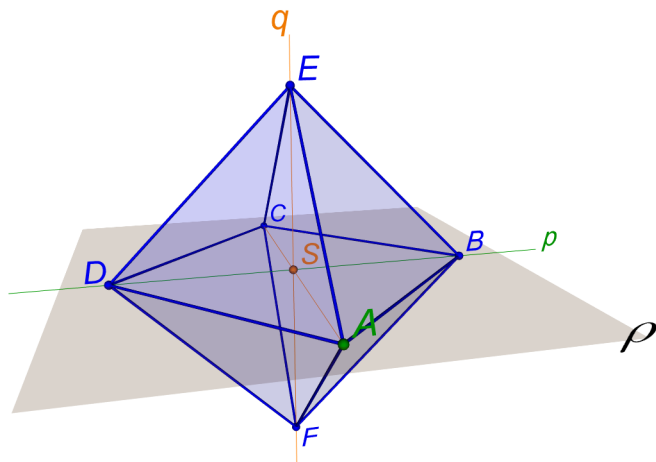


Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte pravidelný osmistěn, je-li dán jeho vrchol A a úhlopříčka BD leží na přímce $p=PQ$; $A[0; 2; 6]$, $P[5; 2; 0]$, $Q[-4; 7; 6]$.



Rozbor úlohy

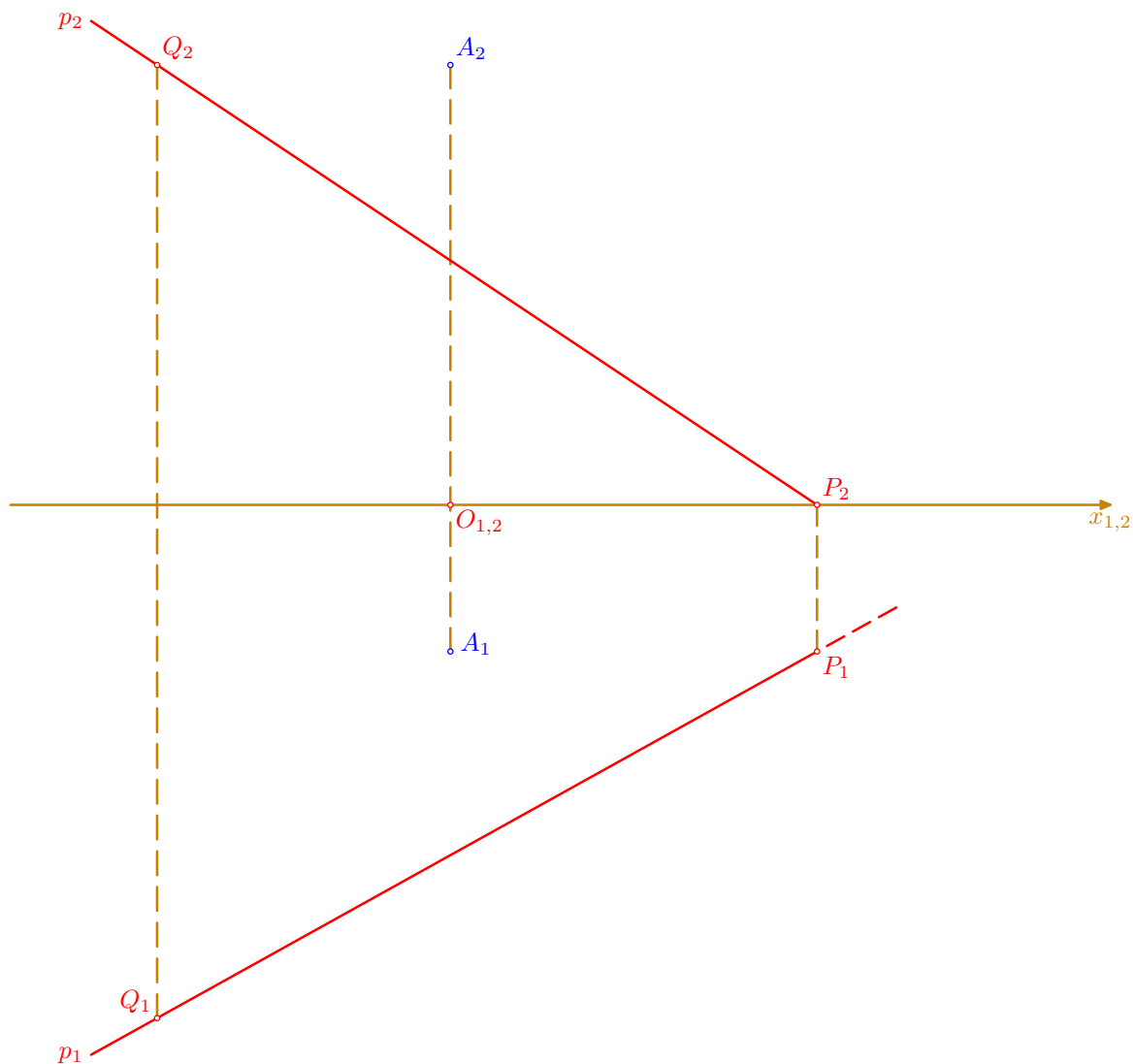


Prostorový princip řešení

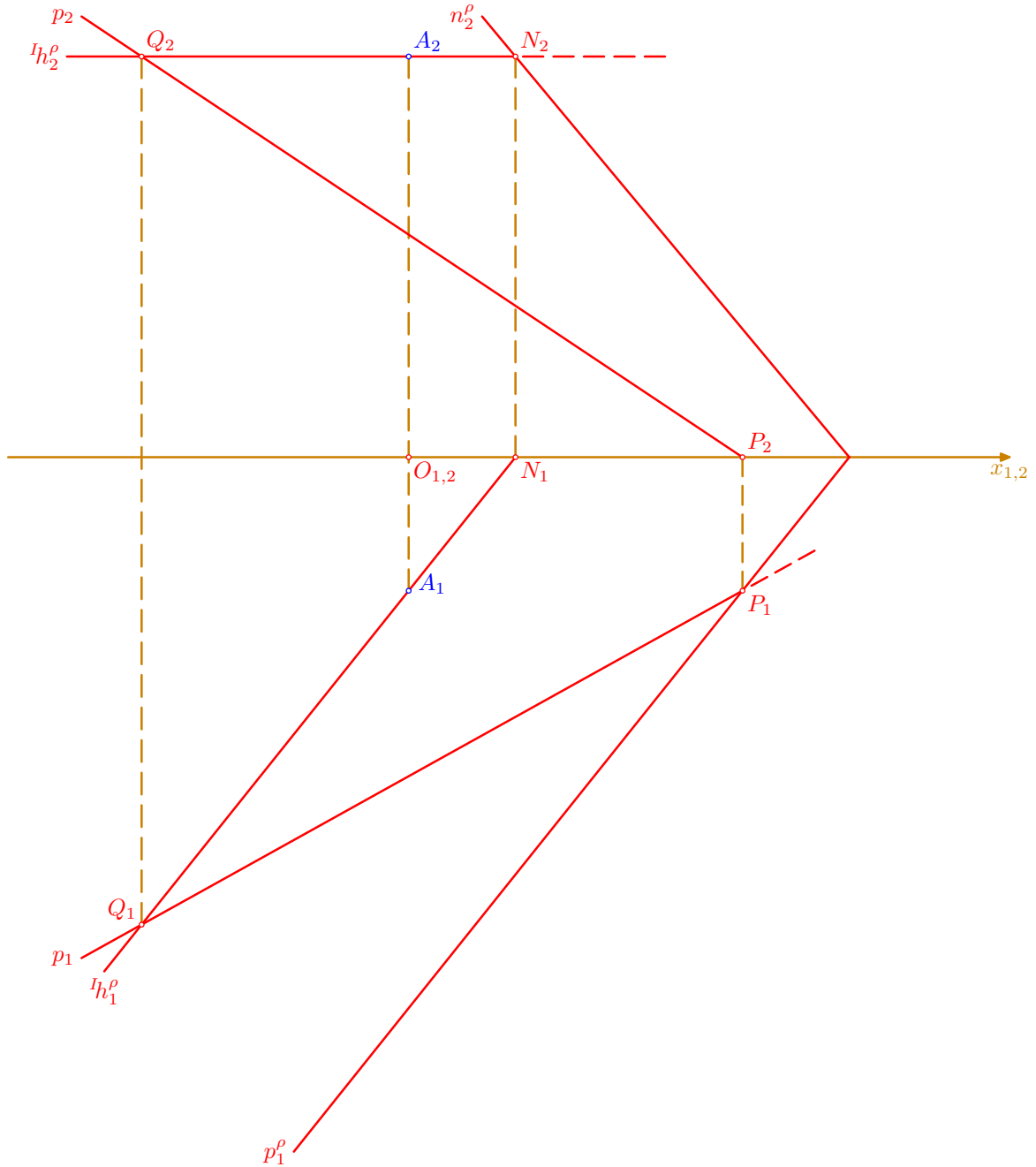
1. ρ ; $\rho = Ap$
2. $\square ABCD$; leží v ρ , má vrchol A a úhlopříčku BD na přímce p , jeho střed S je středem osmistěnu
3. q ; $S \in q$, $q \perp \rho$
4. E, F ; $E, F \in q$, $|ES| = |FS| = |AS|$
5. pravidelný osmistěn $ABCDEF$

Konstrukce

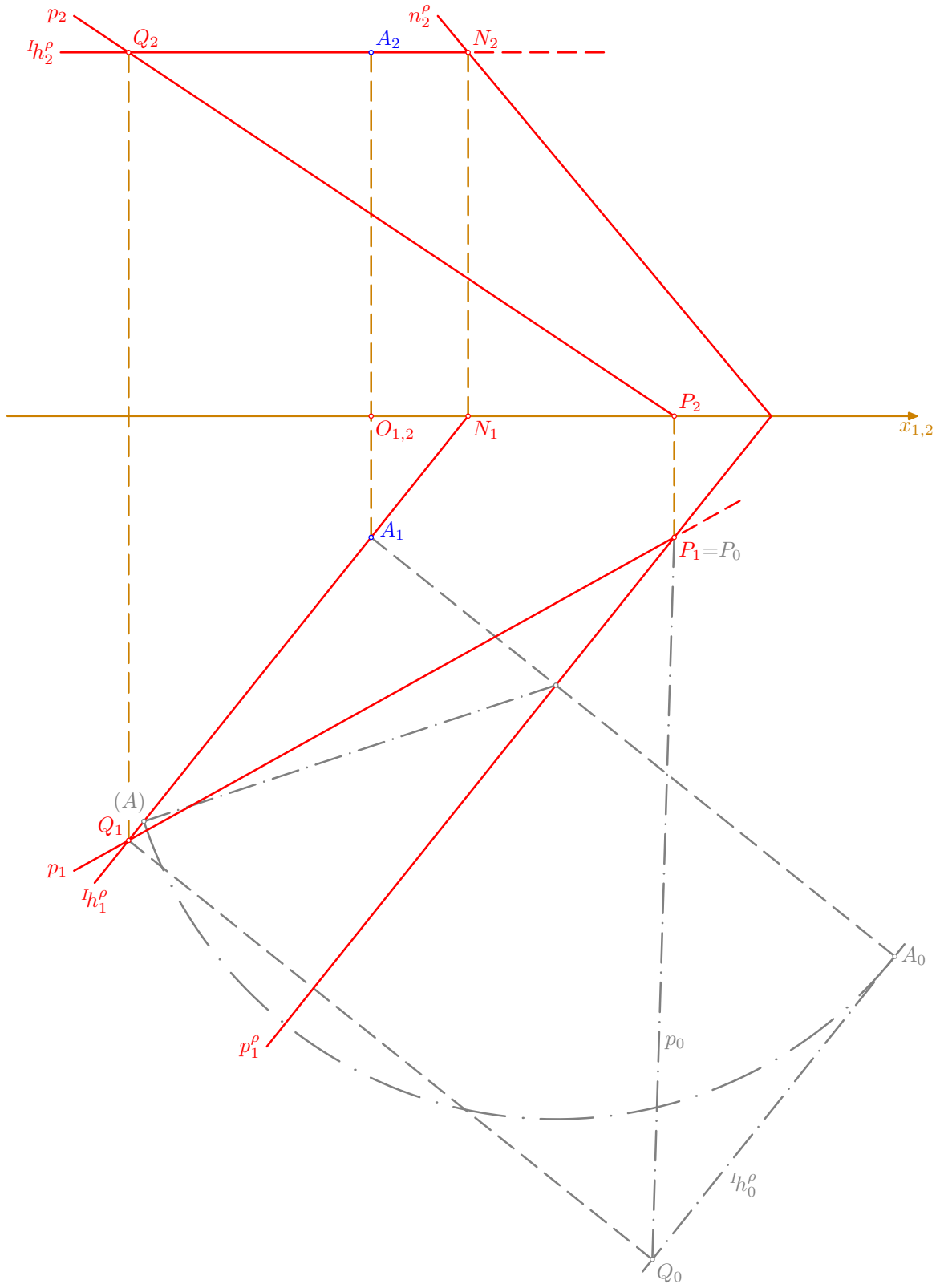
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, p_1=P_1Q_1, p_2=P_2Q_2$ bodu A a přímky $p=PQ$



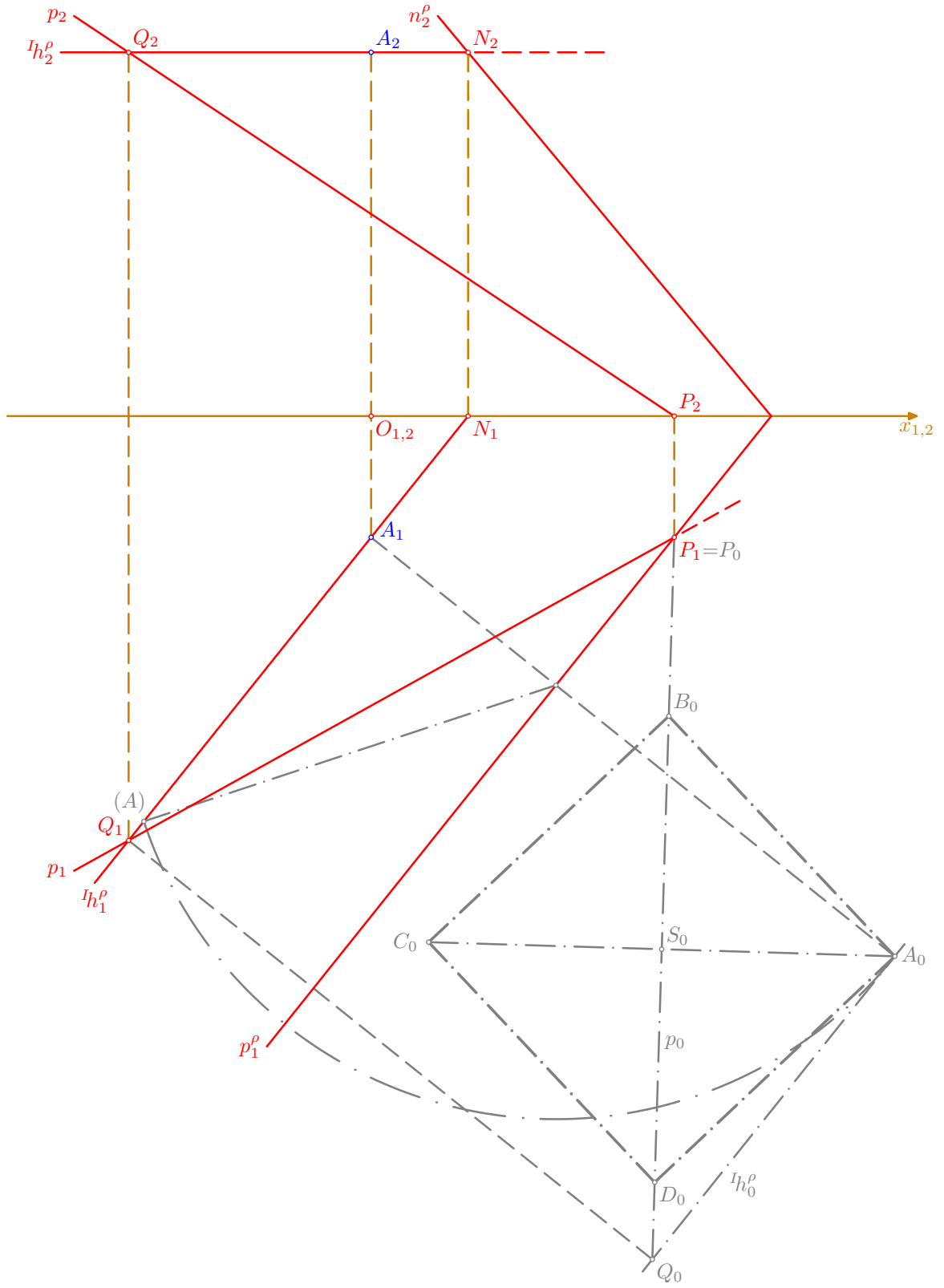
- ze zadání bodů A, Q ($z_A=z_Q=6$) vyplývá, že přímka ${}^I h^\rho=AQ$ je hlavní přímkou I. osnovy roviny $\rho=Ap$; pro její půdorysnou stopu p^ρ tudíž platí $p_1^\rho \parallel {}^I h_1^\rho, P_1 \in p_1^\rho$; nárysná stopa n^ρ prochází nárysným stopníkem N hlavní přímky ${}^I h^\rho$ ($N_1={}^I h_1^\rho \cap x, N_2$ leží na ordinále a na přímce ${}^I h_2^\rho$) a protíná se s půdorysnou stopou na ose x



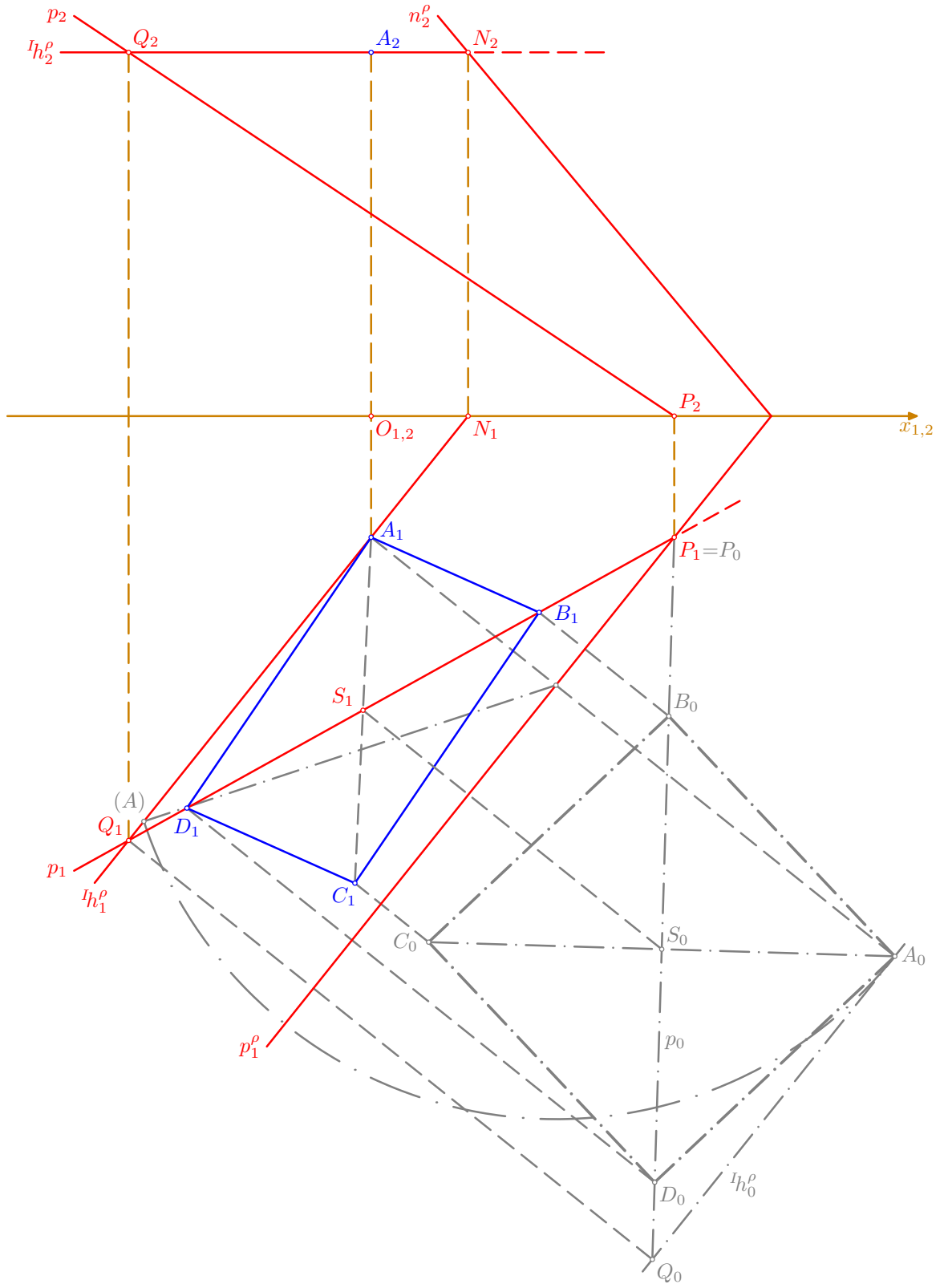
- sestrojme otočené polohy $A_0, p_0=P_0Q_0$ bodu A a přímky $p=PQ$ ležících v rovině ρ (otáčíme kolem stopy p^ρ do půdorysny π); bod A je otočen ve sklopení půdorysně promítací roviny příslušné spádové přímky, bod $P \in \pi$ zůstává při otáčení na místě (tj. $P_0=P_1$) a poloměr otáčení bodu Q je stejný jako u bodu A (je tudíž přímka $h_0^\rho=A_0Q_0$ rovnoběžná se stopou p_1^ρ a body Q_1, A_1, A_0, Q_0 tvoří obdélník)



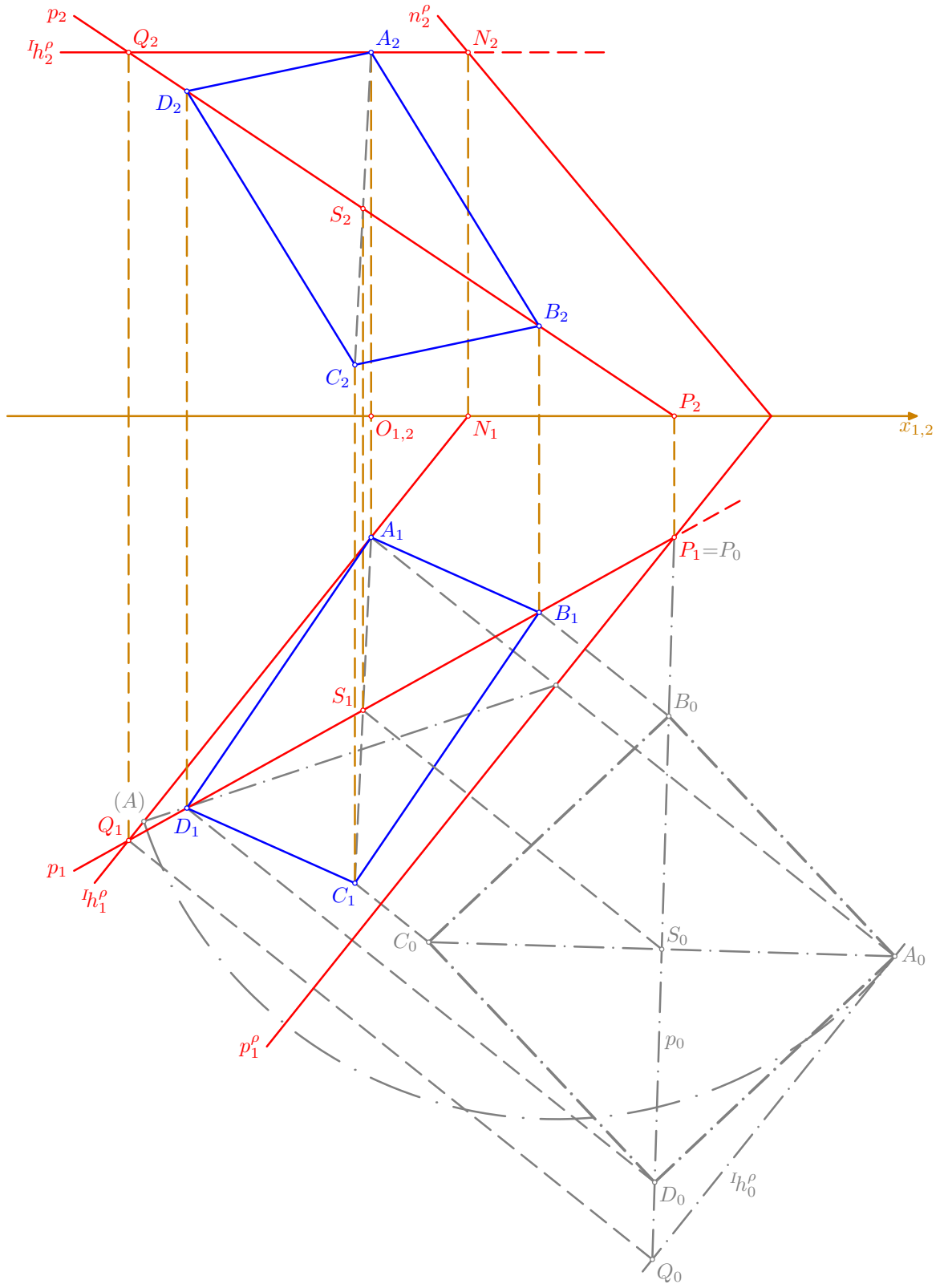
- v otočení je sestaven čtverec $A_0B_0C_0D_0$, který má vrchol v bodě A_0 a jehož úhlopříčka B_0D_0 (a tedy i střed S_0) leží na přímce $p_0=P_0Q_0$; úloha má jediné řešení (útvary v otočení je zvykem podobně jako ve sklopení rýsovat *čerchovaně*)



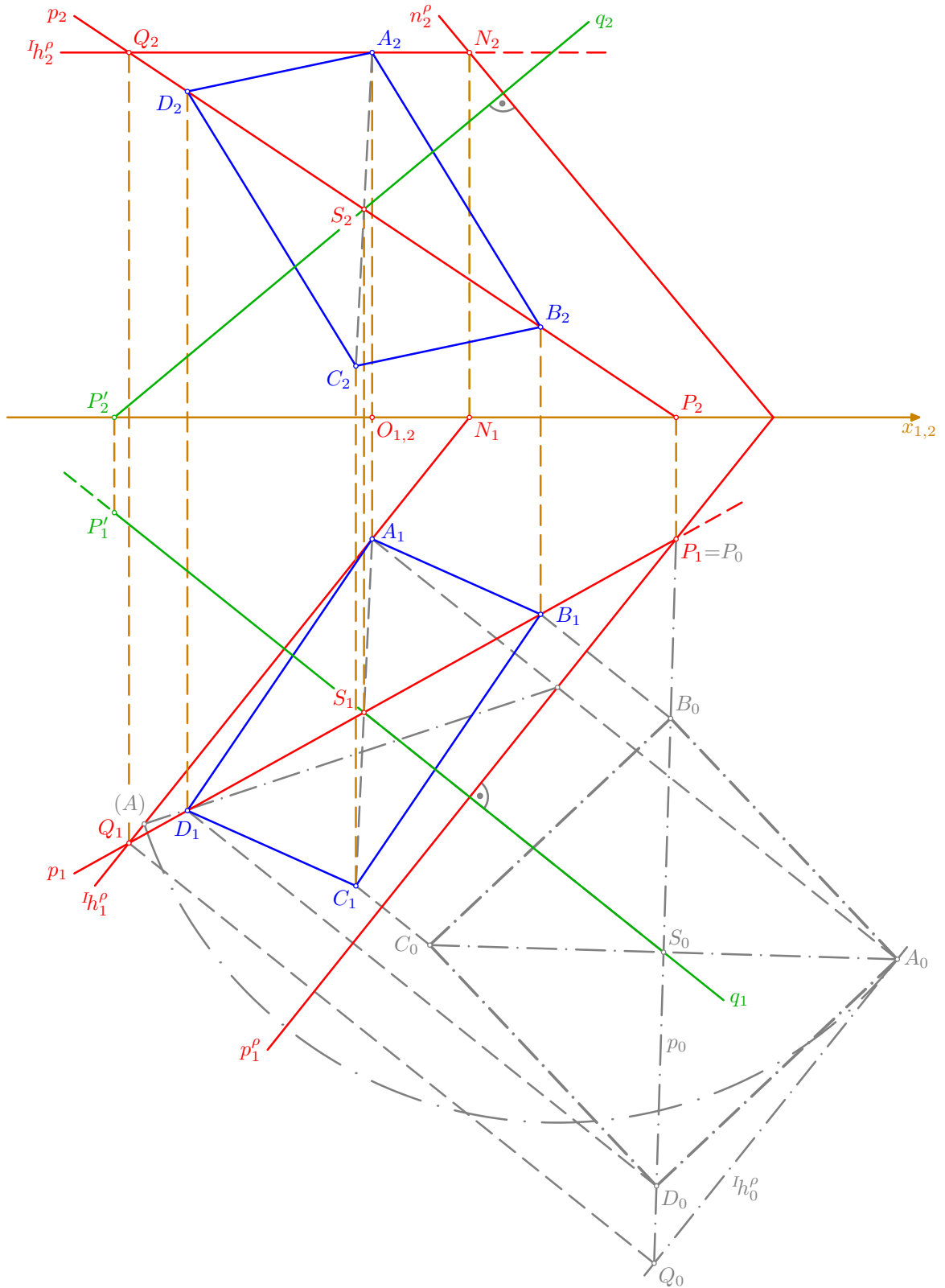
- z otočení se vraťme do půdorysu; funguje zde *pravoúhlá osová afinita*, jejíž osou je stopa p_1^p a v níž si odpovídají např. body A_0 a A_1 ; její užití je při ručním rýsování ovšem často dosti nepřesné, proto se jí budeme snažit vyhnout; půdorysy B_1, S_1, D_1 bodů $B, S, D \in p$ najdeme snadno na přímce p_1 a na kolmicích vedených ke stopě p_1^p body B_0, S_0, D_0 ; bod C_1 je středově souměrný s bodem A_1 podle bodu S_1 (tím také zajistíme, že nám v průmětu určitě vyjde rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$ o středu v bodě S_1); pro zajímavost zkontrolujme přesnost rýsování – úsečka C_1C_0 by měla být kolmá ke stopě p_1^p a přímky A_0C_0 a A_1C_1 by se měly protínat v samodružném bodě na ose p_1^p afinity



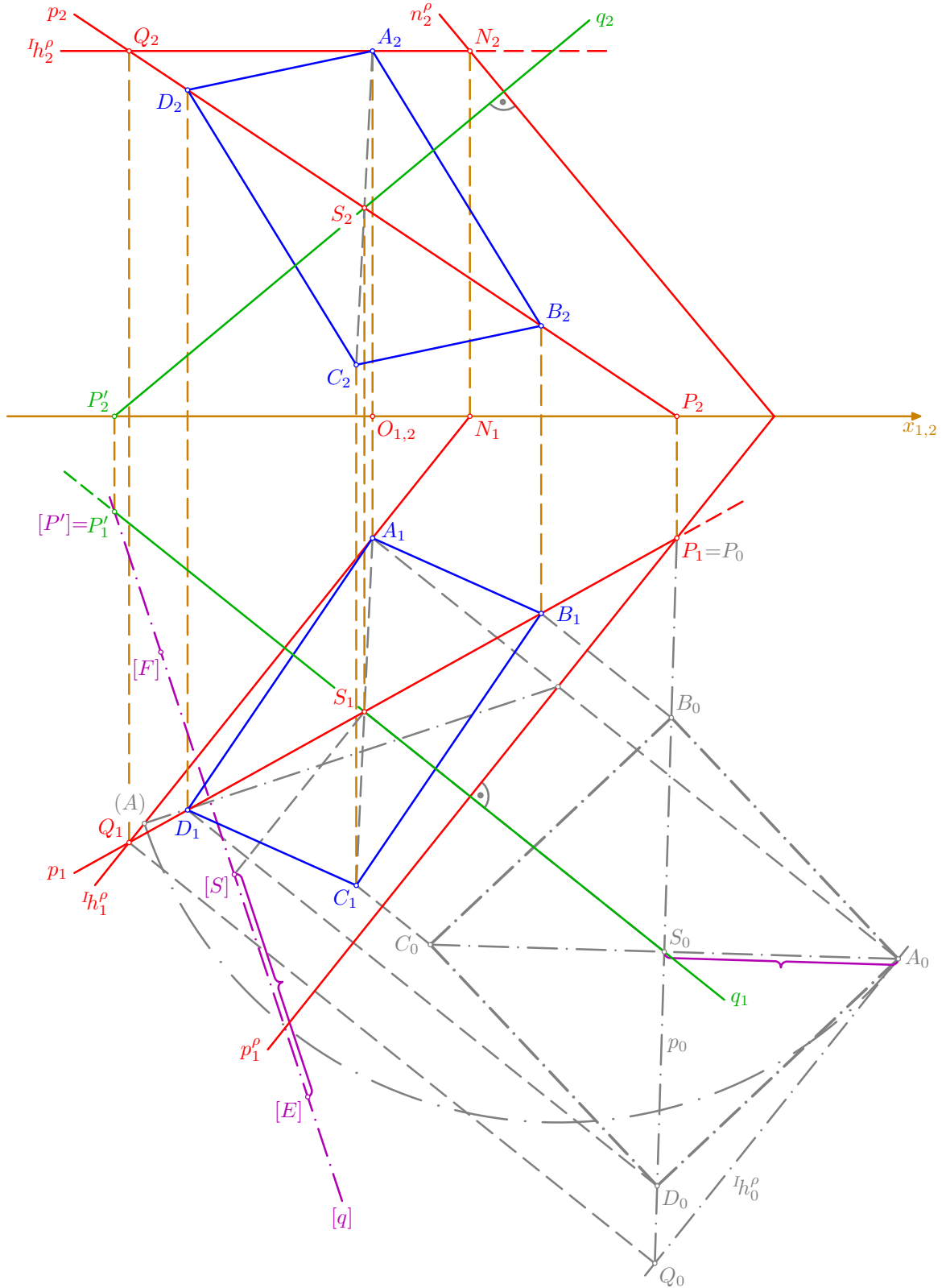
- po ordinálách vytáhneme nahoru nárysy bodů B_2, S_2, D_2 na přímkou p_2 , bod C_2 je opět souměrný s A_2 podle S_2 (nárysem čtverce $ABCD$ je tedy opět rovnoběžník); tím jsme dokončili nejnáročnější část celého postupu řešení, z hlediska prostorového principu máme sestrojeny čtyři vrcholy A, B, C, D hledaného osmistěnu (splnily jsme tedy krok číslo 2) a zbývá nám doplnit vrcholy E, F



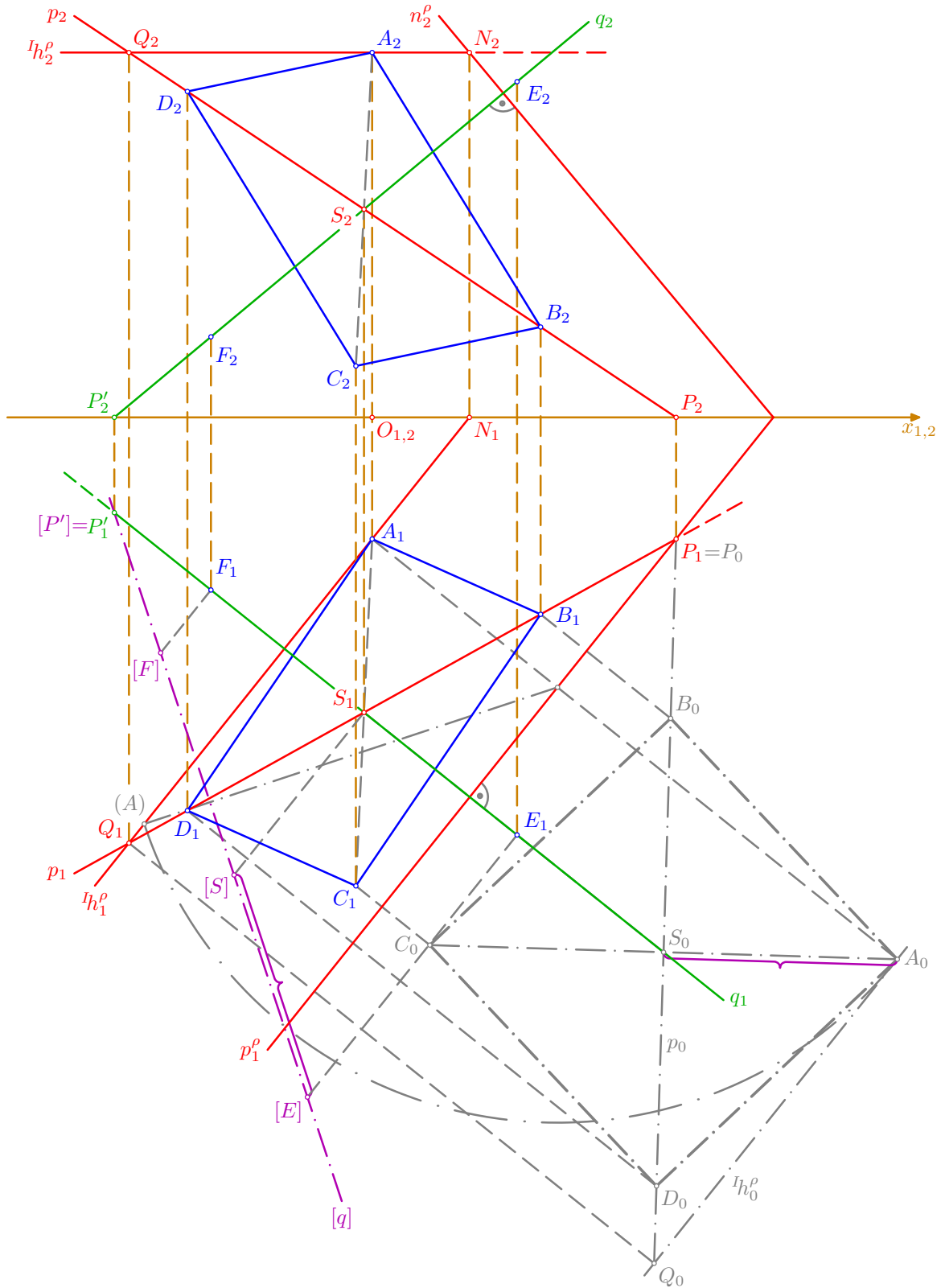
- středem S čtverce $ABCD$ vedeme přímkou $q \perp \rho$: pro její půdorys platí $q_1 \perp p_1^{\rho}$, $S_1 \in q_1$ (je tedy také $S_0 \in q_1$), podobně v nárýsu je $q_2 \perp n_2^{\rho}$, $S_2 \in q_2$; pro další konstrukci bude ještě užitečné sestavit půdorysný stopník P' přímky q : $P_2' = q_2 \cap x$ a půdorys P_1' leží na ordinále a na přímce q_1



- dále sklopme půdorysně promítací rovinu přímky q , abychom na její sklopené poloze $[q]$ mohli od bodu $[S]$ nanést skutečnou velikost úsečky AS (odměříme ji v otočení, $|AS|=|A_0S_0|$) a získat tak sklopené polohy $[E], [F]$ zbývajících vrcholů $E, F \in q$; pro sklopenou polohu $[S]$ bodu S platí $|[S]S_1| = z_S = |S_2x|$, dále je $[q] = [P'] [S]$ (kde $[P'] = P'_1$) a $[E], [F] \in [q]$, $|[E][S]| = |[F][S]| = |A_0S_0|$

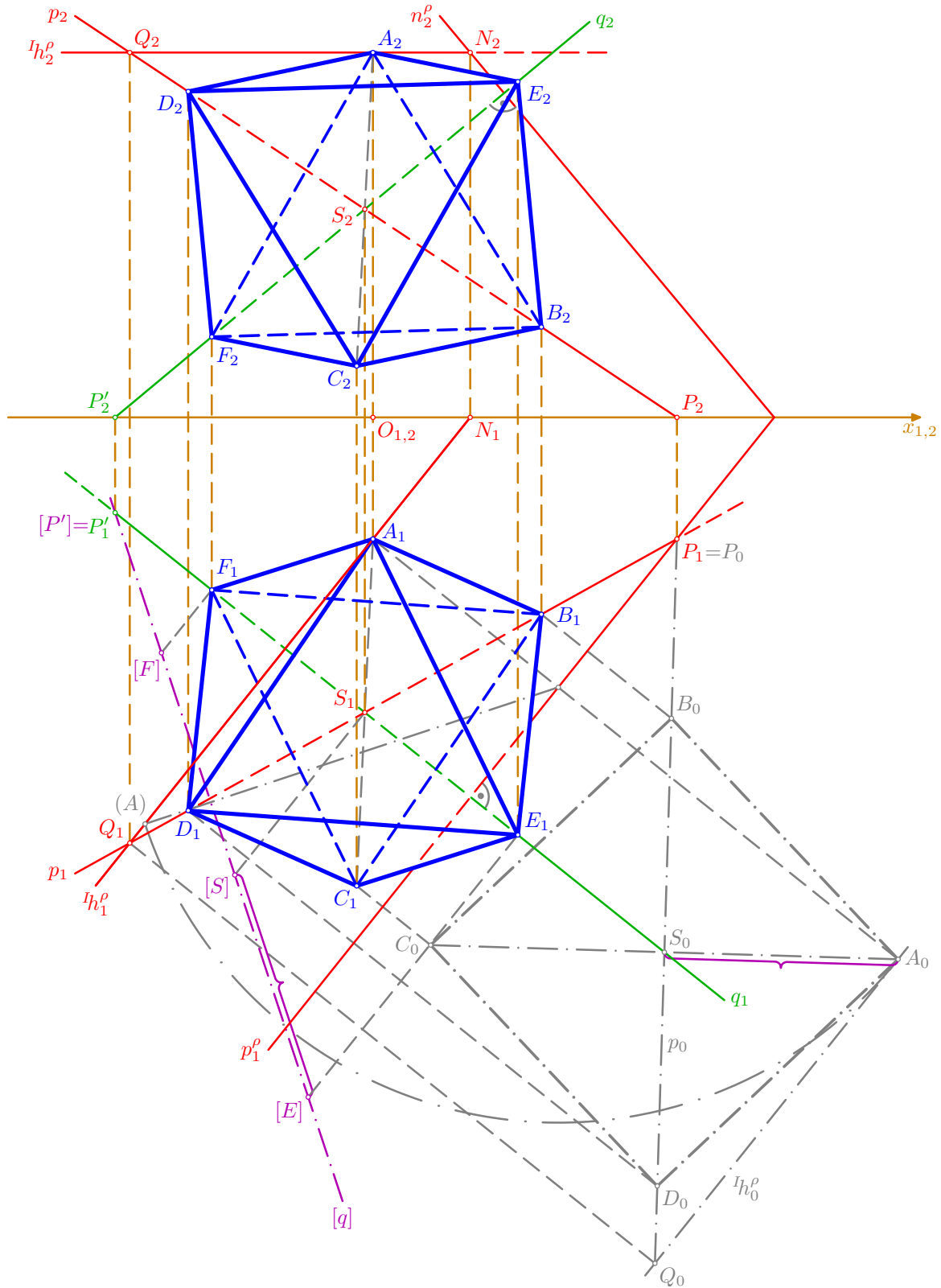


- vraťme body E, F ze sklopených poloh $[E], [F]$ po kolmicích do půdorysů E_1, F_1 na přímce q_1 a z nich po ordinálách vytáhněme nahoru nárysy E_2, F_2 na přímku q_2 ; tím máme sestrojeny sdružené průměty všech vrcholů hledaného pravidelného osmistěnu, který má jeden daný vrchol A a jehož úhlopříčka BD leží vskutku na dané přímce $p = PQ$



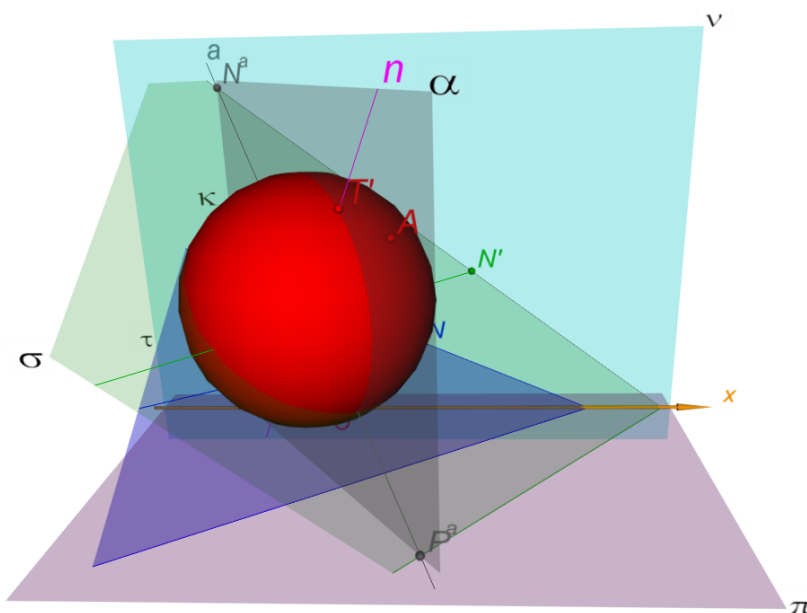
- na závěr doplníme zbývající hrany a určíme viditelnost v obou průmětech: v půdorysu vytáhneme obrysový rovnoběžník $A_1B_1E_1C_1D_1F_1$ a z nárýsu zjistíme, že vrcholy A, D, E leží výše než vrcholy B, C, F , strany $\triangle ADE$ budou tedy v půdorysu vidět, naopak půdorysy stran $\triangle BCF$ vytáhneme čárkovaně; podobně je v nárýsu obrysovým rovnoběžníkem šestiúhelník $A_2E_2B_2C_2F_2D_2$ a neviditelné jsou strany, které leží ve stěně ABF (vrcholy A, B, F leží k nárýsně blíže než ostatní vrcholy C, D, E)

Poznamenejme ještě na okraj, že uvedenou úlohu lze prostorově řešit také jinak: mohli bychom vést bodem A rovinu $\sigma \perp p$, najít střed $S = p \cap \sigma$ osmistěnu, dále v rovině σ sestrojít čtverec $AECF$ o středu S a vrcholu A , a na závěr na přímce p doplnit vrcholy B, D ; laskavý čtenář si tento způsob řešení může důkladněji promyslet, případně vyrýsovat jako samostatné cvičení. . .



□

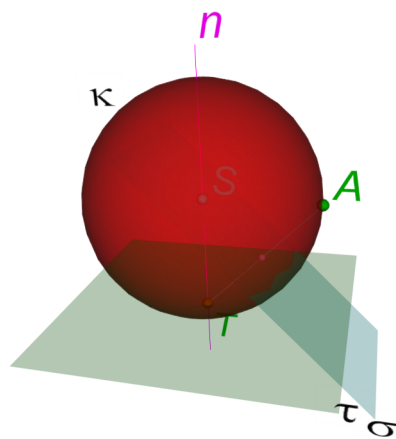
7.2. Kulová plocha



Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte kulovou plochu κ , je-li dán její bod A a tečná rovina τ s bodem dotyku T ; $A[2; 5; 6]$, $\tau(7; 5; 3)$, $T[-1; ?; 2]$.

Rozbor úlohy

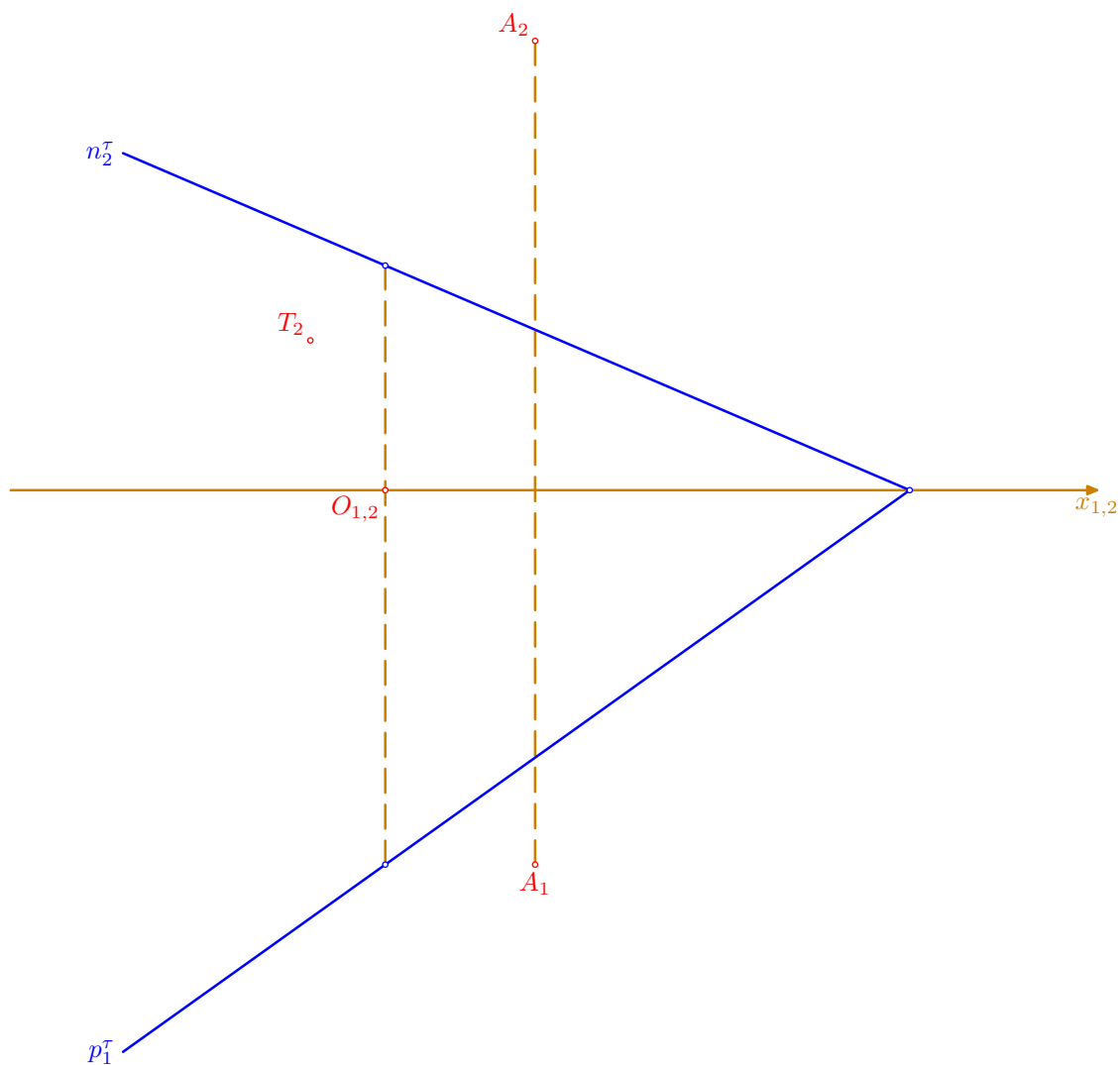


Prostorový princip řešení

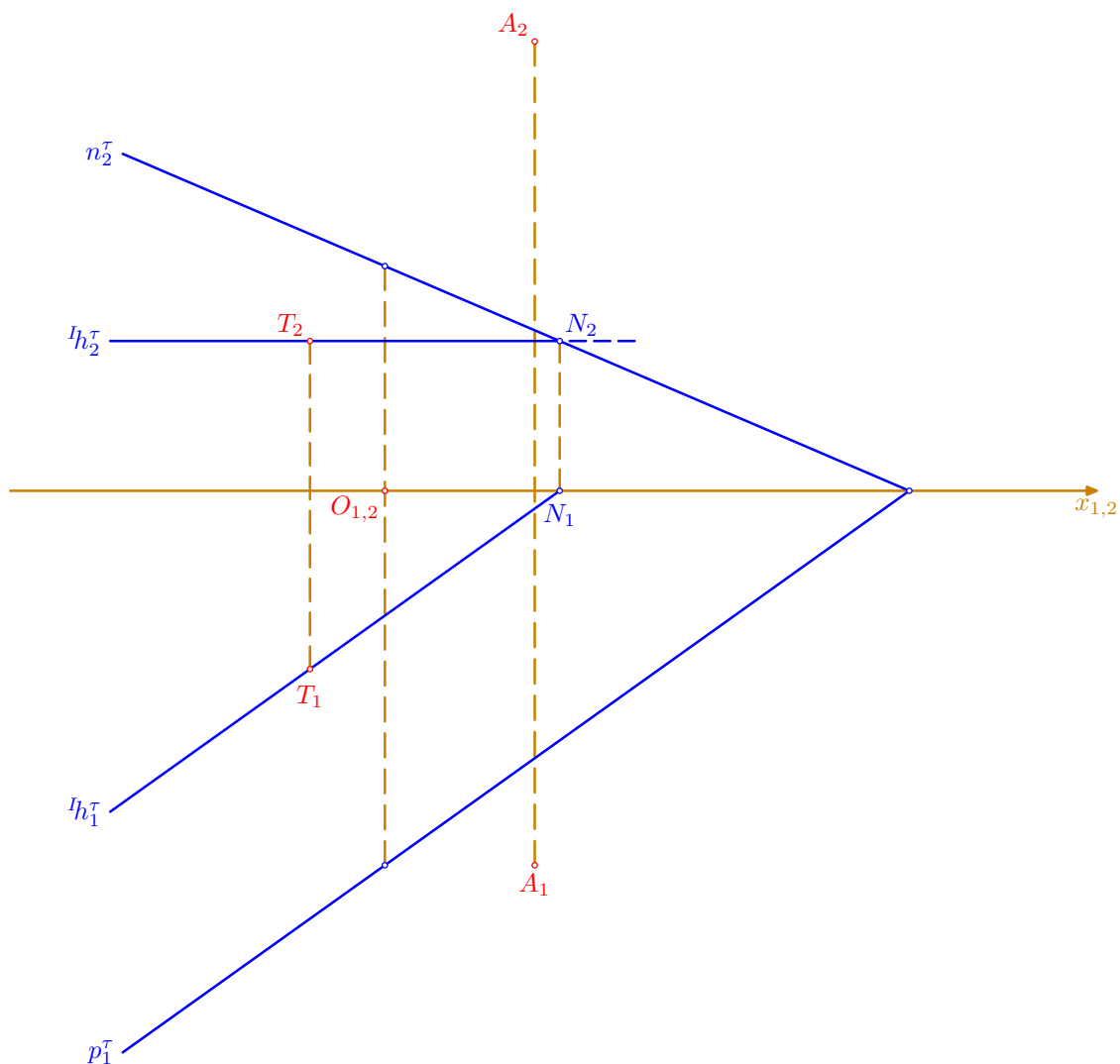
1. $n; n \perp \tau, T \in n$
2. σ ; tzv. **rovina souměrnosti úsečky** AT , $\sigma \perp AT, C \in \sigma$, kde bod C je střed úsečky AT
3. $S; S = n \cap \sigma$
4. $\kappa; \kappa(S, r = |ST| = |SA|)$

Konstrukce

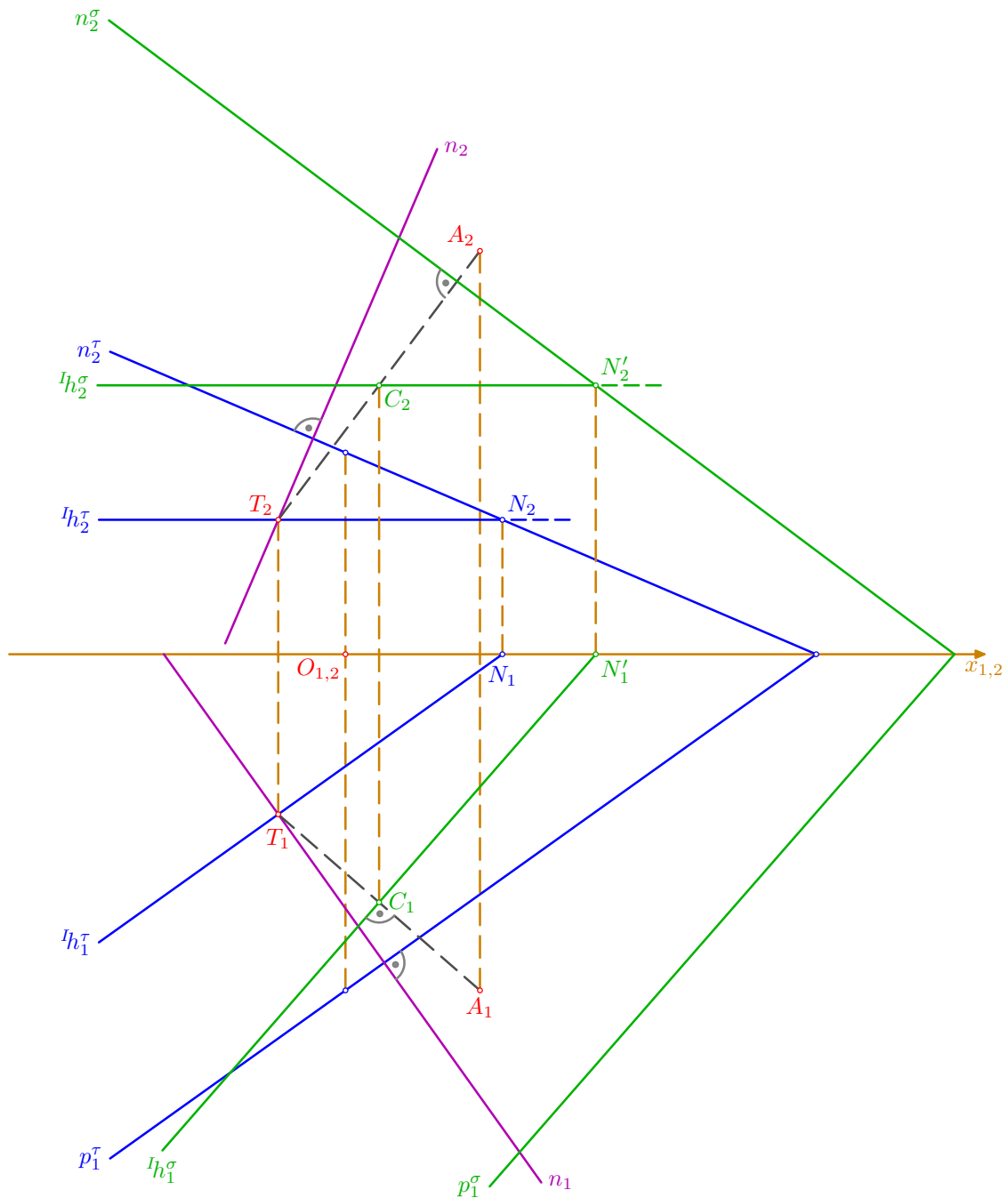
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1, A_2 bodu A , stopy p_1^τ, n_2^τ roviny τ a nárys T_2 bodu T



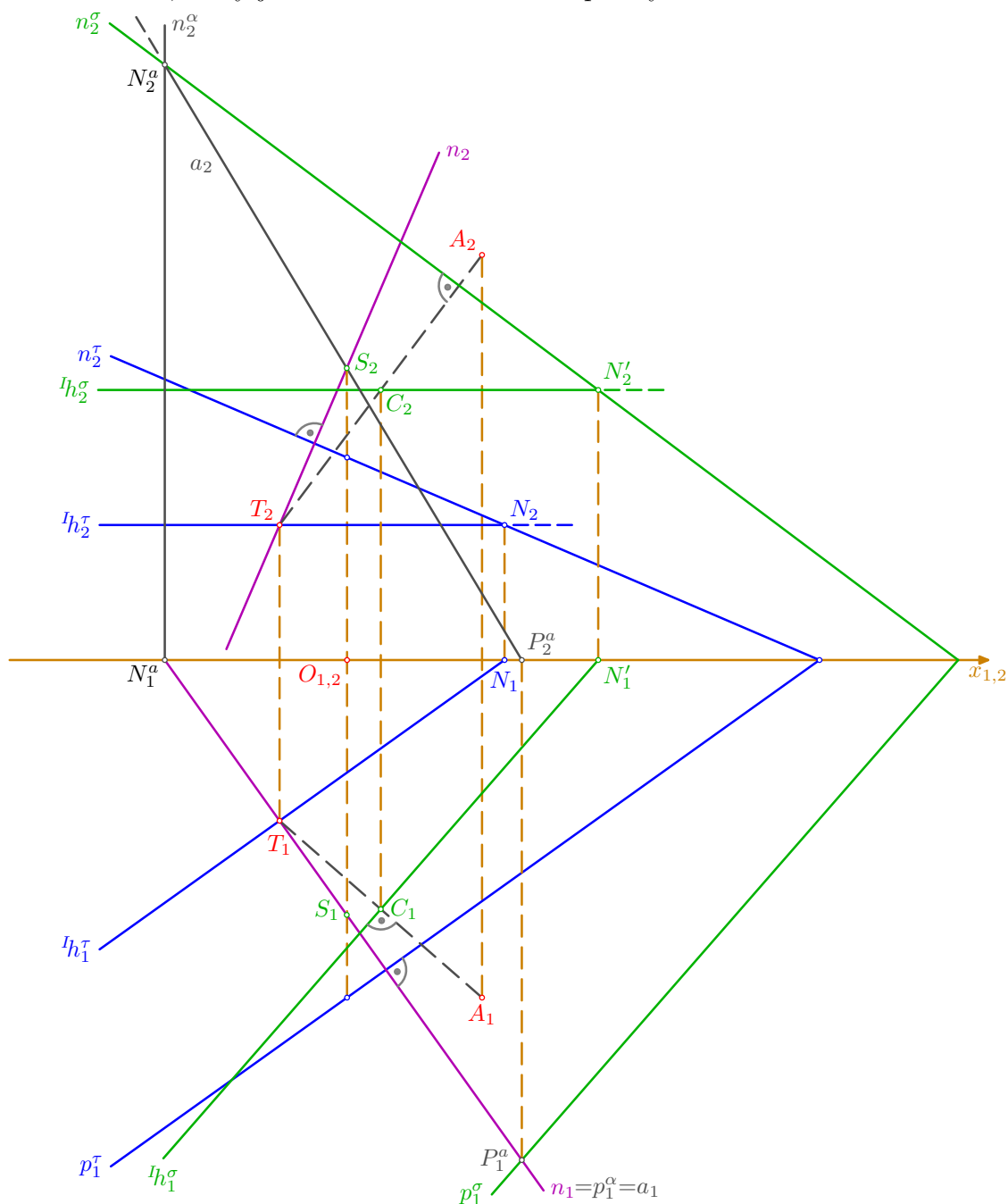
- pomocí hlavní přímky h^τ I. osnovy roviny τ a jejího nárysného stopníku N doplňme půdorys T_1 bodu $T \in \tau$: je $h_2^\tau \parallel x, T_2 \in h_2^\tau, N_2 = h_2^\tau \cap n_2^\tau, N_1$ najdeme po ordinále na ose x , dále je $h_1^\tau \parallel p_1^\tau, N_1 \in h_1^\tau$, a T_1 leží na ordinále a na h_1^τ



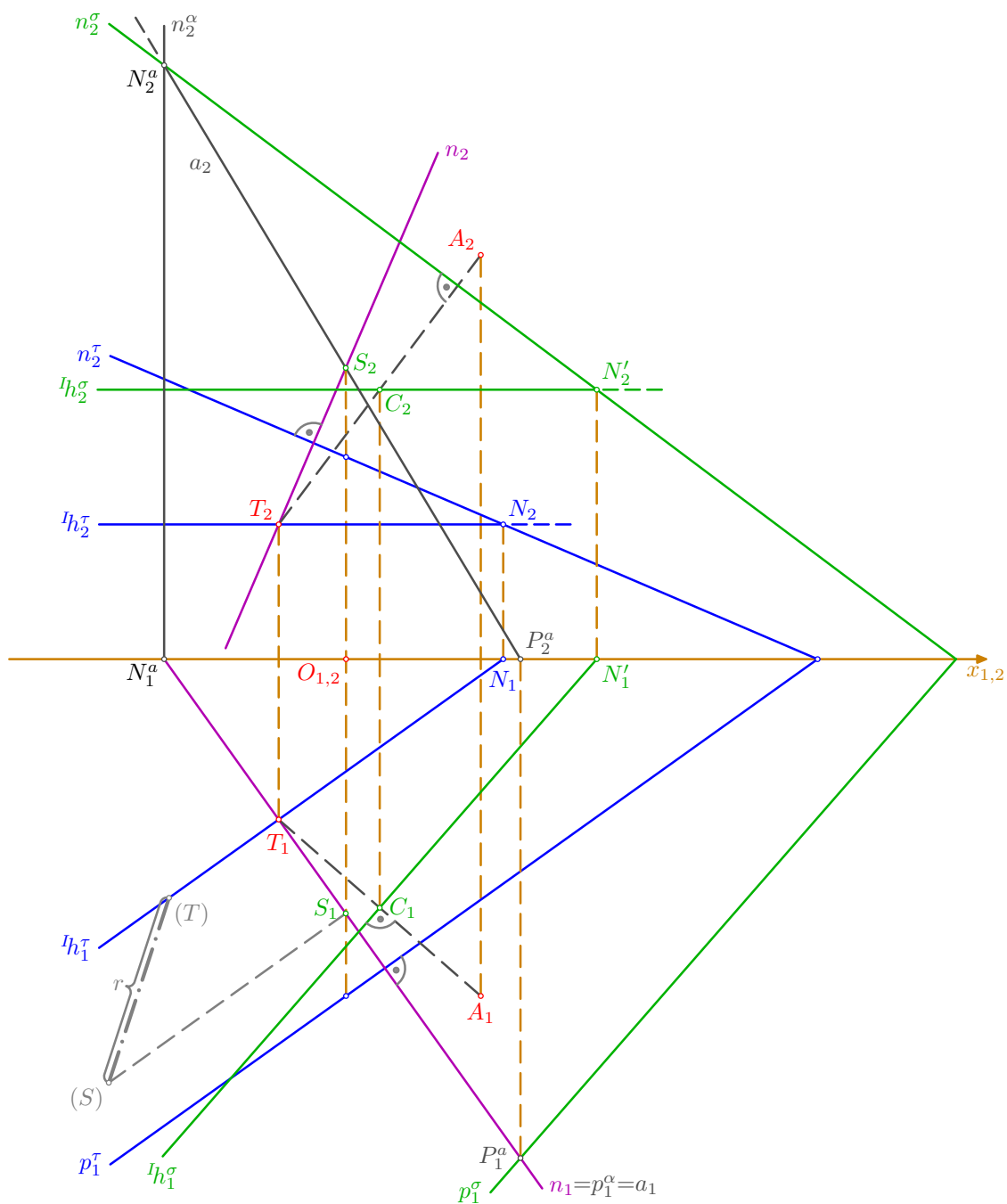
- středem C úsečky AT proložme rovinu $\sigma \perp AT$: průměty C_1, C_2 půlí úsečky A_1T_1, A_2T_2 ; pro konstrukci stop roviny σ uijeme hlavní přímku ${}^I h^\sigma$ I. osnovy a její nárysný stopník N' – v půdorysu je ${}^I h_1^\sigma \perp A_1T_1, C_1 \in {}^I h_1^\sigma$, v nárysu je ${}^I h_2^\sigma \parallel x, C_2 \in {}^I h_2^\sigma$, dále je $N'_1 = {}^I h_1^\sigma \cap x$ a nárys N'_2 najdeme na ordinále a přímce ${}^I h_2^\sigma$; bodem N'_2 pak prochází nárysná stopa $n_2^\sigma \perp A_2T_2$ a půdorysná $p_1^\sigma \parallel {}^I h_1^\sigma$ se s ní protíná na ose x



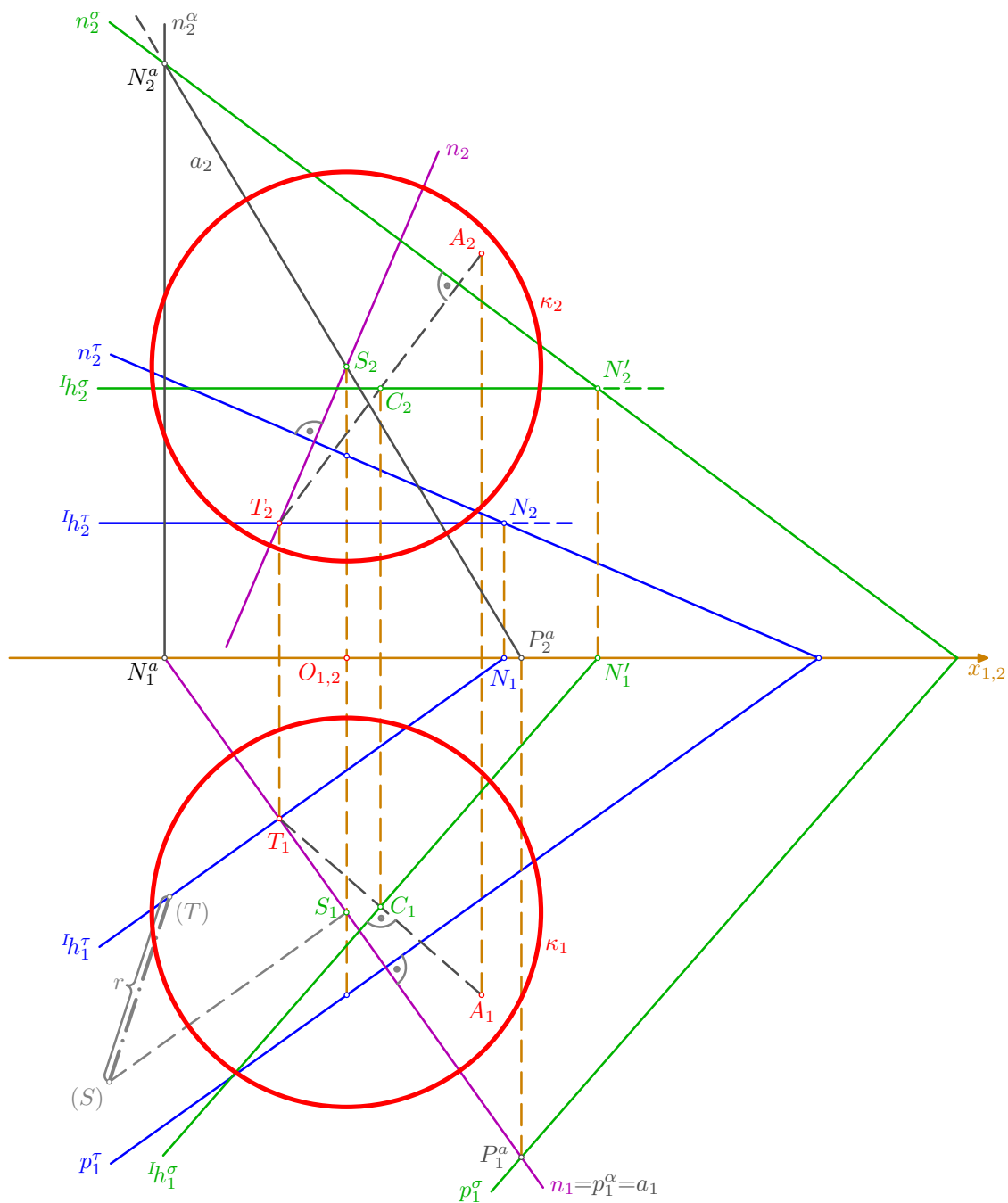
- sestrojme bod $S=n\cap\sigma$: přímkou n proložme pomocnou rovinu $\alpha \perp \pi$, je tedy $p_1^\alpha = \alpha_1 = n_1$ a nárysná stopa $n_2^\alpha \perp x$ se s půdorysnou stopou protíná na ose x ; sestrojme průsečnici $a=P^\alpha N^a$ rovin α a $\sigma - P_1^a = p_1^\alpha \cap p_1^\sigma$ a nárys P_2^a leží na ordinále a na ose x , podobně je $N_2^a = n_2^\alpha \cap n_2^\sigma$ a půdorys N_1^a leží opět na ordinále a na ose x (průsečík stop roviny α); pak je v půdorysu $a_1 = P_1^a N_1^a = n_1$ (princip krycí přímky), v nárysu $a_2 = P_2^a N_2^a$ a zde najdeme $S_2 = a_2 \cap n_2$, do půdorysu odvodíme S_1 po ordinále na přímkou $n_1 = a_1$; tím jsme našli bod $S = n \cap \sigma$, který je středem hledané kulové plochy



- poloměr r zjistíme jako velikost úsečky ST , konkrétně sklopením roviny α do půdorysny; ve sklopení je pak $r=(S)(T)$

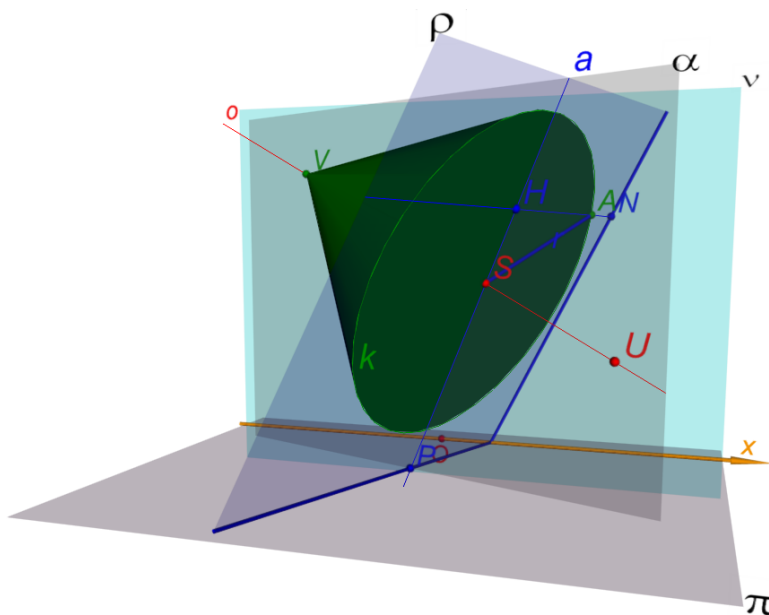


- půdorysem i nárysem kulové plochy κ jsou kruhy κ_1, κ_2 o středech S_1, S_2 a poloměru r ; v průmětech není vyřešena vzájemná viditelnost jednotlivých útvarů



□

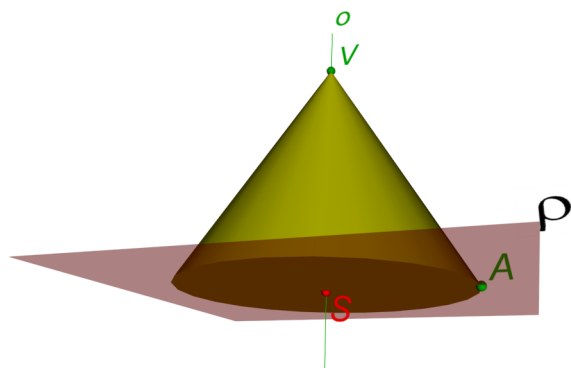
7.3. Rotační kužel



Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte rotační kužel, je-li dána jeho osa $o=UV$, vrchol V a bod A na podstavné hraně; $U[5; 5; 3]$, $V[-3; 2; 7]$, $A[4; 1; 6]$.

Rozbor úlohy

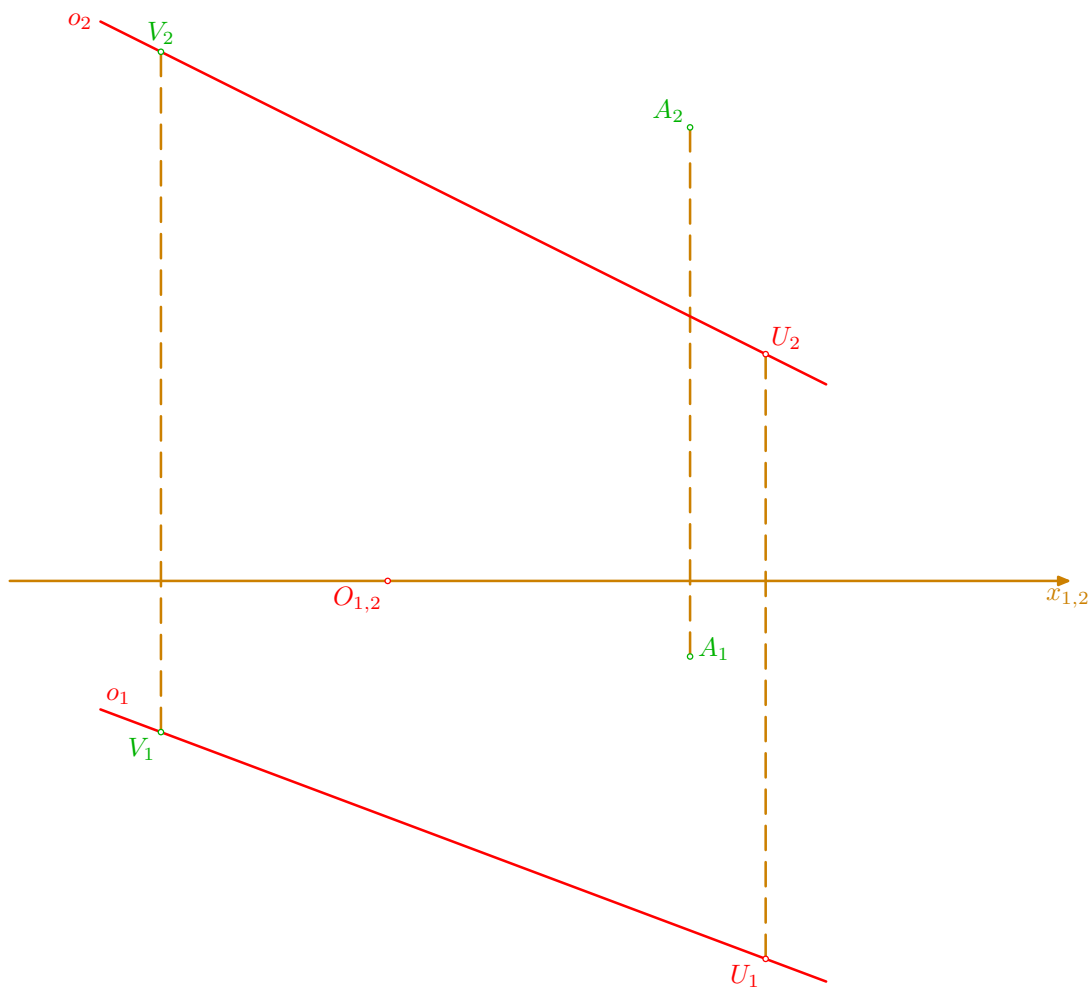


Prostorový princip řešení

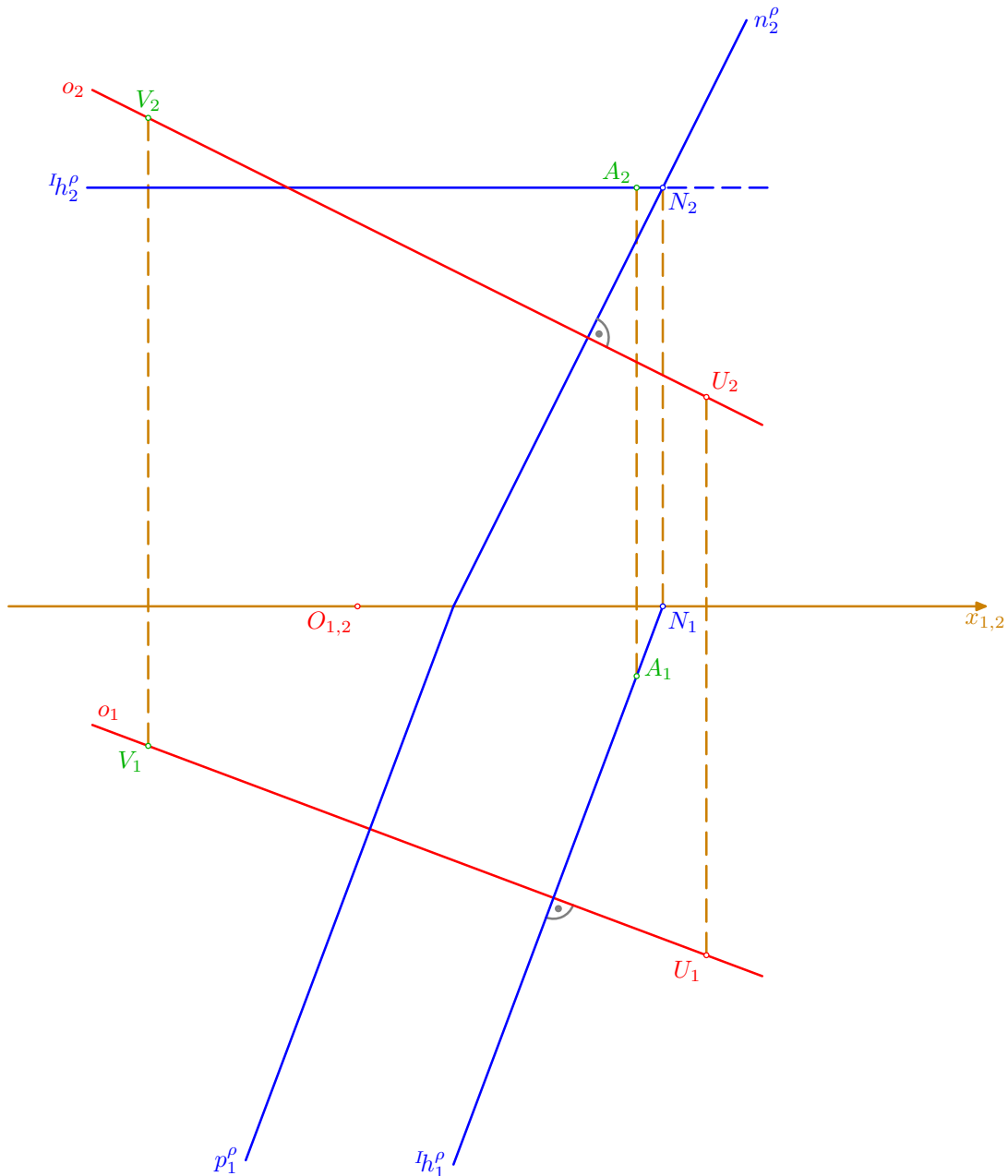
1. $\rho; \rho \perp o, A \in \rho$
2. $S; S = \rho \cap o$
3. k ; kružnice $k(S, r = |SA|)$ v rovině ρ
4. rotační kužel

Konstrukce

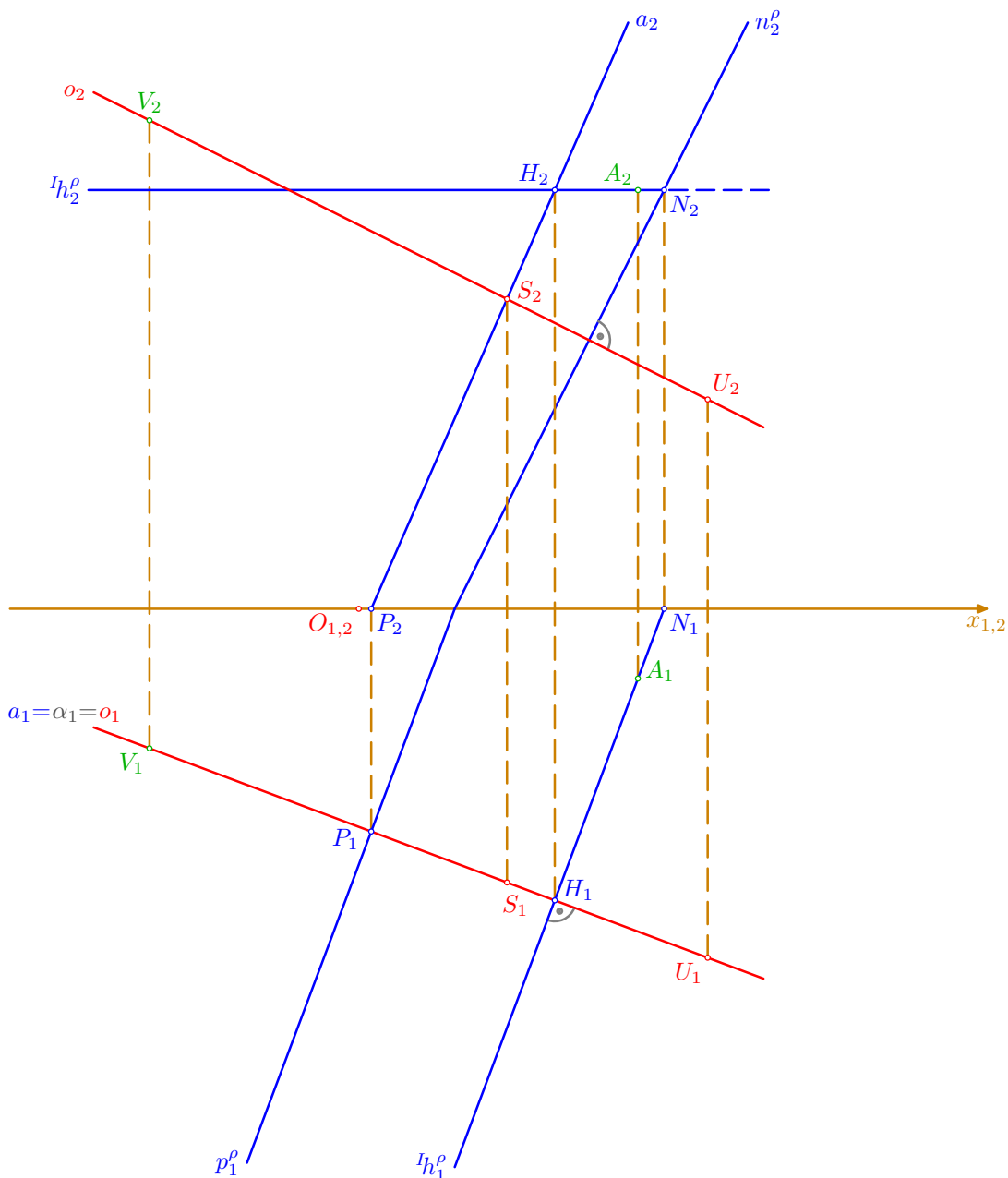
- podle zadání sestrojme sdružené průměty $A_1, A_2, o_1=U_1V_1, o_2=U_2V_2$ bodu A , osy $o=UV$ a vrcholu $V \in o$



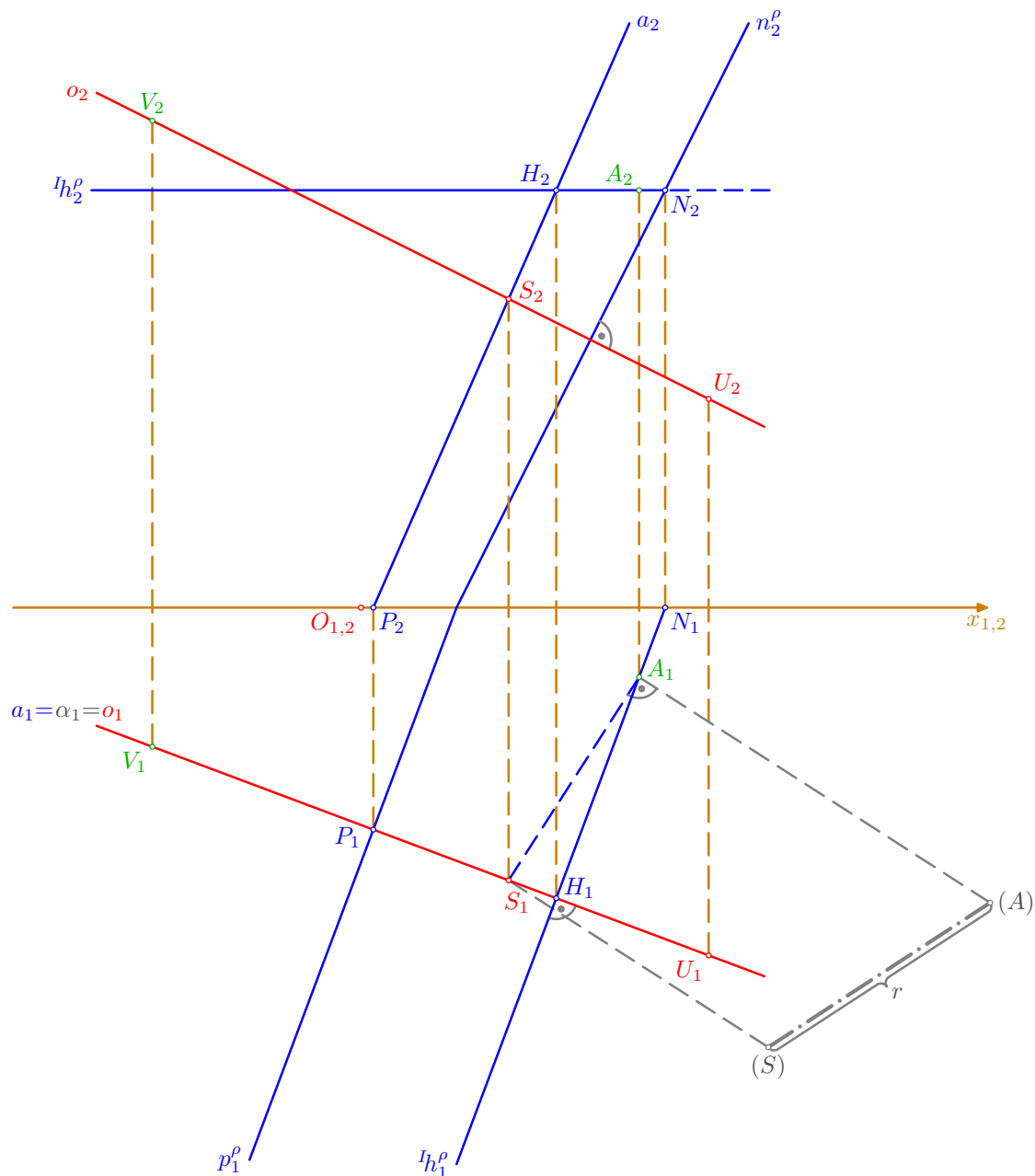
- pomocí hlavní přímky ${}^I h^\rho$ I. osnovy a jejího nárysného stopníku N sestrojíme stopy roviny $\rho \perp o$, $A \in \rho$: ${}^I h_1^\rho \perp o_1$, $A_1 \in {}^I h_1^\rho$, ${}^I h_2^\rho \parallel x$, $A_2 \in {}^I h_2^\rho$, dále je půdorys $N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$ a nárys N_2 leží na ordinále a na přímce ${}^I h_2^\rho$; bodem N_2 pak prochází nárysná stopa $n_2^\rho \perp o_2$ a půdorysná $p_1^\rho \parallel {}^I h_1^\rho$ (nebo $p_1^\rho \perp o_1$) se s nárysnou stopou protíná na ose x



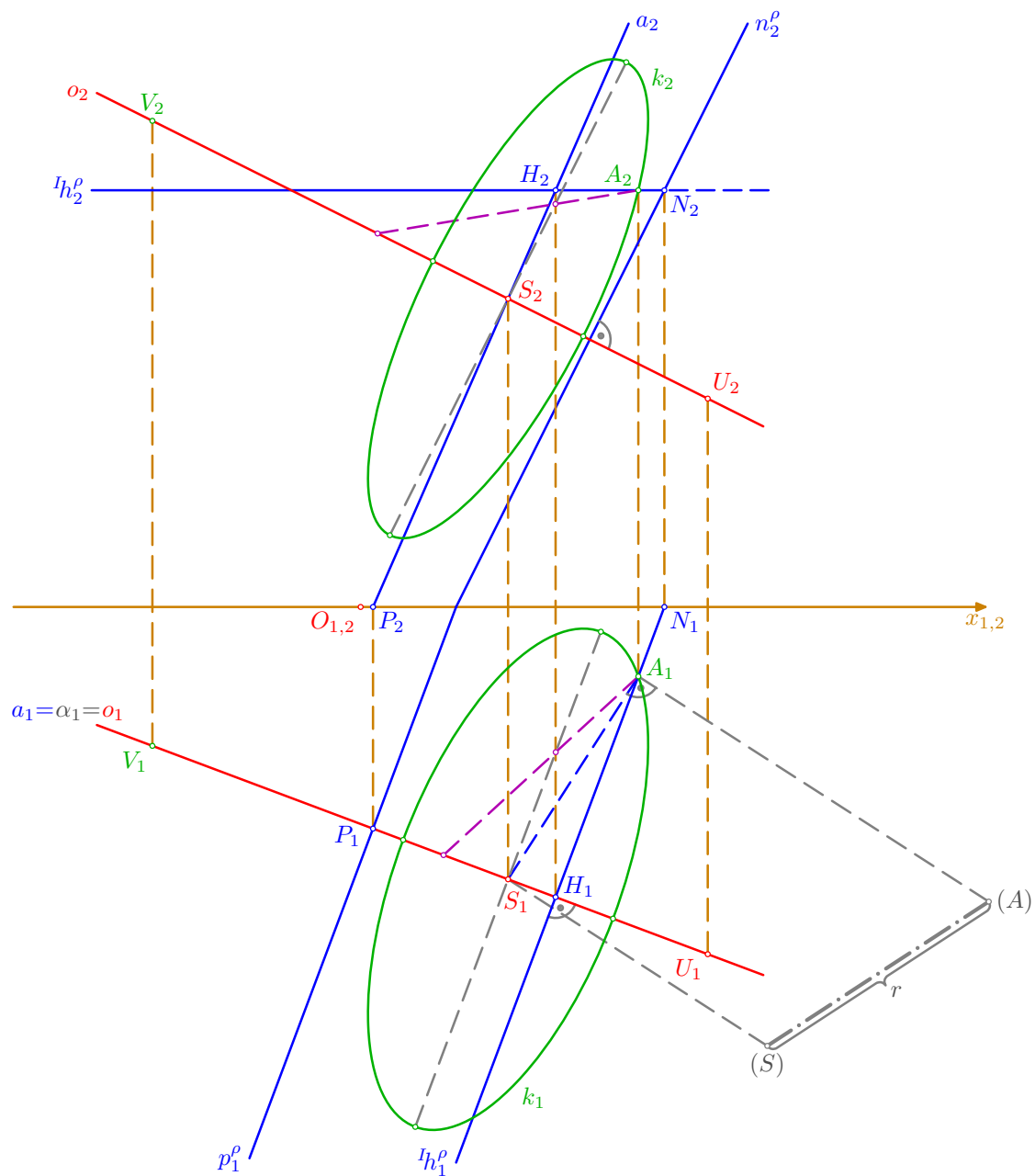
- najděme průsečík S osy o s rovinou ρ : přímkou o proložme pomocnou rovinu $\alpha \perp \pi$, tj. $\alpha_1 = o_1$, určíme její průsečíky P, H se stopou p^ρ a hlavní přímkou h^ρ , v průmětu je $P_1 = p_1^\rho \cap \alpha_1$ a $H_1 = h_1^\rho \cap \alpha_1$, nárys P_2 leží na ordinále a na ose x , nárys H_2 odvodíme po ordinále na přímku h_2^ρ ; nyní můžeme sestrojít sdružené průměty průsečnice $a = \alpha \cap \rho$ – pro půdorys je $a_1 = P_1 H_1 = \alpha_1 = o_1$ (krycí přímka) a pro nárys platí $a_2 = P_2 H_2$; v nárysu pak najdeme průsečík $S_2 = a_2 \cap o_2$ a po ordinále jej spustíme do půdorysu $S_1 \in o_1$; tím jsme sestrojili střed $S = o \cap \rho$ podstavy konstruovaného rotačního kuželu



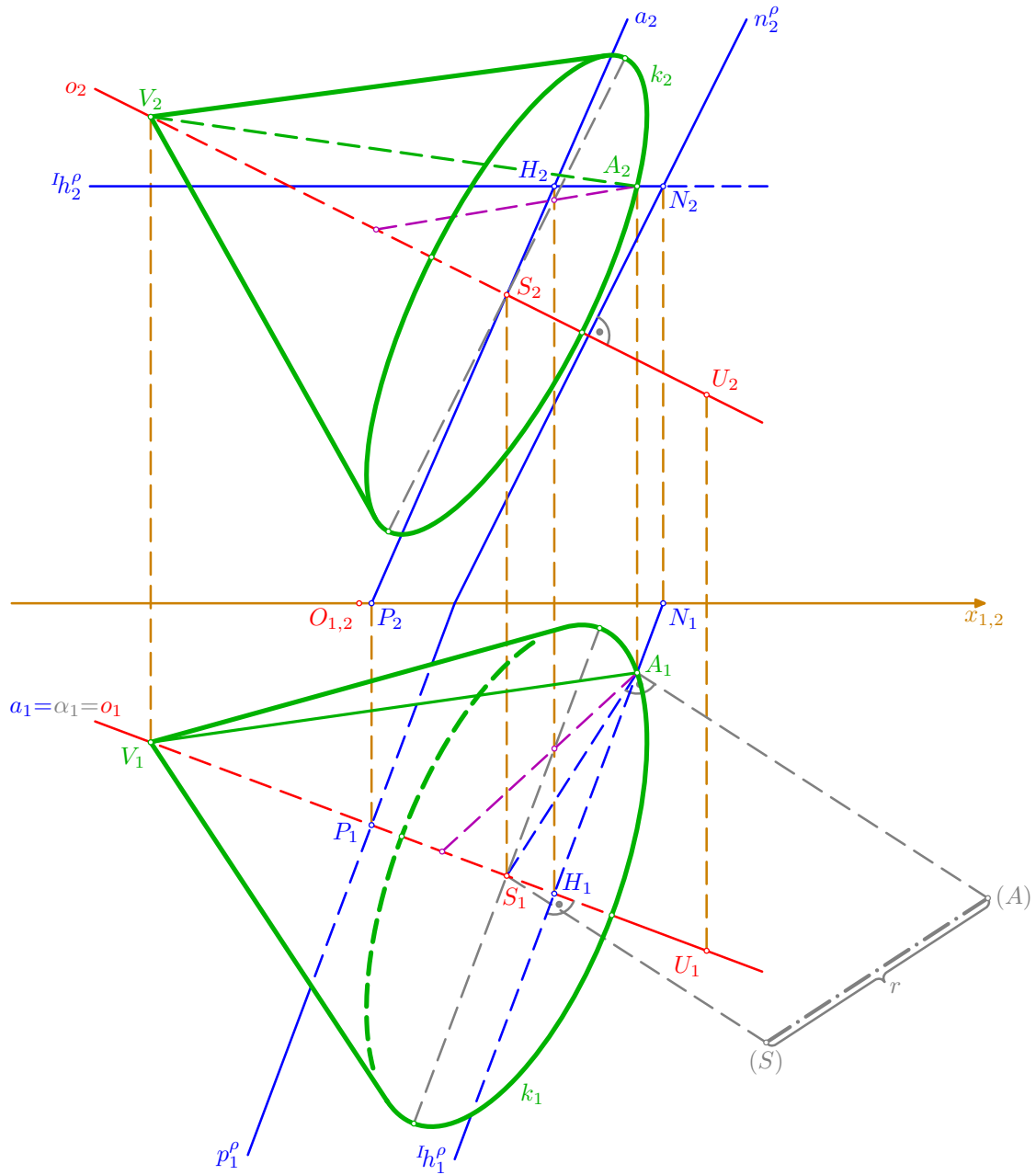
- ve sklopení půdorysně promítací roviny úsečky AS určíme její skutečnou délku: sestrojíme sklopené polohy (A) , (S) bodů A, S a zjistíme tím poloměr $r = |SA| = |(S)(A)|$ podstavy



- obvyklým způsobem zobrazíme sdružené průměty podstavné kružnice $k(S, r) \subseteq \rho$: hlavní vrcholy elipsy k_1 resp. k_2 leží ve vzdálenosti poloměru r na kolmici k přímce o_1 resp. o_2 vedené bodem S_1 resp. S_2 , ke konstrukci vedlejších vrcholů v obou průmětech uijeme **proužkové konstrukce** (v půdorysu je užito rozdílové, v narysu součtové varianty, více viz na straně 196) a sdružených průmětů A_1, A_2 bodu $A \in k$



- na závěr zbývá dokončit obrys kuželu v obou průmětech, tj. sestrojít tečny z bodů V_1, V_2 k elipsám k_1, k_2 , a určit viditelnost; obrysové tečny je možno sestrojít pomocí ohniskových vlastností elipsy (viz úloha *Tečny k elipse daným bodem* na straně 184) nebo užitím osové afinity – obě varianty jsou však dosti pracné a při ručním rýsování „háklivé“ na přesnost; proto je dostačující tzv. „inženýrská konstrukce“ tečny pouhým přiložením pravítka; vrchol V leží výše nad půdorysnou než střed S podstavy, a část podstavné kružnice je tudíž při pohledu shora skryta (část elipsy k_1 mezi body dotyku obrysových úseček je vyrýsována čárkovaně); naopak je střed S dále od nárýsny než vrchol V a v nárýsu je tedy vidět celá podstavná kružnice (celá elipsa k_2 je vytažena plnou čarou)



□

8. Úlohy k samostatnému řešení

Řešte v Mongeově promítání.

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož ramena leží v rovinách α, β a jehož základna AB leží na přímce $m = QR$.

$$\alpha(-6; 45^\circ; 75^\circ), \beta(6; 105^\circ; 135^\circ), Q[-3; 3,5; 3,5], R[3; 1; 3,5]$$

2. Stanovte paprsek tak, aby procházel bodem A a po odrazu na rovině ρ procházel bodem B .

$$A[-3; -1; 6], B[2; 1; 8], \rho(-5; 4; 3)$$

3. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s osou $o = MP$ a výškou v , je-li bod A vrcholem jeho podstavy; zobrazte pouze jedno ze dvou možných řešení.

$$M[-1; 4; 5], P[6; 1; 0], v = 7, A[-1; 5; 1]$$

4. Sestrojte pravidelný pětiboký jehlan $ABCDEV$ s podstavou o středu S a vrcholu A v rovině ρ , je-li jeho výška v rovna délce podstavné hrany.

$$\rho(-4; 7; 5), S[1; 4; ?], A[2; 2; ?]$$

5. Sestrojte pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ s podstavou o středu S v rovině ρ , jestliže jedna jeho boční stěna leží v půdorysně π .

$$\rho(8; 9; 7), S[-1; ?; 3]$$

6. Zobrazte rovnoběžnostěn, jehož tři stěny leží v rovinách ρ, σ a π a jeden jeho vrchol je v bodě A .

$$\rho(-6; 6; -9), \sigma(8; 6; -20), A[-0,5; 4; 7]$$

7. Sestrojte krychli $ABCDEFGH$ o hraně délky a , jejíž hrana AB leží na přímce $m = AP$ a vrchol D je v nárýsně ν ; úloha má celkem 8 řešení, zobrazte pouze jedno z nich.

$$A[4; 3; 4], P[-1; 6; 0], a = 5$$

8. Sestrojte pravidelný pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož jedna podstava o středu S leží v rovině ρ a bod A' je vrcholem druhé podstavy.

$$\rho(7; 8; 7), S[-1; ?; 4], A'[4; 5; 6]$$

9. Sestrojte kulovou plochu κ , která prochází body A, B a jejíž střed S leží na přímce $l = KL$.

$$A[3; 5; 1], B[-1; 7; 3], K[4; 3; 3], L[-5; 6; 7]$$

10. Sestrojte kulovou plochu κ , pro niž je dán střed S a tečná rovina τ .

$$S[0; 5; 6], \tau(-8; 4; 5)$$

11. Sestrojte kulovou plochu κ , jejíž střed S leží na přímce $p = MN$ a která se dotýká přímky $t = TQ$ v jejím bodě T .

$$M[-3; 5; 3], N[3; 5; 3], T[-2; 3; 5], Q[-5; 6; 2]$$

12. Sestrojte těleso, které vznikne rotací $\triangle ABC$ kolem jeho strany AB .

$$A[8; 11; 9], B[-6; 2; 2], C[4; 4; 5]$$

13. Sestrojte rovnostranný kužel s podstavou o středu S v rovině ρ , je-li dán bod A na jeho plášti.

$$\rho(-7; 4; 10), S[0; 2; ?], A[0; 5; 3]$$

14. Sestrojte rotační kužel, daný vrcholem V , středem S a poloměrem r podstavy.

$$V[-3; 8; 8], S[1,5; 4; 3,5], r = 3$$

15. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány středy S, S' jeho podstav a poloměr r .

$$S[2; 5; 4], S'[-3; 8; 8], r = 4$$

16. Sestrojte rotační válec výšky v , jehož podstavná kružnice $k(S, r)$ leží v rovině ρ ; zobrazte pouze jedno ze dvou existujících řešení.

$$\rho(-6; 7; 5), S[0; 3; ?], r = 3, v = 6$$

17. Zobrazte rotační válec, jsou-li dány body A, B, C jeho podstavné hrany a výška v .

$$A[-3; 3; 3], B[4; 8; 3], C[0; 1; 8], v = 5$$

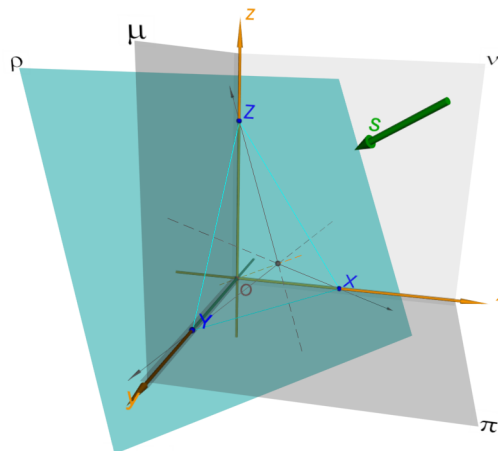
Pravoúhlá axonometrie

Tematický obsah

- Zobrazení základních útvarů
 - Základní pojmy
 - Zobrazení bodu, Zobrazení přímky, Zobrazení roviny
- Polohové úlohy
 - Průsečnice dvou rovin, Průsečík přímky s rovinou
- Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně)
- Zobrazení tělesa
 - Pravidelný čtyřboký jehlan, Zářezová (Eckhartova) metoda

1. Zobrazení základních útvarů v pravoúhlé axonometrii

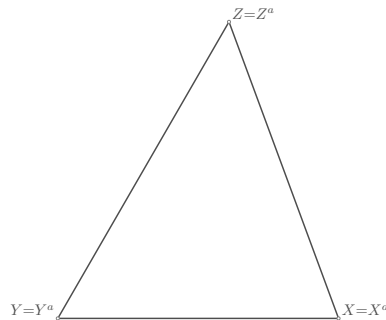
1.1. Základní pojmy



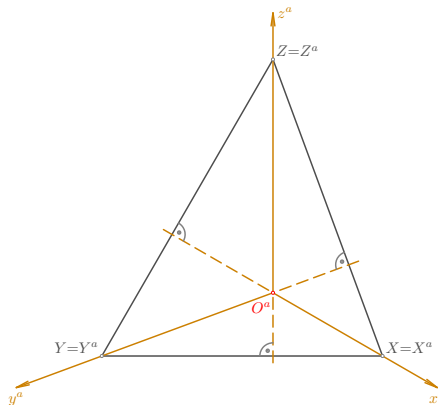


Výklad

- na začátku mějme souřadnicový systém os x, y, z a rovin π, ν, μ s počátkem v bodě O
- **axonometrická průmětna** ρ není rovnoběžná s žádnou souřadnicovou osou a neprochází počátkem; směr promítání s je kolmý k ρ
- průmětna ρ protíná osy x, y, z po řadě v bodech X, Y, Z ; ty tvoří vrcholy tzv. **axonometrického trojúhelníka**, který je vždy ostroúhlý; je-li tento trojúhelník obecný resp. rovnoramenný resp. rovnostranný, nazývá se příslušná axonometrie **trimetrie** resp. **dimetrie** resp. **izometrie**

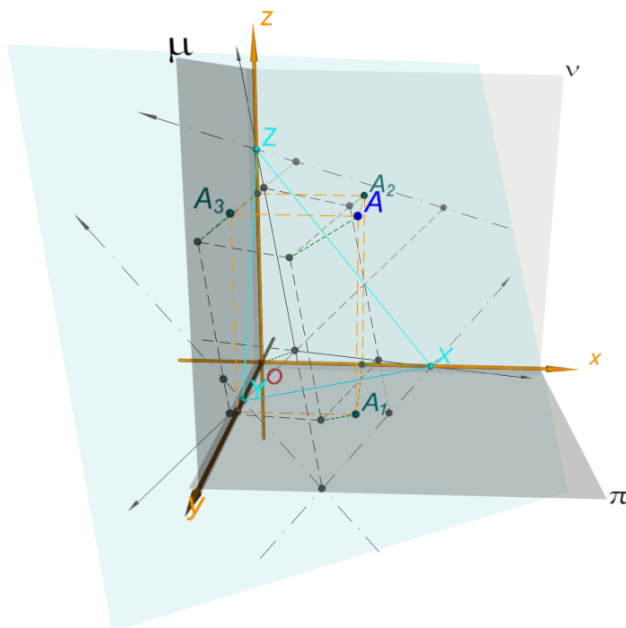


- pravouhlé průměty x^a, y^a, z^a os x, y, z se zobrazí jako výšky v trojúhelníku XYZ a jejich průsečík O^a je tedy axonometrickým průmětem počátku O



□

1.2. Zobrazení bodu



Výklad

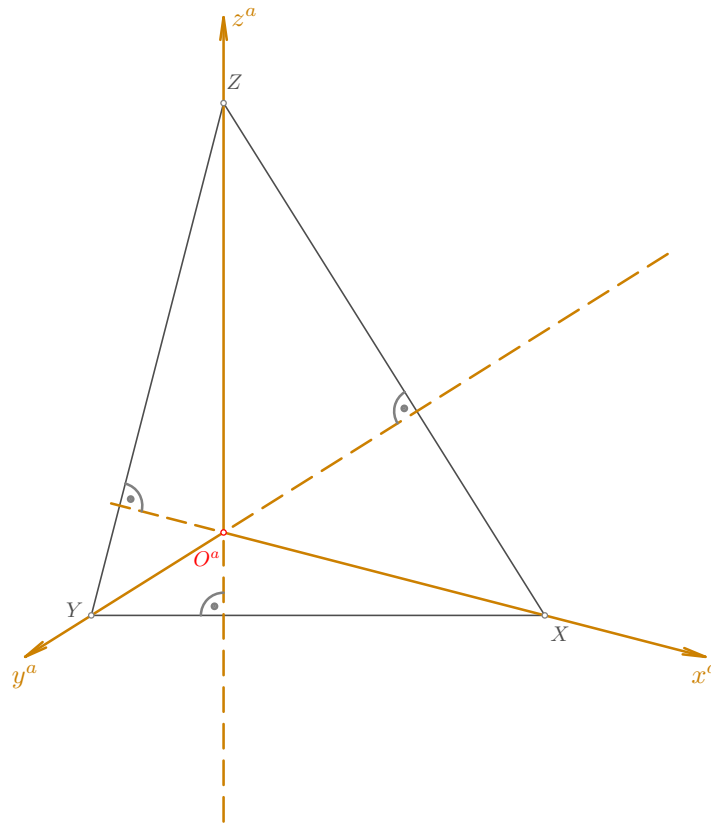
- pravoúhlá axonometrie poskytuje obvykle názornější obrazy prostorových útvarů, ovšem vynášení souřadnic je poměrně komplikovaná a časově zdlouhavá konstrukce
- axonometrická průmětna má k souřadnicovým osám obecnou polohu, a je tedy třeba zjistit zkrácení délkové jednotky na průmětech příslušných os
- k tomu se nejčastěji používá konstrukce otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny kolem stran axonometrického trojúhelníka
- proto se také v praxi častěji užívá dimetrie nebo izometrie, kdy se délková jednotka zkrátí na průmětech dvou nebo všech tří souřadnicových os stejně
- jak již bylo naznačeno, axonometrický průmět nějakého útvaru U označíme vpravo nahoře indexem a , tj. U^a ; toto označení nedodržíme pouze při popisu stop nějaké roviny, takže např. axonometrický průmět půdorysné stopy roviny ρ označíme p^{ρ} (tj. jako v prostoru) místo $p^{\rho a}$

Řešené úlohy

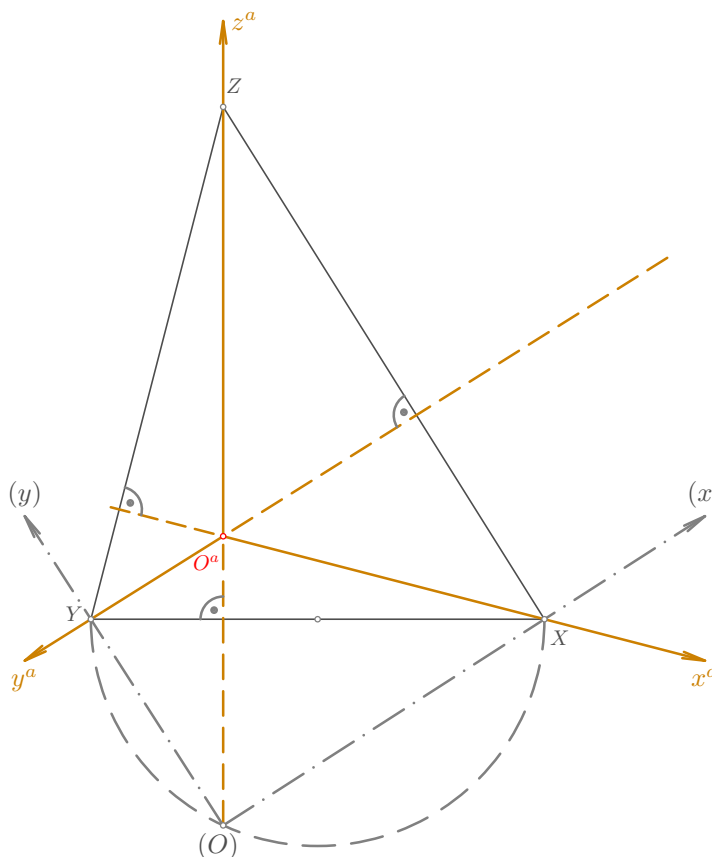


Příklad: Zobrazte průmět bodu $A[3; 4; 5]$ v pravoúhlé axonometrii dané trojúhelníkem $\triangle(6; 7; 8)$.

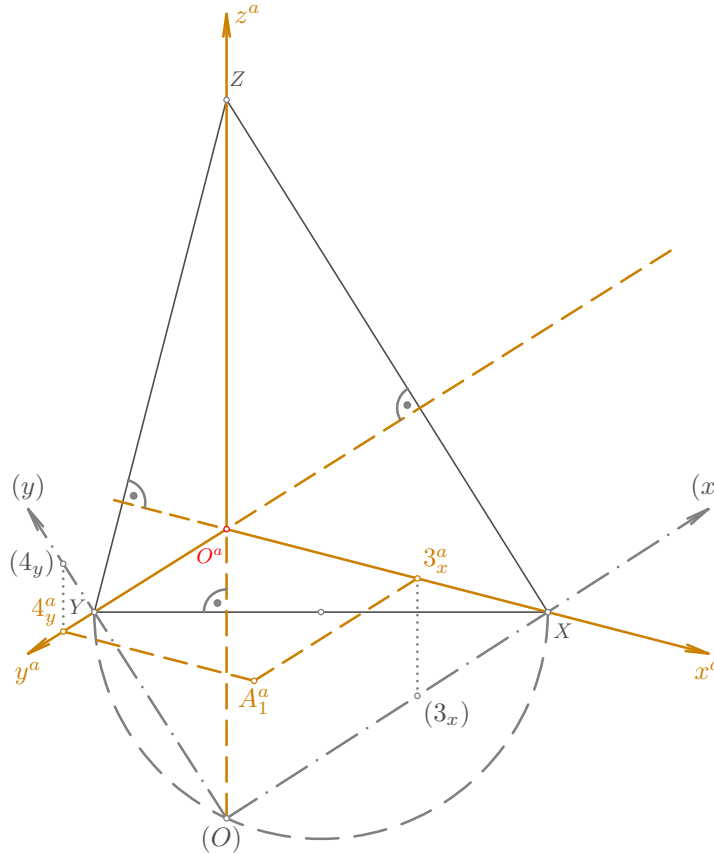
- axonometrický trojúhelník XYZ je dán délkami svých stran (platí $|XY|=6$, $|YZ|=7$, $|ZX|=8$), průměty x^a, y^a, z^a souřadnicových os x, y, z se zobrazí jako výšky, jejich průsečík O^a je průmětem počátku O



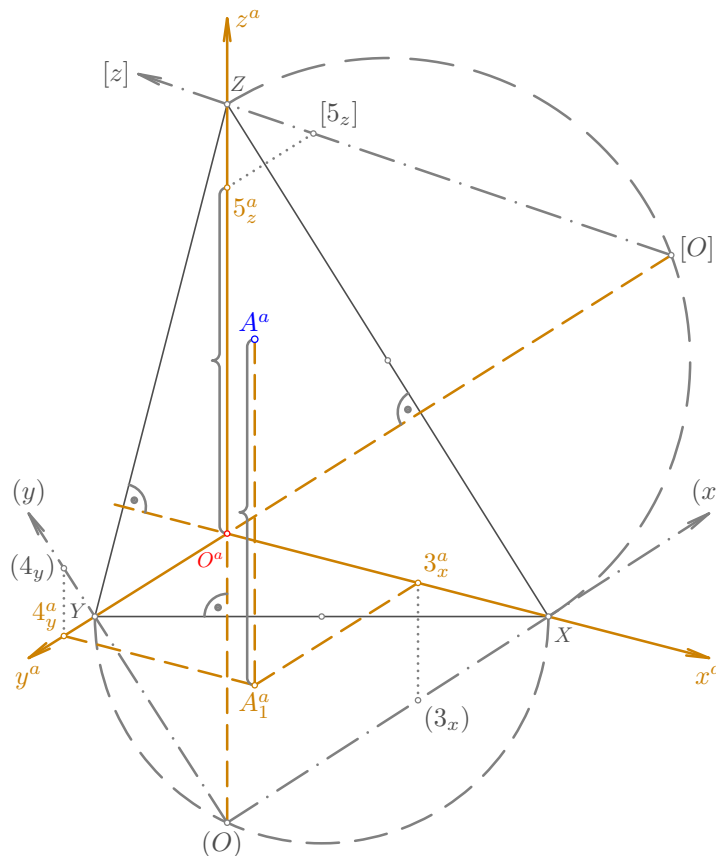
- půdorysna π je otočena kolem přímky XY do axonometrické průmětny; otočená poloha (O) počátku O leží na přímce z^a a na Thaletově kružnici nad průměrem XY ; otočené polohy $(x)=(O)X$, $(y)=(O)Y$ os x , y jsou tedy navzájem kolmé a lze je použít k vynesení souřadnic



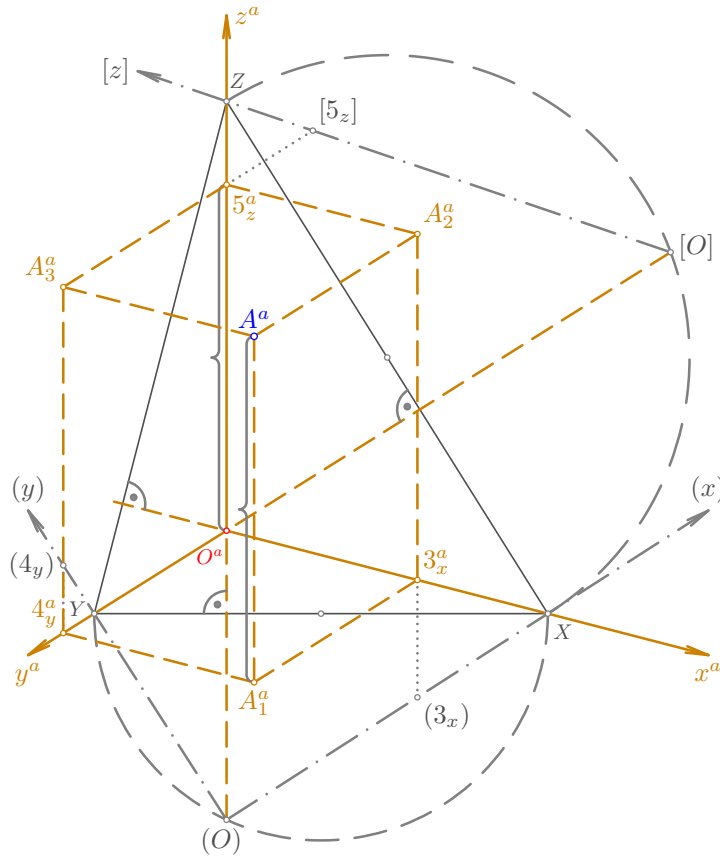
- v otočení nanese se x -ovou a y -ovou bodu A souřadnici a získáme tak body $(3_x) \in (x)$ a $(4_y) \in (y)$; ty vrátíme po kolmících k přímce XY zpět na průměty x^a, y^a os x, y do bodů $3_x^a, 4_y^a$; pomocí rovnoběžek s přímkami x^a, y^a pak získáme axonometrický půdorys A_1^a bodu A



- nad bod A_1^a nanese se ve směru přímky z^a z -ovou souřadnici, ovšem v příslušném zkrácení; to zjistíme např. v otočení náryсны ν do axonometrické průmětny kolem přímky XZ : otočená poloha $[O]$ počátku O leží na přímce y^a a na Thaletově kružnici nad průměrem XZ a přímka $[z]=[O]Z$ je otočenou polohou osy z ; v otočení najdeme bod $[5_z] \in [z]$ (kde $|[O][5_z]|=z_A=5$), po kolmici k přímce XZ jej vrátíme zpět do bodu $5_z^a \in z^a$ a jeho vzdálenost od bodu O^a je pak hledaným zkrácením z -ové souřadnice bodu A , tj. $|A_1^a A^a|=|O^a 5_z^a|$

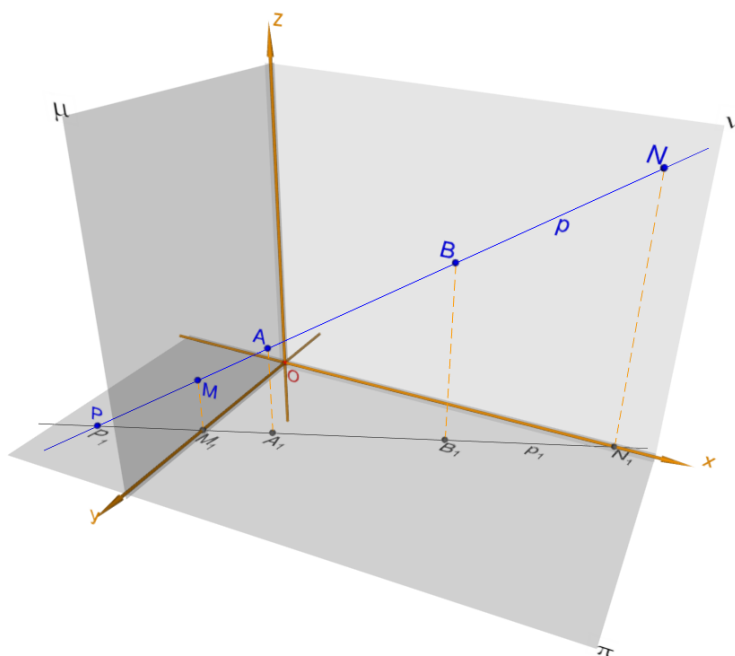


- na závěr jsou pro zajímavost a větší názornost doplněny axonometrické průměty A_2^a, A_3^a nárýsu A_2 a bokorysu A_3 a je tak sestaven tzv. **souřadnicový kvádr** bodu A ; tato konstrukce již však není pro zobrazení bodu A v dané axonometrii nezbytně nutná...



□

1.3. Zobrazení přímky



Výklad

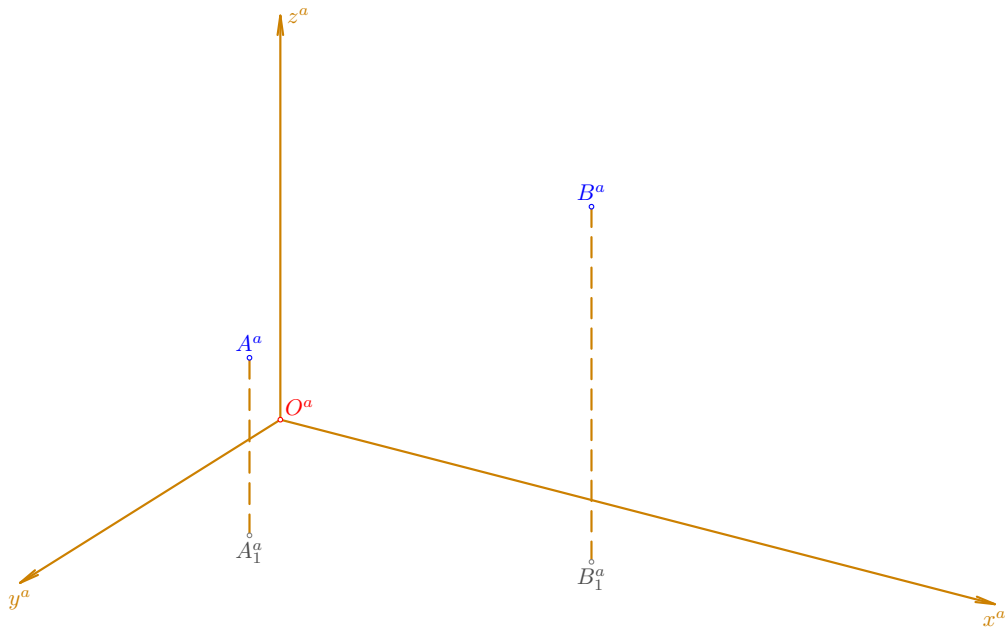
- protože je vynášení souřadnic v pravoúhlé axonometrii dosti pracné a nákrasna se rychle zaplní konstrukcemi, budeme v této a v dalších polohových úlohách pracovat bez souřadnic
- pravoúhlá axonometrie bude zadána pouze tzv. **osovým křížem** a další útvary budeme volit libovolně vhodně



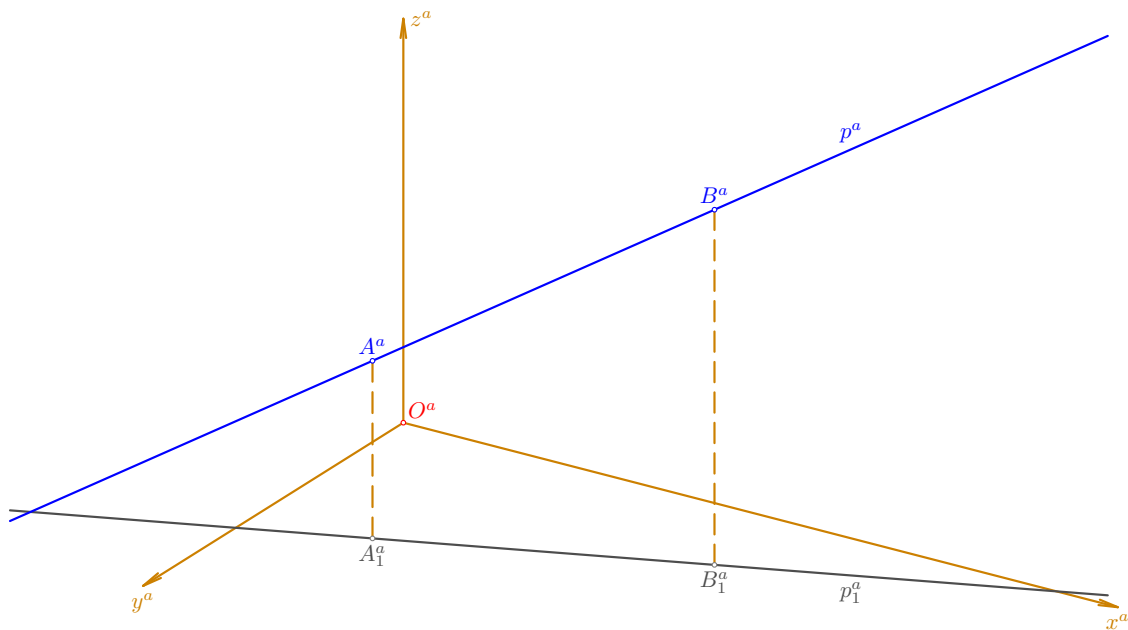
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte přímku $p=AB$ a najděte její průsečíky s rovinami π, ν, μ .

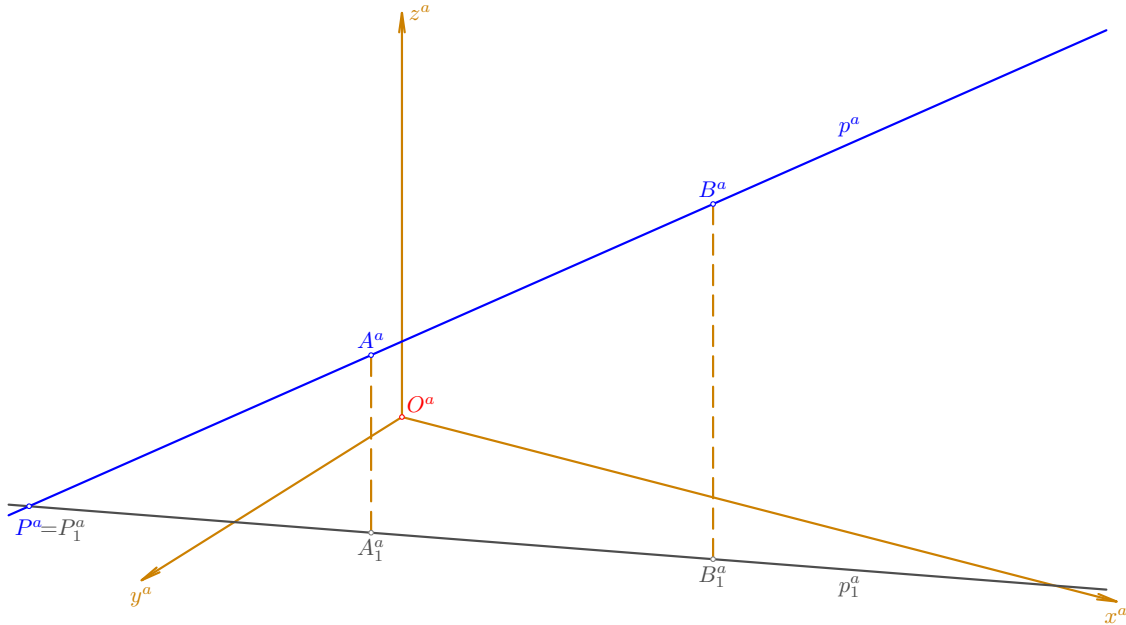
- pro body A, B zvolme jejich axonometrické půdorysy A_1^a, B_1^a a axonometrické průměty A^a, B^a , přičemž platí $A_1^a A^a \parallel B_1^a B^a \parallel z^a$; takto zvolené body leží v tzv. **prvním oktantu**, tj. nad půdorysnou, před nárysnou a před bokorysnou



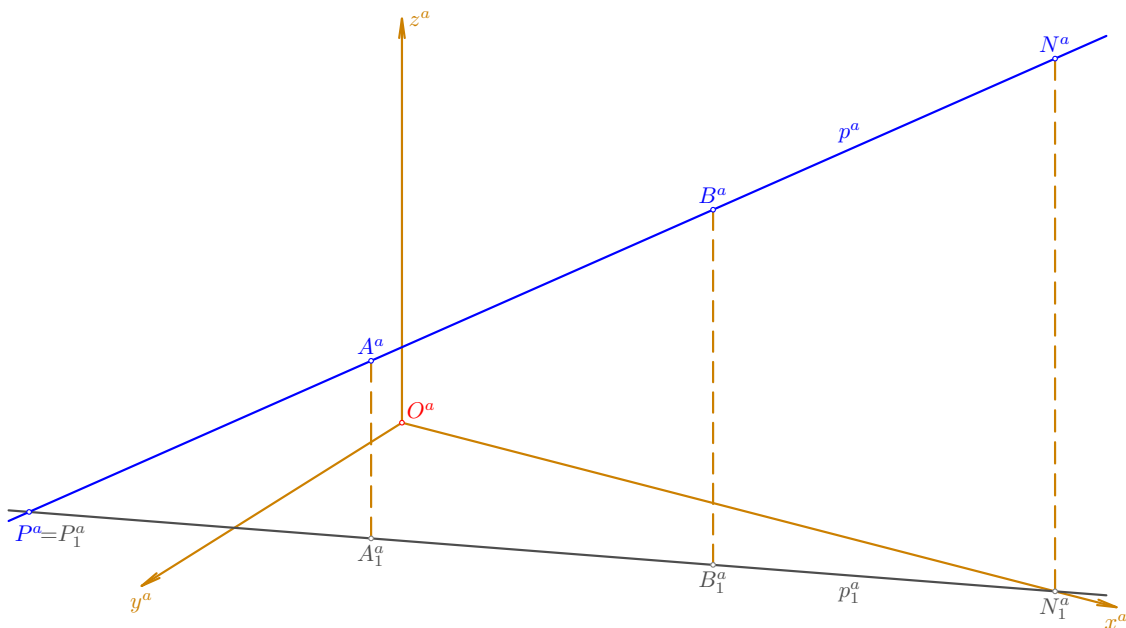
- sestrojme axonometrický průmět $p^a = A^a B^a$ a axonometrický půdorys $p_1^a = A_1^a B_1^a$ přímky $p = AB$



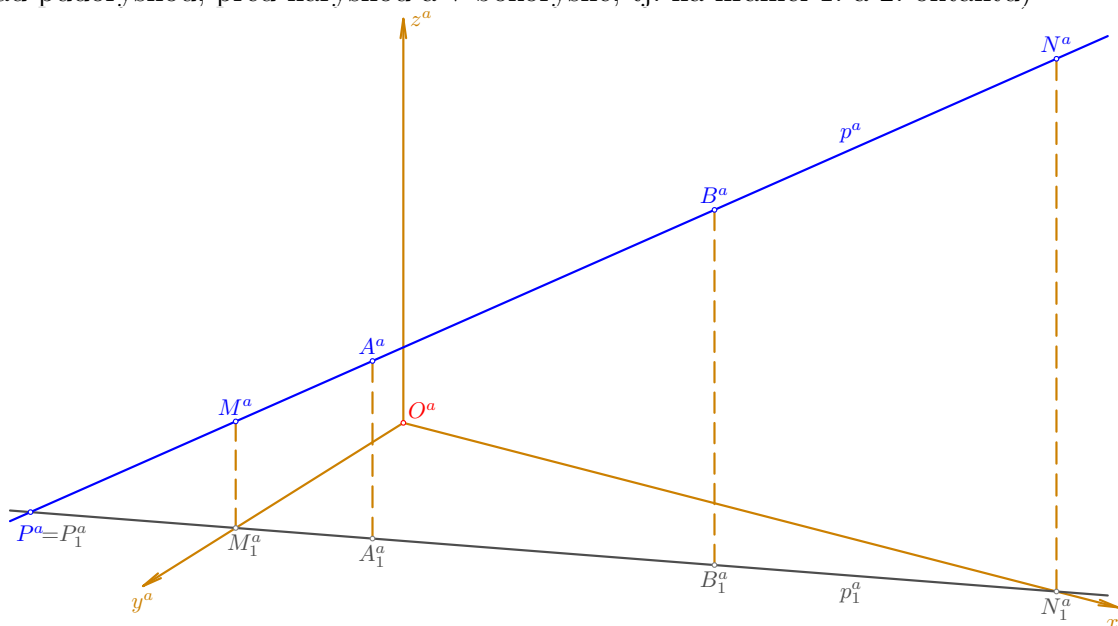
- průsečík $P=p \cap \pi$ je současně půdorysným stopníkem přímky p a platí pro něj $P = P_1 = p \cap p_1$; v průmětu je tudíž $P^a = P_1^a = p^a \cap p_1^a$ (bod P leží v půdorysně, před nárýsnou a za bokorysnou, tj. na hranici 2. a 6. oktantu)



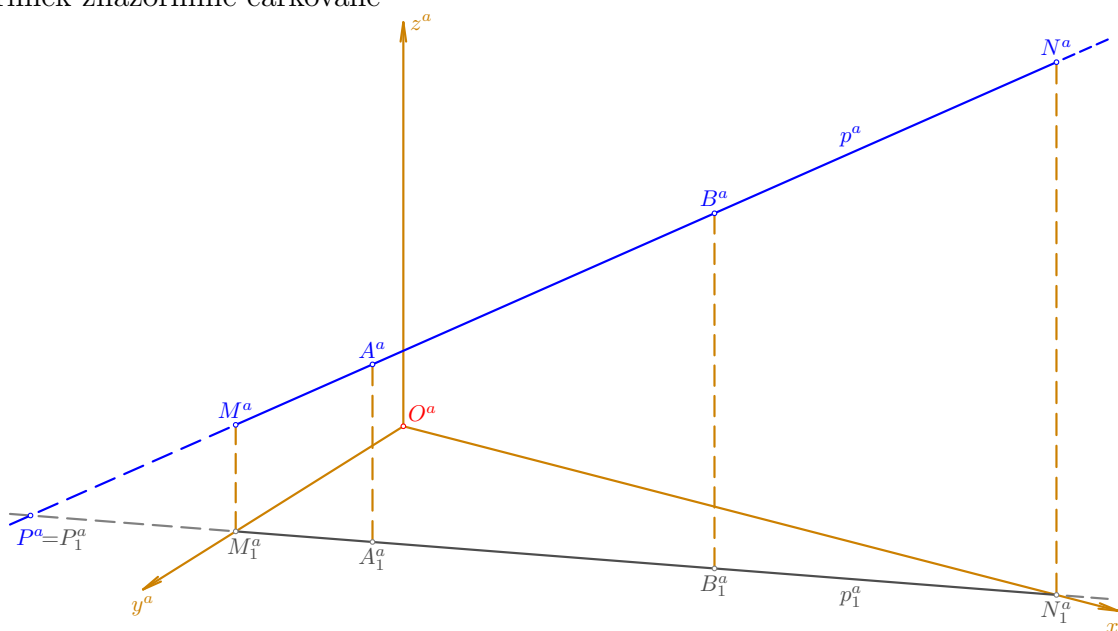
- půdorys N_1 nárýsného stopníku $N=p \cap \nu$ musí ležet na půdorysu p_1 a na ose x ; v průmětu je tedy $N_1^a = p_1^a \cap x^a$ a pro bod N^a platí $N^a \in p^a, N_1^a N^a \parallel z^a$ (bod N leží nad půdorysnou, v nárýsně a před bokorysnou, tj. na hranici 1. a 4. oktantu)



- analogicky leží půdorys M_1 nárysného stopníku $M=p \cap \mu$ na půdorysu p_1 a na ose y ; v průmětu je tedy $M_1^a=p_1^a \cap y^a$ a pro bod M^a platí $M^a \in p^a, M_1^a M^a \parallel z^a$ (bod M leží nad půdorysnou, před nárysnou a v bokorysně, tj. na hranici 1. a 2. oktantu)

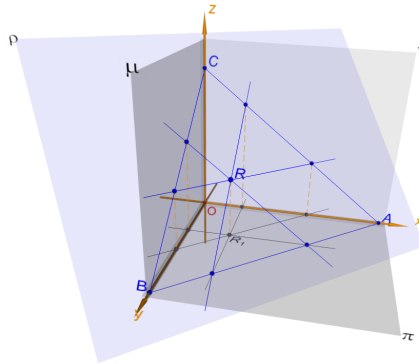


- předpokládáme-li, že souřadnicové roviny π, ν, μ jsou neprůhledné (pohled do prvního oktantu pak připomíná roh místnosti), uvidíme přímky p, p_1 pouze mezi nárysnou a bokorysnou, a úsečky $N^a M^a, N_1^a M_1^a$ tedy vytáhneme plnou čarou, ostatní části těchto přímek znázorníme čárkovaně



□

1.4. Zobrazení roviny



Výklad

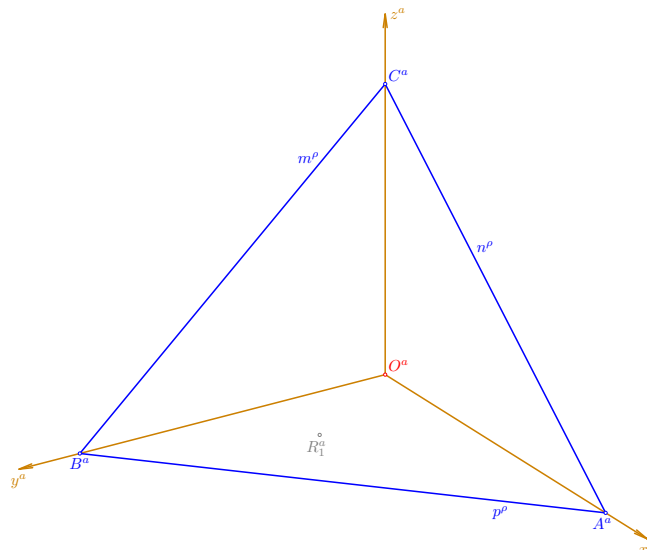
- při zobrazení roviny se nejčastěji uplatňují **stopy roviny**, tj. průsečnice se souřadnicovými rovinami π, ν, μ , a **hlavní přímky všech tří os**
- právě při popisu stop a hlavních přímek je pravý horní index rezervován pro označení roviny, a proto je vynechán index a označující axonometrický průmět



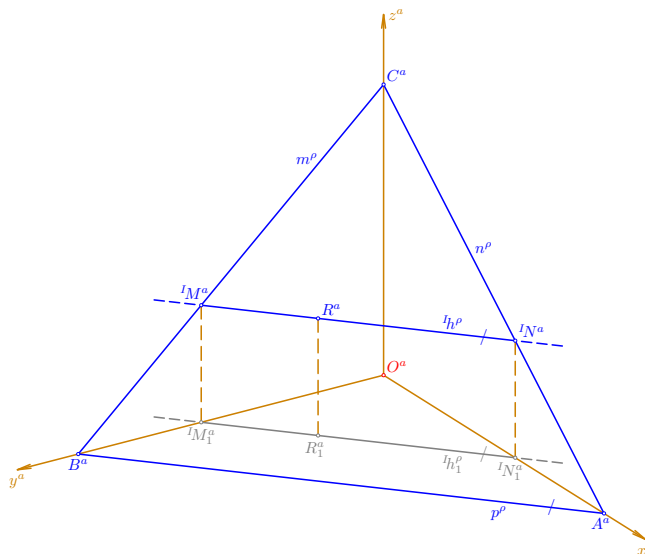
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte bod R v rovině ρ ; bod R je dán svým půdorysem R_1 a rovina ρ stopami.

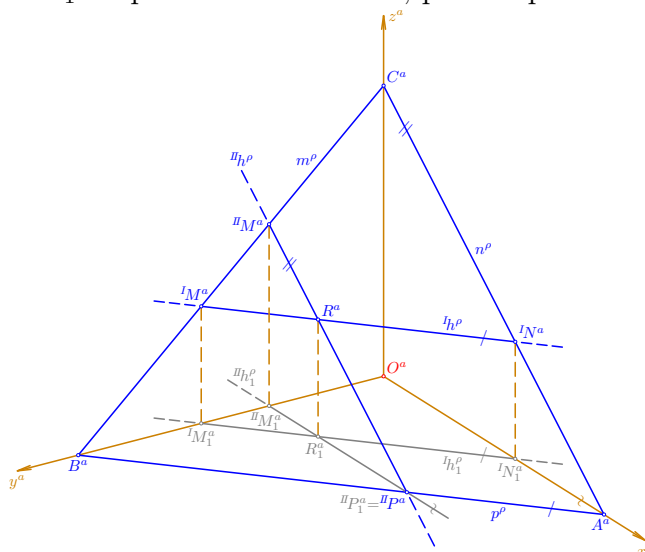
- na přímkách x^a, y^a, z^a zvolme průměty A^a, B^a, C^a bodů A, B, C , v nichž protíná rovina ρ souřadnicové osy x, y, z ; body A, B, C tvoří tzv. **stopní trojúhelník** a určují stopy $p^\rho = AB, n^\rho = AC, m^\rho = BC$ roviny ρ



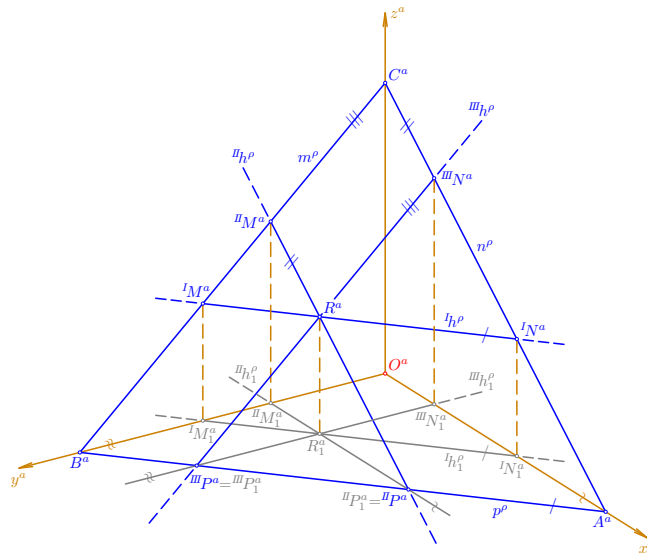
- bod $R \in \rho$ najdeme pomocí hlavní přímky ${}^I h^\rho$ I. osnovy roviny ρ : pro její půdorys je ${}^I h_1^\rho \parallel p^\rho$, $R_1 \in {}^I h_1^\rho$; na osách x, y najdeme půdorysy ${}^I N_1 = {}^I h_1^\rho \cap x$, ${}^I M_1 = {}^I h_1^\rho \cap y$ nárysného a bokorysného stopníku, pro něž platí ${}^I N \in n^\rho$, ${}^I N_1 {}^I N \parallel z$ a ${}^I M \in m^\rho$, ${}^I M_1 {}^I M \parallel z$; pro hlavní přímku ${}^I h^\rho = {}^I N {}^I M$ pak platí ${}^I h^\rho \parallel p^\rho$; bod R najdeme na rovnoběžce s osou z vedené půdorysem R_1 a na přímce ${}^I h^\rho$; uvedený popis konstrukcí se vztahuje k situaci v prostoru – v axonometrickém průmětu platí tytéž vztahy pro axonometrické průměty příslušných útvarů



- podobně lze použít hlavní přímku ${}^{II} h^\rho$ II. osnovy roviny ρ : pro její půdorys ${}^{II} h_1^\rho$ platí ${}^{II} h_1^\rho \parallel x$, $R_1 \in {}^{II} h_1^\rho$; bod ${}^{II} P = {}^{II} P_1 = {}^{II} h_1^\rho \cap p^\rho$ je půdorysným stopníkem přímky ${}^{II} h^\rho$, pro bokorysný stopník ${}^{II} M$ je ${}^{II} M \in m^\rho$, ${}^{II} M_1 {}^{II} M \parallel z$, kde ${}^{II} M_1 = {}^{II} h_1^\rho \cap y$; bod R pak najdeme nad svým půdorysem R_1 na přímce ${}^{II} h^\rho = {}^{II} P {}^{II} M$, pro niž platí ${}^{II} h^\rho \parallel n^\rho$



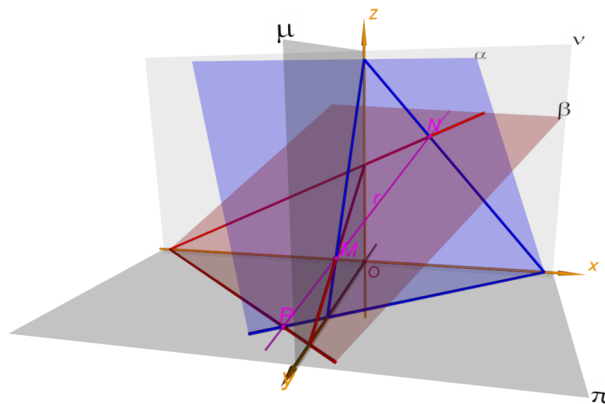
- zcela analogicky postupujeme přes hlavní přímku $'''h^\rho$ III. osnovy roviny ρ : pro její půdorys $'''h_1^\rho$ platí $'''h_1^\rho \parallel y$, $R_1 \in '''h_1^\rho$; bod $'''P = '''P_1 = '''h_1^\rho \cap p^\rho$ je půdorysným stopníkem přímky $'''h^\rho$, pro nárysný stopník $'''N$ je $'''N \in n^\rho$, $'''N_1'''N \parallel z$, kde $'''N_1 = '''h_1^\rho \cap x$; bod R pak leží nad svým půdorysem R_1 na přímce $'''h^\rho = '''P'''N$, pro niž platí $'''h^\rho \parallel m^\rho$; tutéž úlohu jsme tak vyřešili třemi různými způsoby



□

2. Polohové úlohy v pravoúhlé axonometrii

2.1. Průsečnice dvou rovin



Výklad



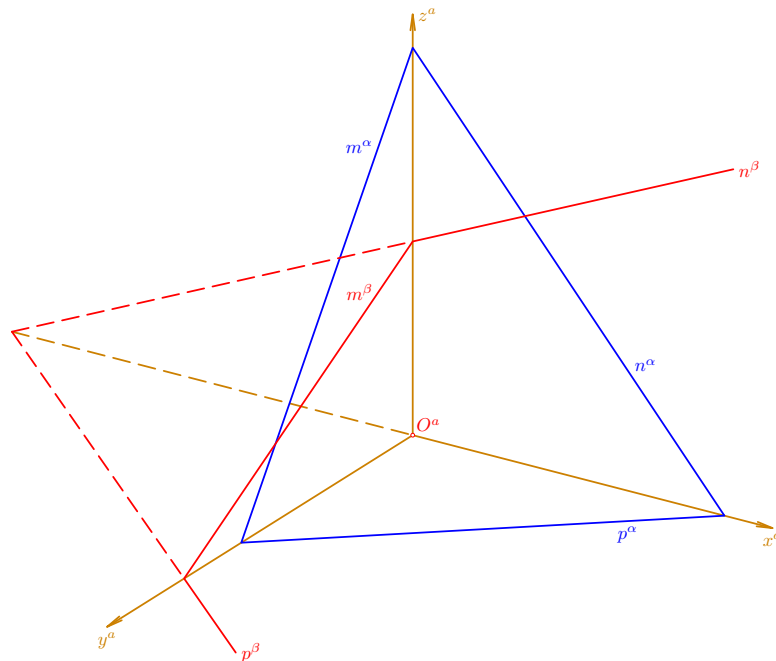
- dvě různoběžné roviny se protínají v přímce – k jejímu sestrojení tedy stačí sestrojít alespoň dva společné body obou rovin
- v pravoúhlé axonometrii se nejčastěji užívají průsečíky příslušných stop obou rovin; není-li některá z rovin dána stopami, je možno použít **princip krycí přímky**

Řešené úlohy

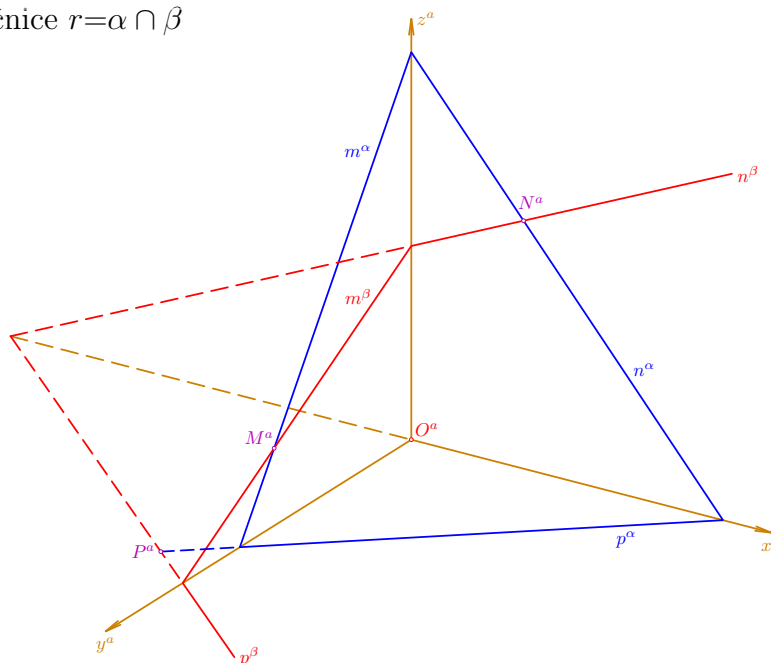


Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem najděte průsečnici r rovin α a β ; roviny α, β jsou dány svými stopami.

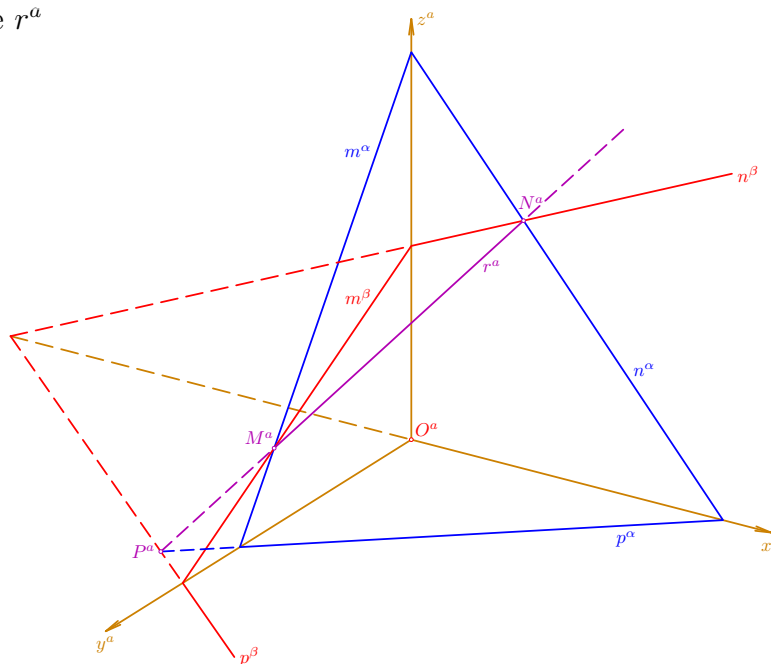
- zadání: jeden vrchol stopního trojúhelníka roviny β leží na záporné části osy x



- najdeme průsečíky příslušných stop obou rovin: $P=p^\alpha \cap p^\beta$, $N=n^\alpha \cap n^\beta$, $M=m^\alpha \cap m^\beta$ (podle výše uvedeného výkladu stačí najít dva z těchto bodů); jsou to vlastně stopníky hledané průsečnice $r=\alpha \cap \beta$

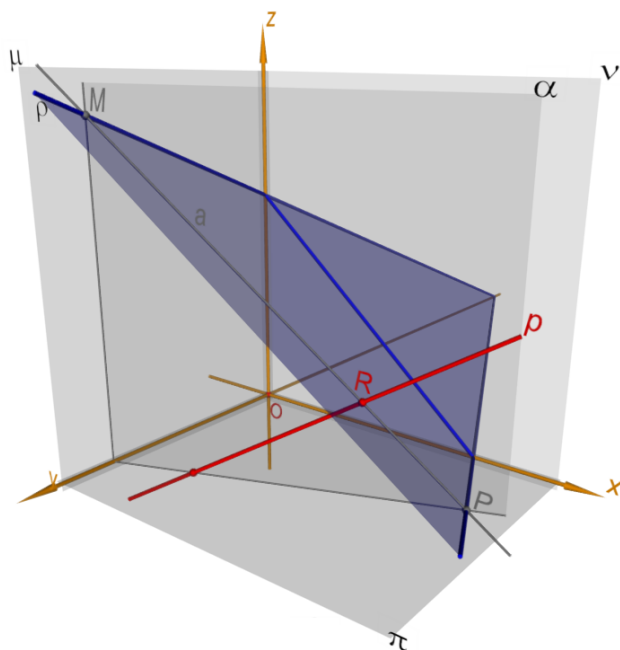


- sestrojené body P, N, M leží v jedné přímce, která je průsečnicí r daných rovin α, β ; při přesném rýsování musí také axonometrické průměty P^a, N^a, M^a bodů P, N, M ležet v jedné přímce r^a



□

2.2. Průsečík přímky s rovinou



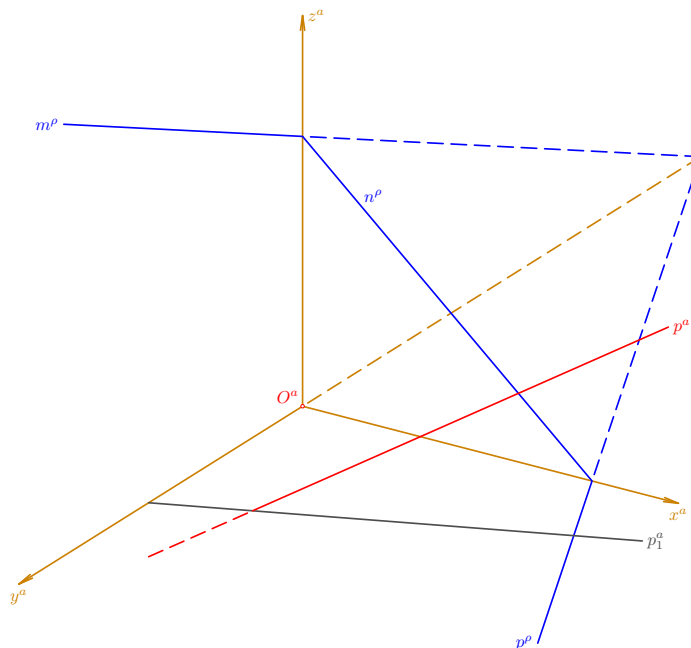
Výklad

- k sestrojení průmětu průsečíku dané přímky a roviny je třeba proložit zadanou přímkou **pomocnou rovinou**; obecně lze tuto rovinu volit libovolně vhodně – v pravoúhlé axonometrii se nejčastěji prokládá rovina kolmá k půdorysně π nebo k axonometrické průmětně (užívá se tím tzv. **krycí přímka**)
- je-li tedy dána přímka p a rovina ρ , proložme přímkou p rovinu α kolmou k π ; průsečnice a rovin ρ a α pak protíná přímkou p v hledaném průsečíku R přímky p s rovinou ρ

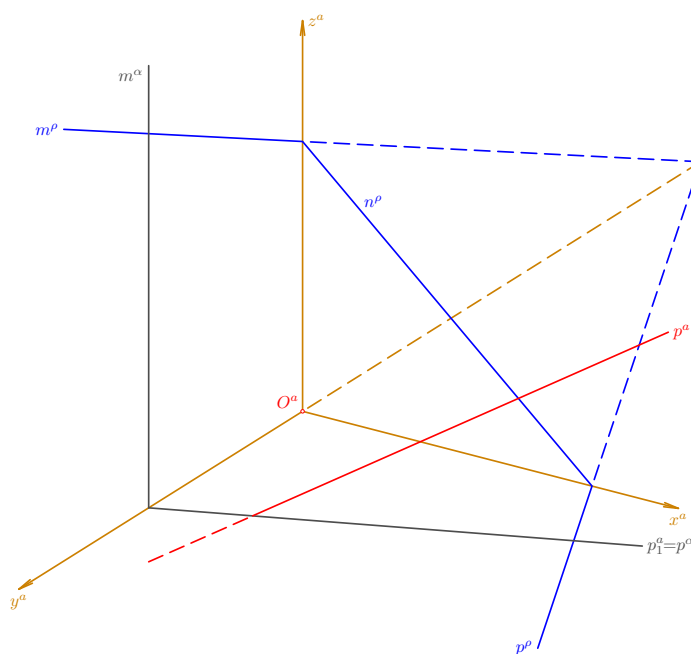
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem sestrojte průsečík R přímky p s rovinou ρ ; přímka p je dourčena svým půdorysem, rovina ρ je dána svými stopami.

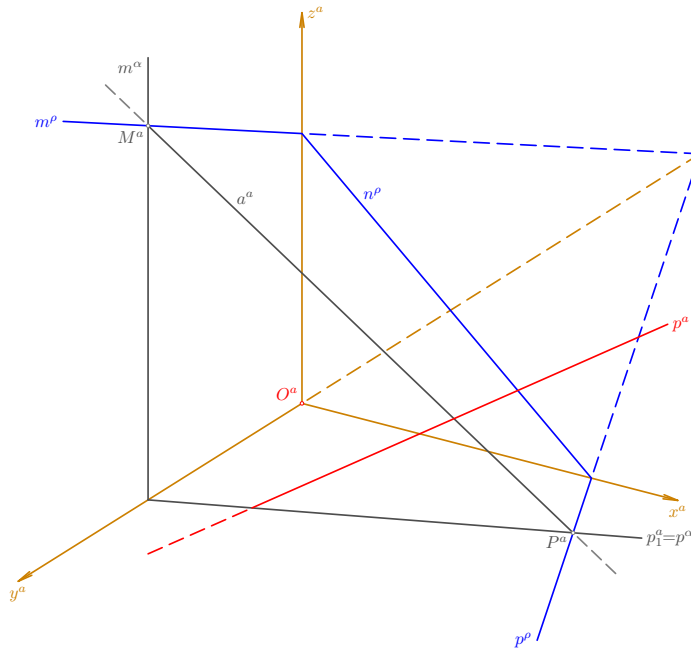
- zadání úlohy: pro přímkou p je dán její axonometrický průmět p^a a axonometrický půdorys p_1^a , pro rovinu ρ jsou dány axonometrické průměty jejích stop (jeden vrchol stopního trojúhelníka leží v záporné části osy y)



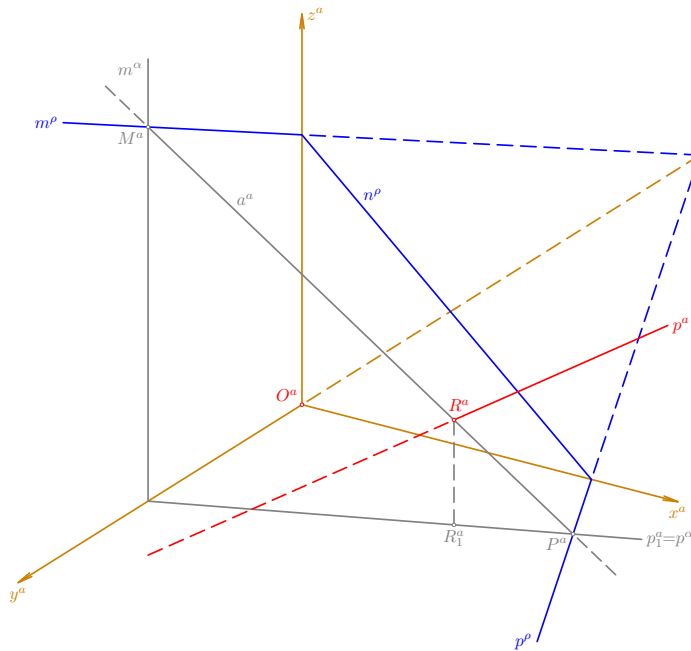
- přímkou p proložíme rovinu $\alpha \perp \pi$: její půdorysná stopa p^α splývá s půdorysem p_1 přímky p , bokorysná stopa $m^\alpha \parallel z$ se s půdorysnou stopou protíná na ose y



- sestrojme průsečnici $a=PM$ rovin α a ρ , kde $P=p^\alpha \cap p^\rho$ a $M=m^\alpha \cap m^\rho$

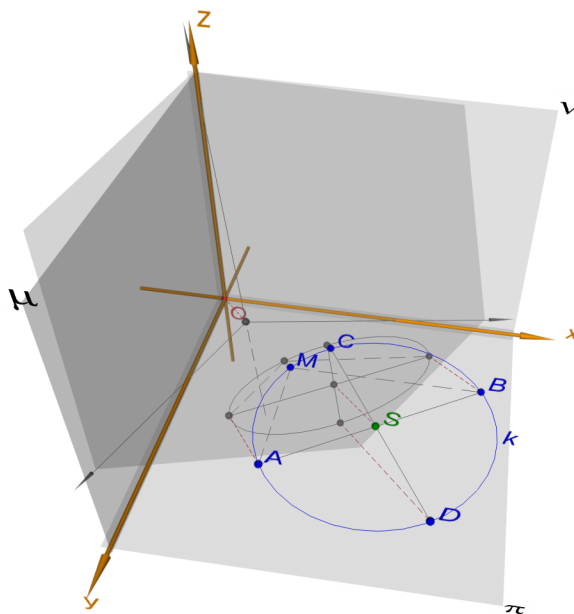


- přímky p a a se protínají v bodě R , který je současně hledaným průsečíkem přímky p s rovinou ρ



□

3. Zobrazení kružnice (ležící v půdorysně) v pravoúhlé axonometrii



Výklad

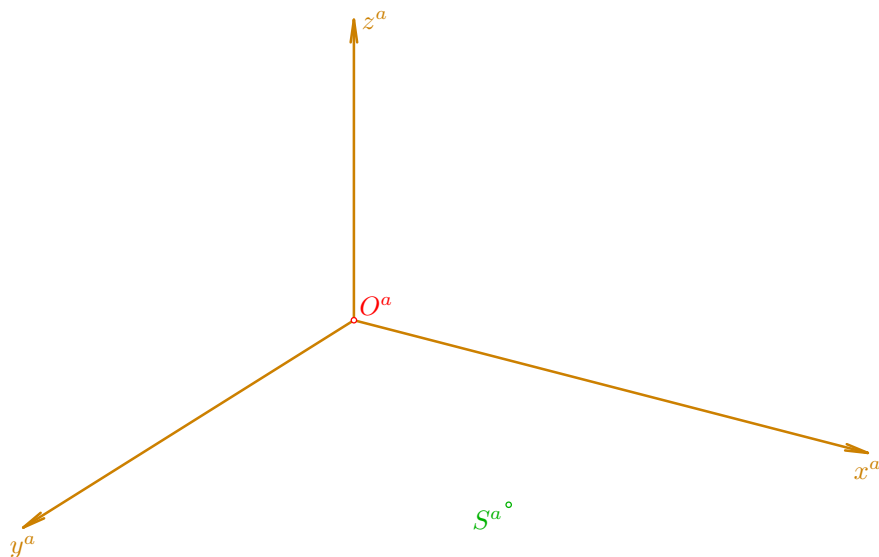
- v pravoúhlé axonometrii lze poměrně snadno sestrojít průmět kružnice dané středem a poloměrem, která leží v souřadnicové rovině nebo v rovině s ní rovnoběžné
- průmětem takové kružnice je elipsa, jejíž hlavní osa je kolmá k průmětu té souřadnicové osy, která je normálou roviny dané kružnice; délka hlavní poloosy je rovna poloměru kružnice
- pro omezení vedlejší poloosy je možno poměrně snadno najít průmět dalšího bodu dané kružnice a použít některou proužkovou konstrukci
- v následujícím příkladě je zobrazen axonometrický průmět kružnice $k(S,r)$ ležící v půdorysně
- je-li kružnice dána jinak (např. třemi body nebo středem a tečnou), je potřeba použít otočení příslušné souřadnicové roviny do axonometrické průmětny

Řešené úlohy

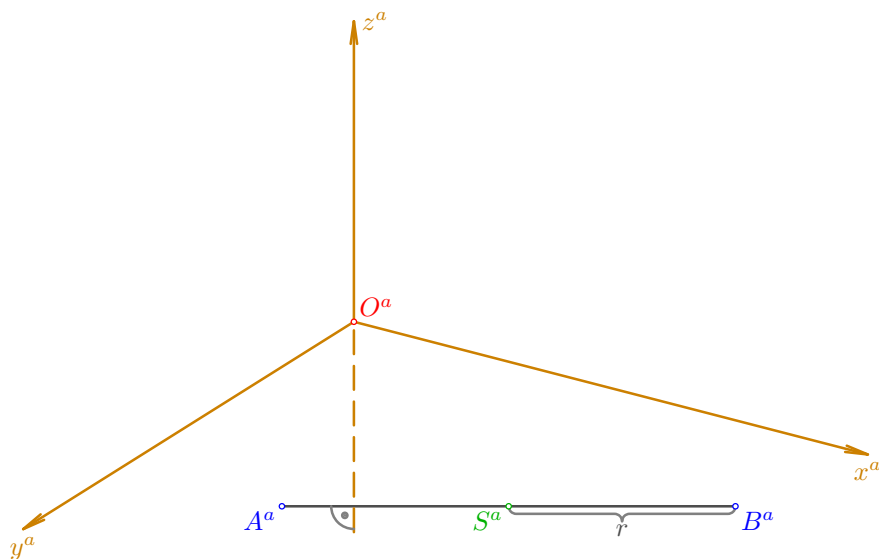


Příklad: V pravoúhlé axonometrii dané osovým křížem zobrazte kružnici $k(S, r=3)$ ležící v půdorysně π ; střed S je dán svým axonometrickým průmětem S^a .

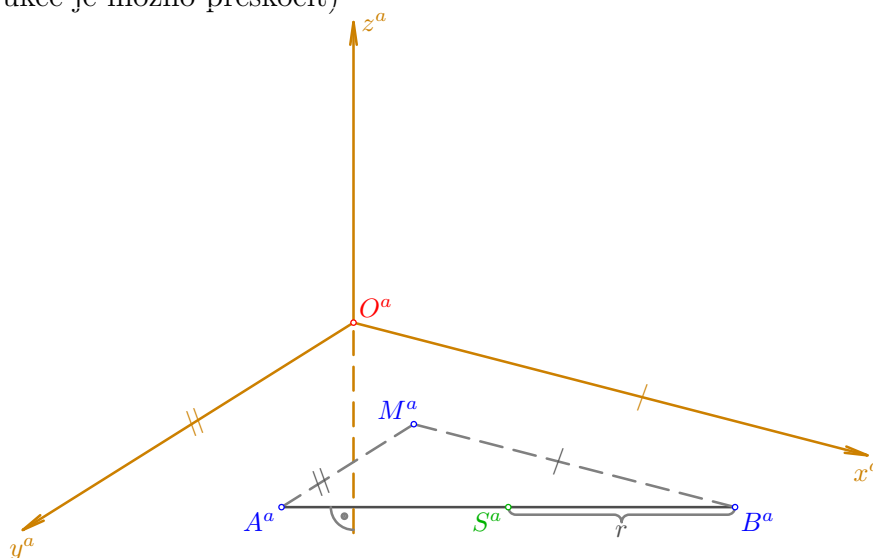
- zadání úlohy



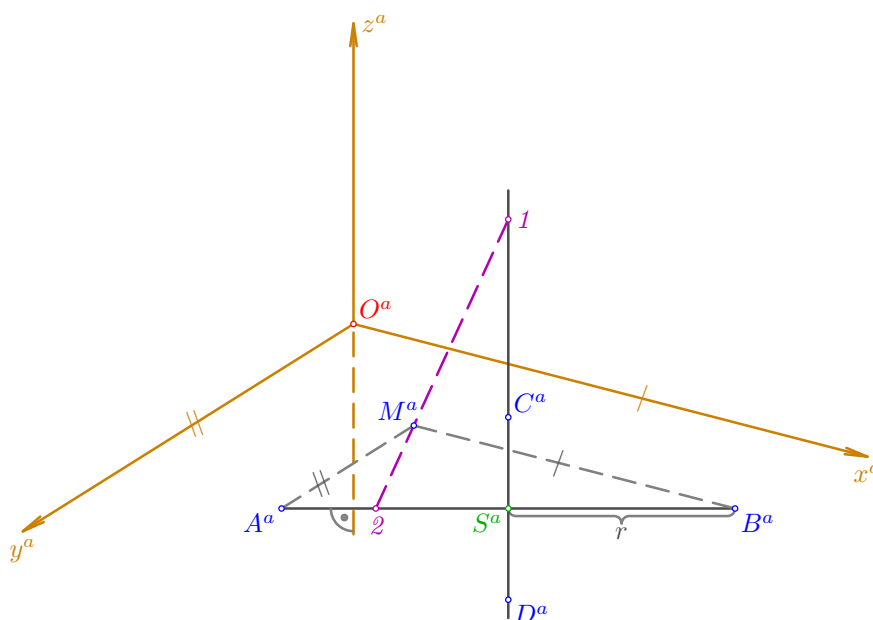
- je-li průměr AB kružnice k rovnoběžný s axonometrickou průmětnou, pak při libovolné volbě axonometrického trojúhelníka XYZ bude $AB \parallel A^a B^a \parallel XY$ a odtud vyplývá $A^a B^a \perp z^a$; navíc se na průmětu průměru AB zachová délka úsečky a body A^a, B^a ($|A^a B^a| = 2r$) jsou tedy hlavní vrcholy elipsy, která je průmětem dané kružnice k



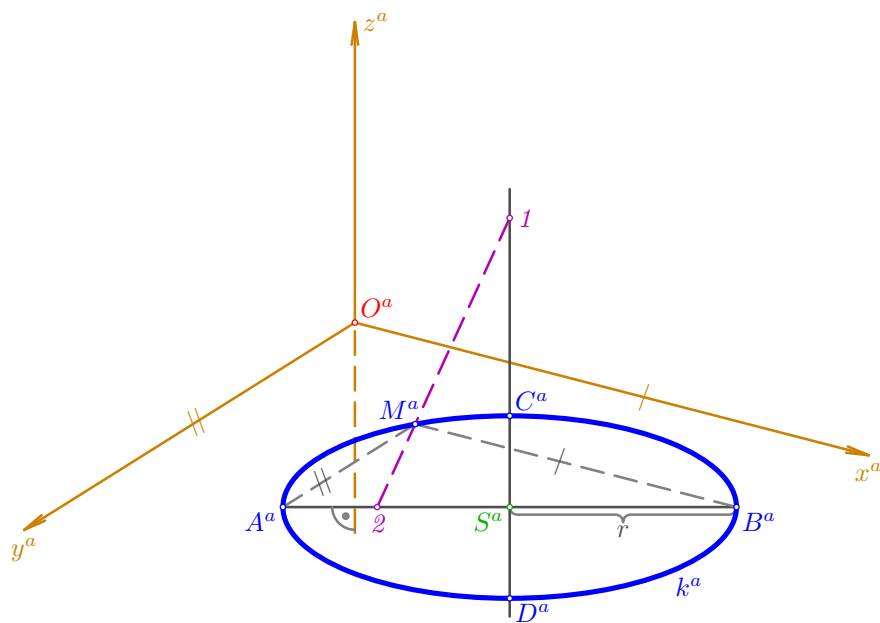
- rovnoběžky s osami y, x vedené po řadě body A, B jsou navzájem kolmé a podle Thaletovy věty se protínají v bodě M kružnice k ; v průmětu se rovnoběžnost zachová (kolmost obecně nikoliv) a bod M^a je dalším bodem konstruované elipsy k^a (speciálně půlí-li přímka z^a úhel mezi x^a a y^a , je bod M^a vedlejším vrcholem elipsy k^a a další krok této konstrukce je možno přeskočit)



- vedlejší vrcholy C^a, D^a jsou sestrojeny pomocí **proužkové konstrukce** (součtové, více viz na straně 196): pro bod 1 na vedlejší ose elipsy je $|1M^a| = |A^aS^a| = r$, přímka $1M^a$ protíná hlavní osu A^aB^a v bodě 2 a délka vedlejší poloosy elipsy k^a je rovna délce úsečky $2M^a$



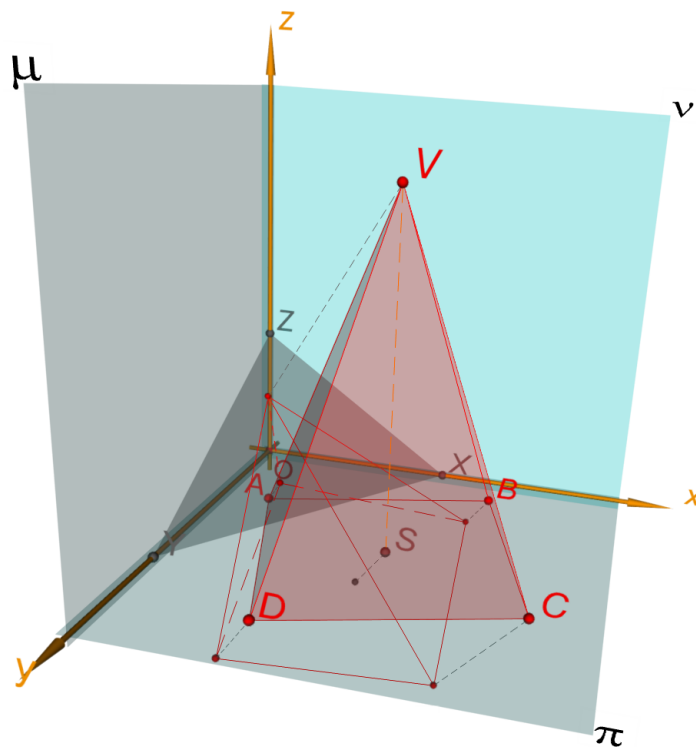
- na závěr je vyrýsována elipsa k^a , která je průmětem kružnice $k(S, r=3) \subseteq \pi$



□

4. Zobrazení tělesa v pravoúhlé axonometrii

4.1. Pravidelný čtyřboký jehlan



Výklad

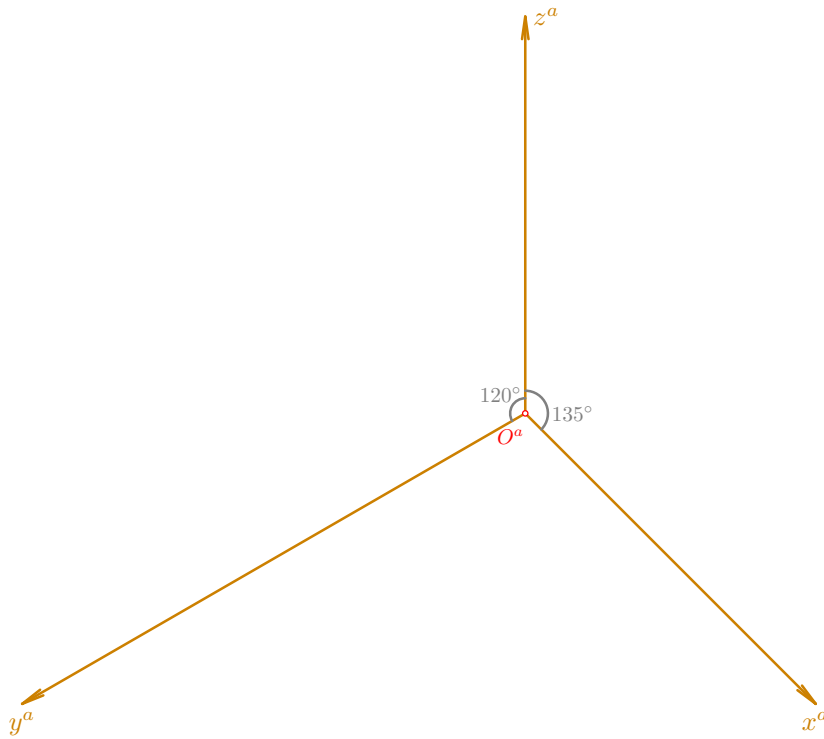
- v následujícím příkladě je pravoúhlá axonometrie určena osovým křížem, a to konkrétně pomocí velikostí úhlů, které svírají kladné směry průmětů souřadnicových os
- pro vynesení souřadnic je pak možno zvolit axonometrický trojúhelník libovolně velký, pouze je potřeba dodržet kolmost jeho stran k odpovídajícím průmětům souřadnicových os
- různé volby axonometrického trojúhelníka znamenají v prostoru posun axonometrické průmětny ve směru promítání, a nemají tudíž vliv na výslednou polohu promítaných objektů

Řešené úlohy

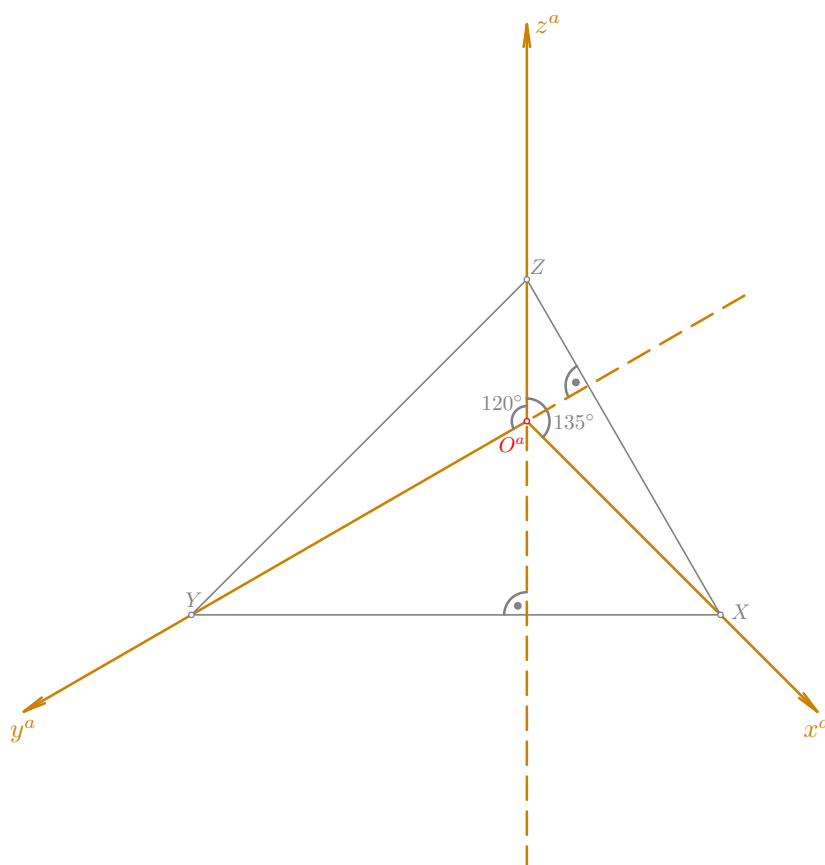


Příklad: V pravoúhlé axonometrii sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, pro který je dán hlavní vrchol V a jehož podstava o vrcholu A leží v půdorysně π ; $V[4; 4; 7]$, $A[1; 2,5; 0]$, axo: $\sphericalangle(x, z)=135^\circ$, $\sphericalangle(y, z)=120^\circ$.

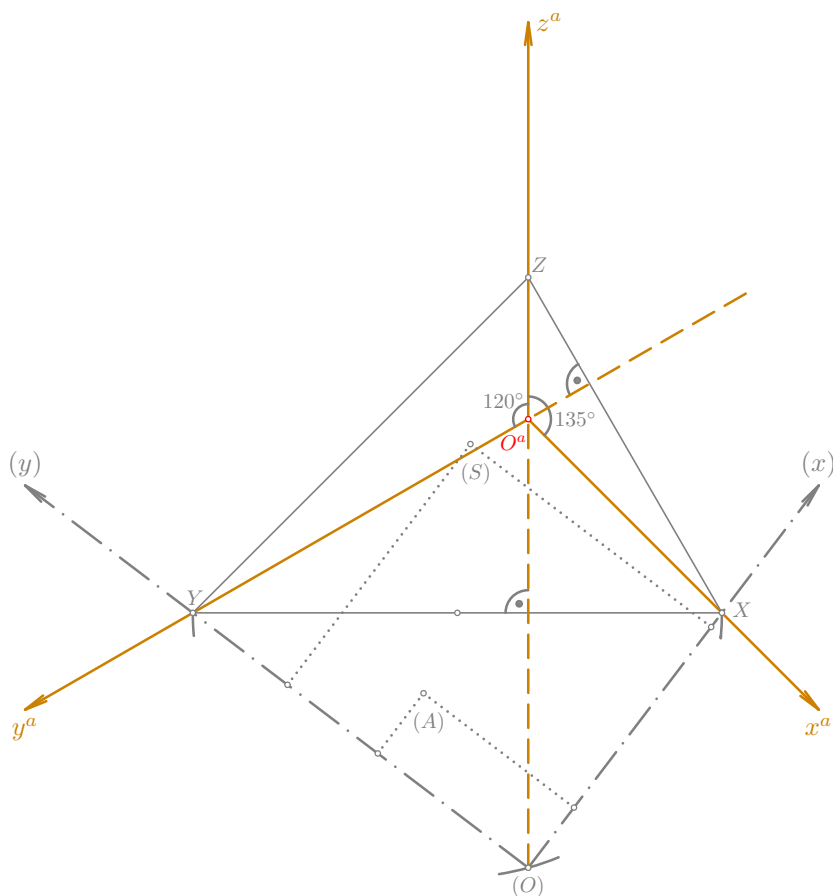
- zvolme nejprve svisle průmět z^a osy z , na něm průmět O^a počátku O a kladné směry průmětů x^a, y^a os x, y sestrojme pod zadanými úhly 135° a 120° od kladného směru průmětu osy z



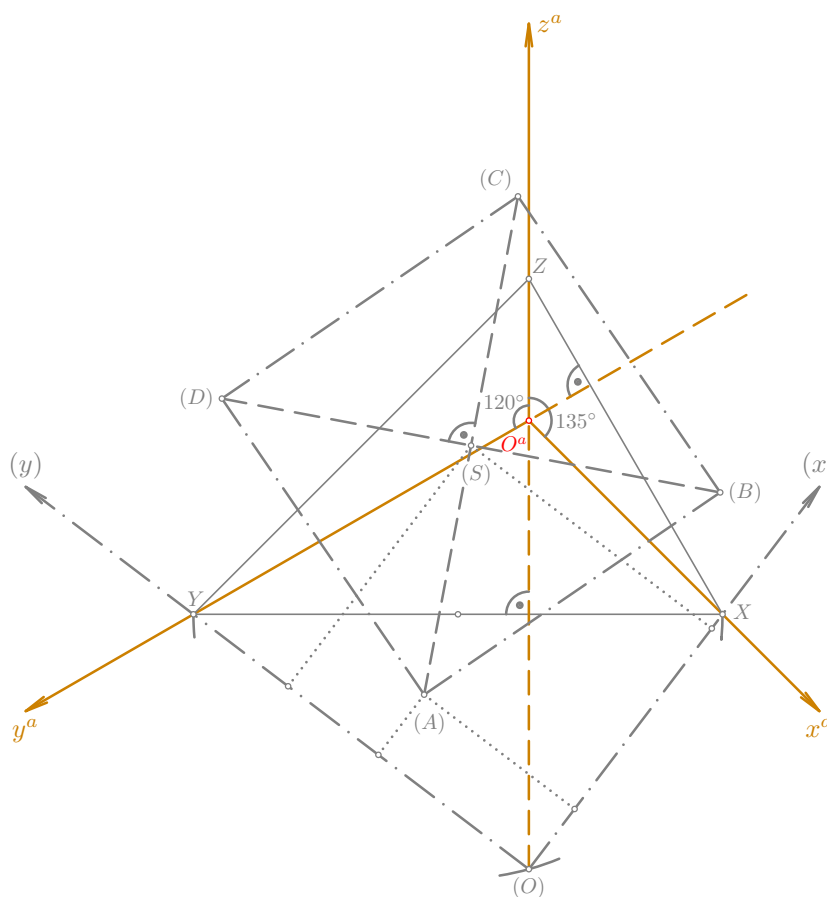
- nyní proved'eme volbu axonometrického trojúhelníka XYZ : nejprve zvolme jeho stranu $XY \perp z^a$, doplníme stranu $XZ \perp y^a$ a potom už je nutně $ZY \perp x^a$; jak bylo uvedeno výše, na velikosti trojúhelníka XYZ nezávisí průmět daného objektu; některé strany se ovšem používají při otáčení souřadnicových rovin do axonometrické průmětny, proto je vhodné nevolit axonometrický trojúhelník příliš velký ani příliš malý



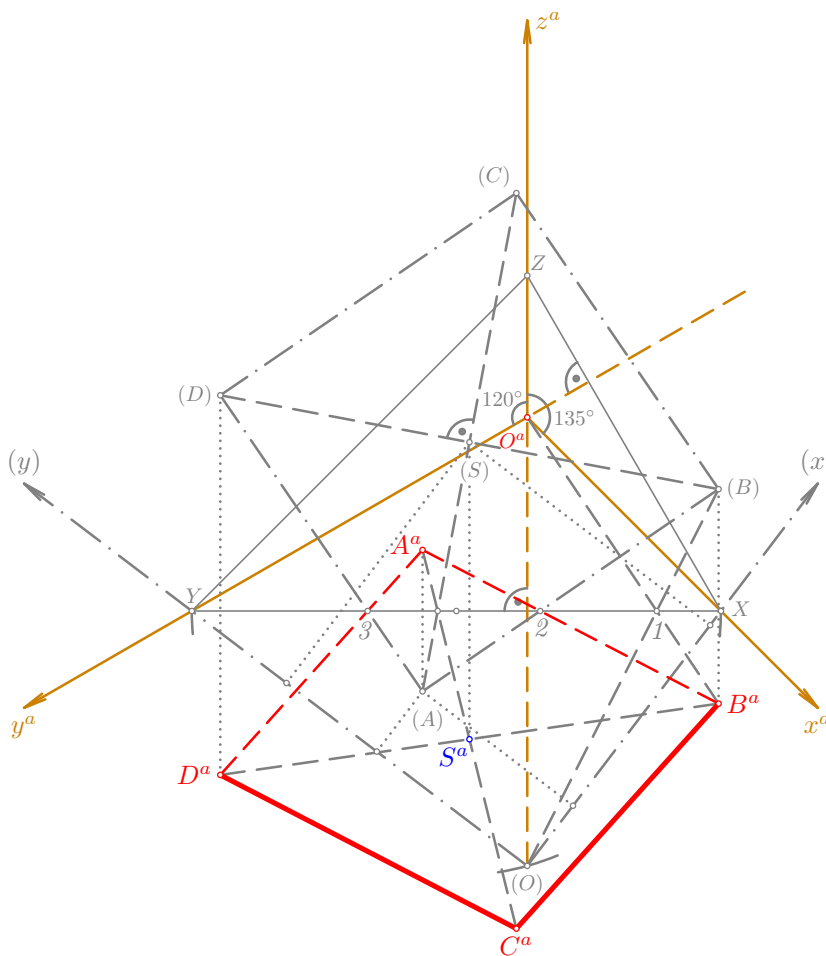
- pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem XY sestrojme otočenou polohu $(O) \in z^a$ počátku O a otočené polohy $(x)=(O)X, (y)=(O)Y$ souřadnicových os x, y ; v otočení vynesme souřadnice zadaného vrcholu A podstavy a středu S podstavy, který leží v π pod vrcholem V a je tudíž $S[4; 4; 0]$; získáme tak jejich otočené polohy $(A), (S)$



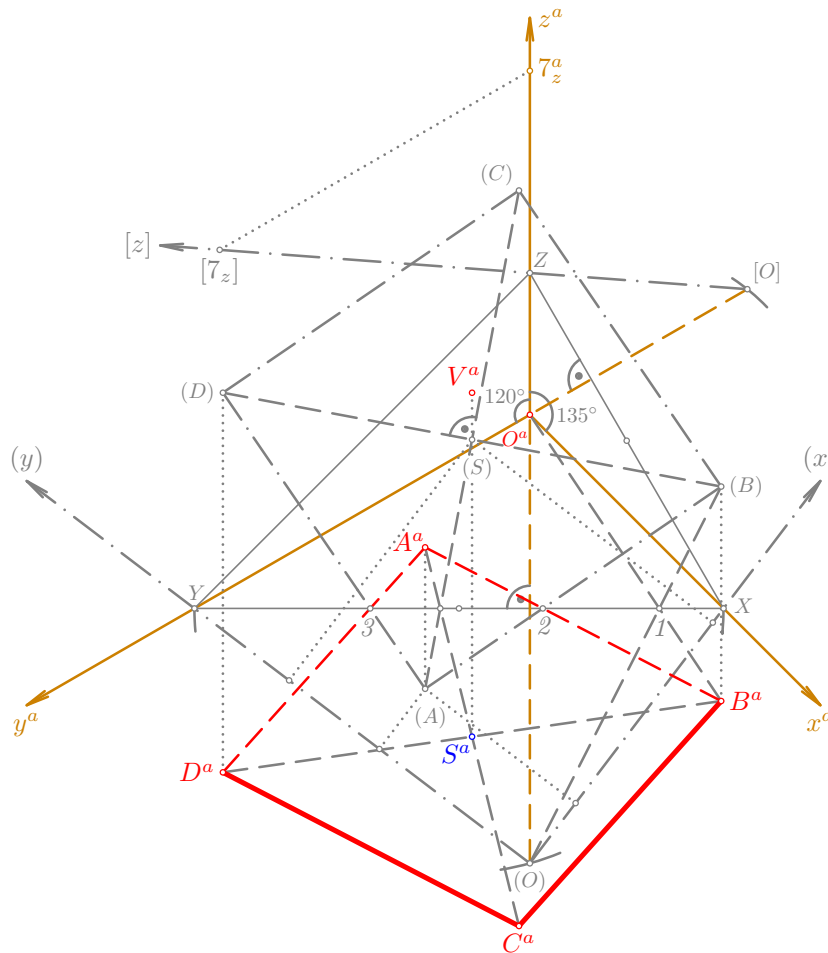
- v otočení doplníme zbývající vrcholy (C) , (B) , (D) čtverce, který je dán středem (S) a vrcholem (A) (v otočení jsou strany čtverce vyrýsovány čerchovaně)



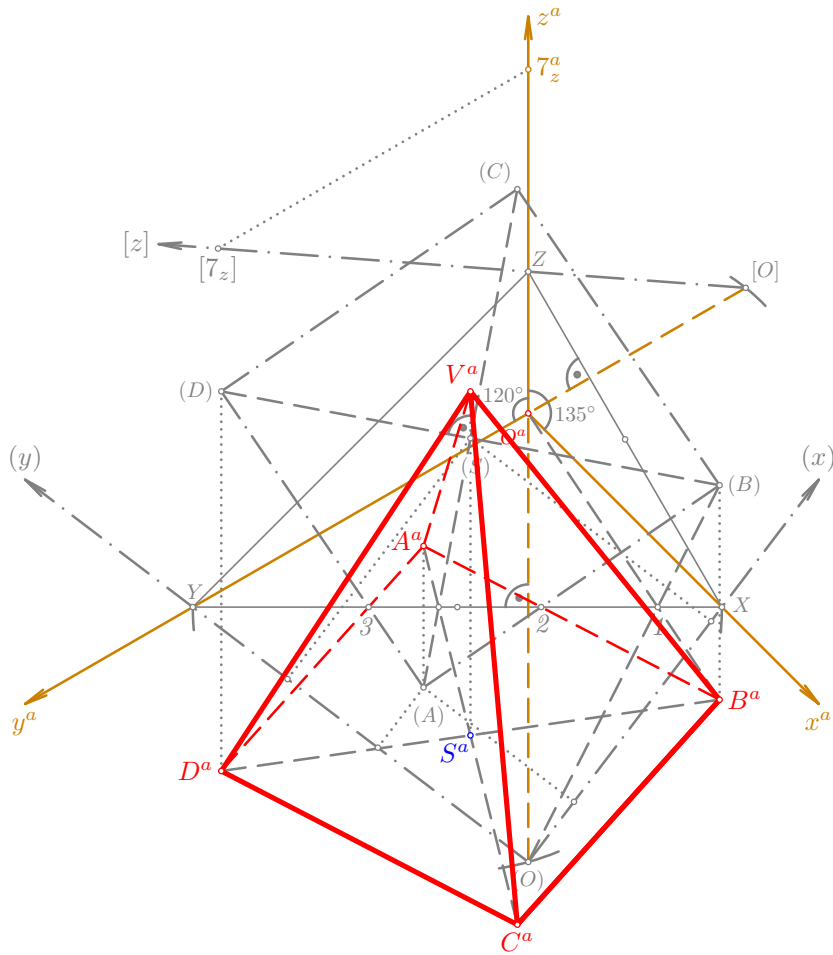
- axonometrické průměty vrcholů čtverce sestojíme užitím kolmé osové afinity, jejíž osou je přímka XY a v níž si odpovídají body (O) a O^a : přímka $(O)(B)$ protíná osu afinity XY v samodružném bodě 1 a průmět B^a vrcholu B je tedy průsečíkem přímky $O^a 1$ s kolmicí k ose afinity vedenou bodem (B) ; analogicky postupujeme dál a pomocí samodružných bodů $2, 3$ doplníme průměty A^a, D^a vrcholů A, D ; pro zachování přesnosti je nyní lepší najít střed S^a úsečky $B^a D^a$ (je také $S^a(S) \perp XY$) a bod C^a sestojit souměrně s bodem A^a podle středu S^a (opět platí $C^a(C) \perp XY$); průmětem čtverce $ABCD$ je tedy rovnoběžník $A^a B^a C^a D^a$ o středu S^a ; viditelnost jeho stran je v obrázku vyznačena již s ohledem na další konstrukce



- zbývá sestrojít hlavní vrchol V : pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem XZ sestrojíme otočenou polohu $[O] \in y^a$ počátku O a otočenou polohu $[z]=[O]Z$ osy z ; v otočení nanese z -ovou souřadnici bodu V ($z_V=7$) a získáme tak bod $[7_z]$; po kolmici k přímce XZ jej vraťme zpět do průmětu do bodu 7_z^a a velikost úsečky $O^a 7_z^a$ (zkrácení sedmi jednotek ve směru průmětu osy z) nanese nad bod S^a , čímž dostaneme hledaný bod V^a ; je tedy $S^a V^a \parallel z^a$ a $|S^a V^a|=|O^a 7_z^a|$

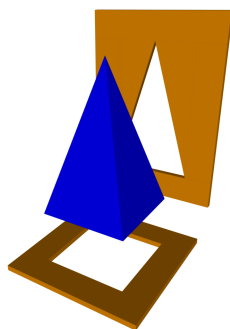


- na závěr vytáhneme průměty zbývajících hran jehlanu s ohledem na viditelnost; zřejmě není vidět vrchol A a žádná hrana, která z něj vychází; i když se to podle průmětu nezdá, sestrojený jehlan je poměrně štíhlý a vysoký – zadaná axonometrie totiž dost zkresluje ve směru průmětu osy z



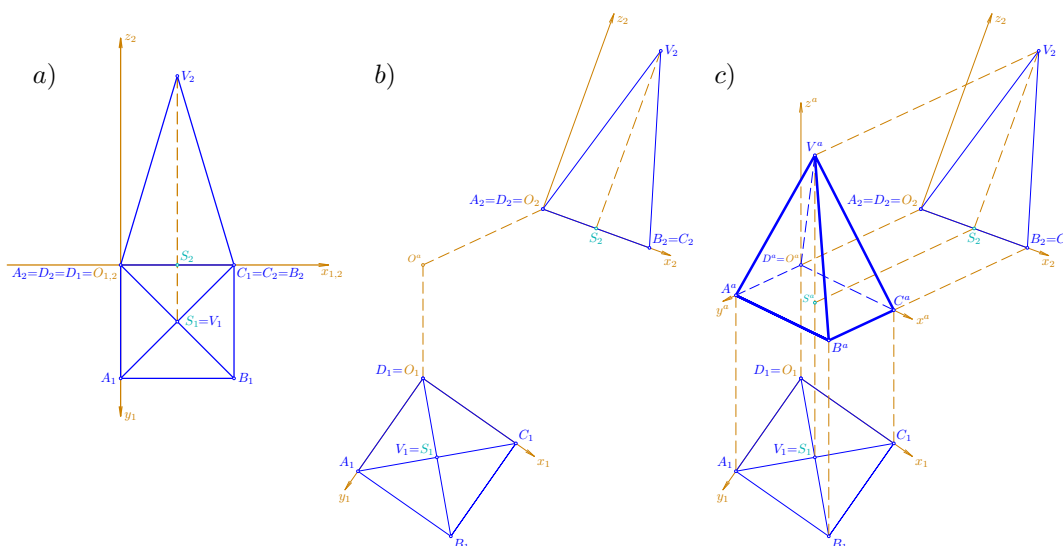
□

4.2. Zářezová (Eckhartova) metoda



Výklad

- mějme dány sdružené průměty nějakého tělesa, např. v obrázku *a*) je dán půdorys a nárys pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$
- odtrhněme od sebe půdorys a nárys, vhodně je pootočíme a zvolme axonometrický průmět jednoho bodu – v obrázku *b*) je to průmět O^a počátku O
- pomocí průsečíků odpovídajících si rovnoběžek s přímkami O_1O^a a O_2O^a provedme **zářez** daného tělesa – viz obrázek *c*)
- získáme tak axonometrický průmět objektu, obecně se ovšem jedná o tzv. **kosoúhlou axonometrii**, u níž může při nevhodné volbě dojít k nepřirozenému zkreslení
- následující příklad ukazuje užití naznačené **zářezové metody** (často také nazývané **Eckhartova metoda**) v pravoúhlé axonometrii

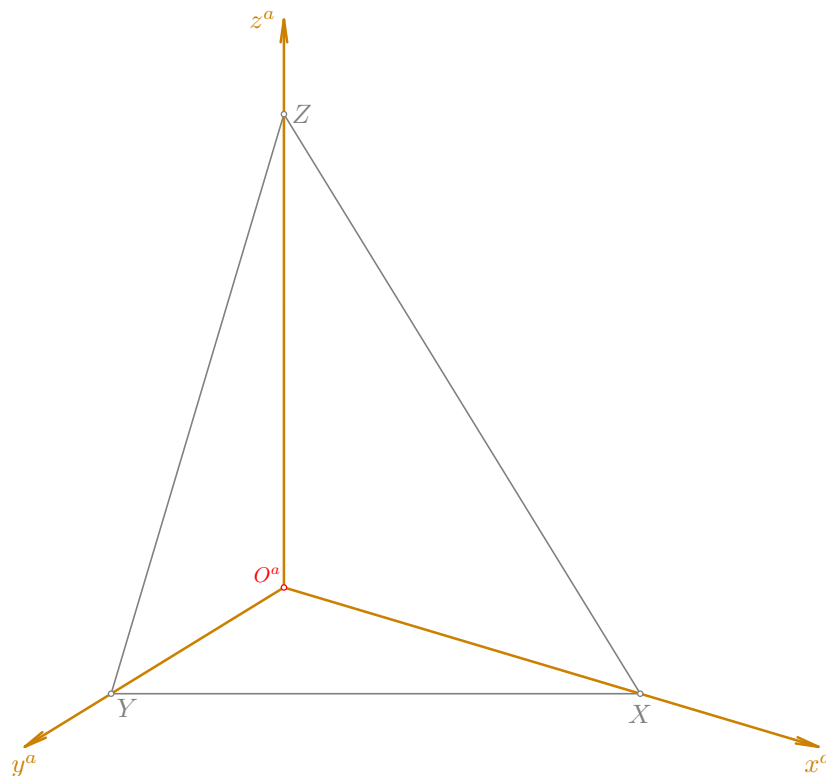


Řešené úlohy

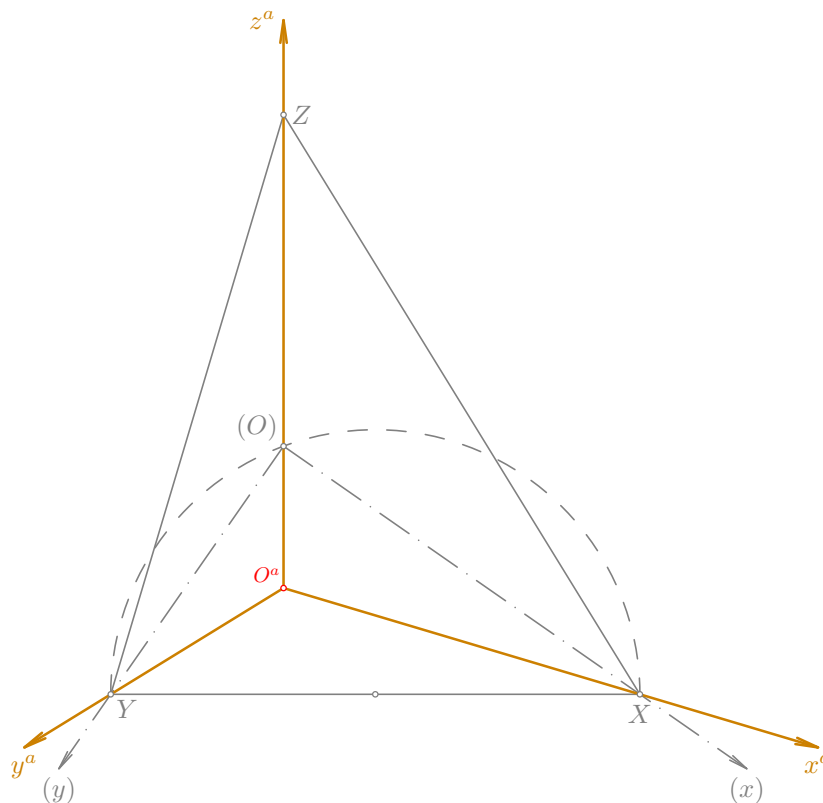


Příklad: V pravoúhlé axonometrii $\triangle(7; 8; 9)$ zobrazte pomocí zářezové metody těleso, jsou-li dány jeho sdružené průměty.

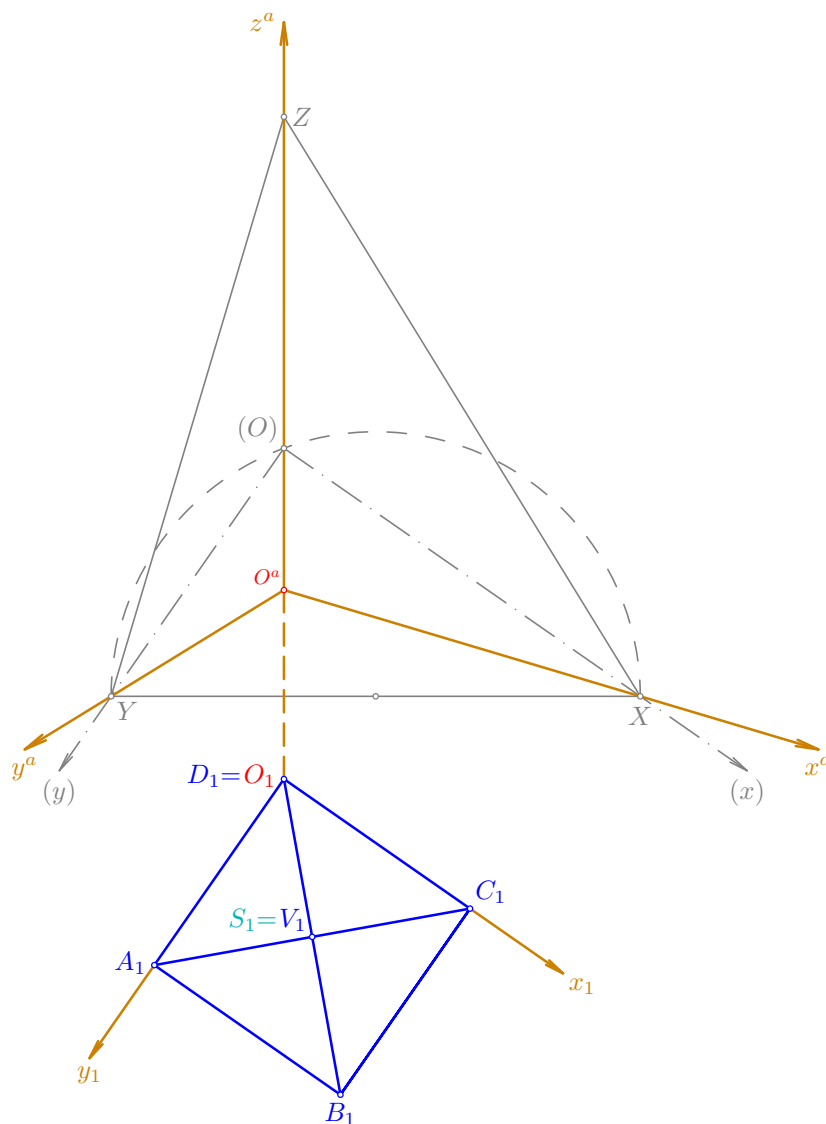
- podle zadání je sestrojen axonometrický trojúhelník XYZ ($|XY|=7$, $|YZ|=8$, $|ZX|=9$) a průměty x^a, y^a, z^a souřadnicových os x, y, z jako jeho výšky (tj. $x^a \perp YZ$ a $X \in x^a$, $y^a \perp XZ$ a $Y \in y^a$, $z^a \perp XY$ a $Z \in z^a$); průmět O^a počátku O je společným průsečíkem přímk x^a, y^a, z^a a tedy tzv. ortocentrem $\triangle XYZ$



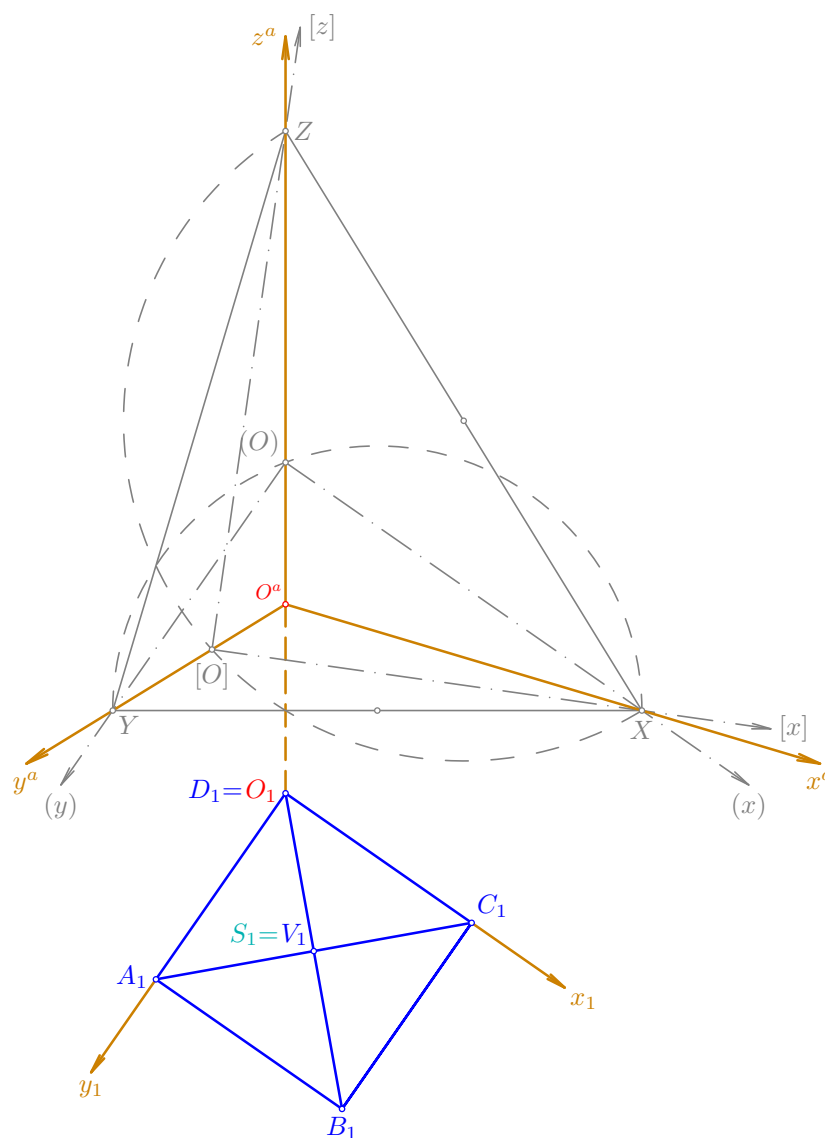
- pomocí Thaletovy půlkružnice nad průměrem XY provedeme otočení půdorysny kolem přímky XY do axonometrické průmětny, podobně jako při přípravě na vynášení souřadnic; v tomto případě ovšem uvažujme otočení o menší úhel a otočenou polohu (O) počátku O sestrojme na kladné části průmětu z^a osy z ; slabě čerchovaně doplníme otočené polohy $(x)=(O)X$, $(y)=(O)Y$ souřadnicových os x, y



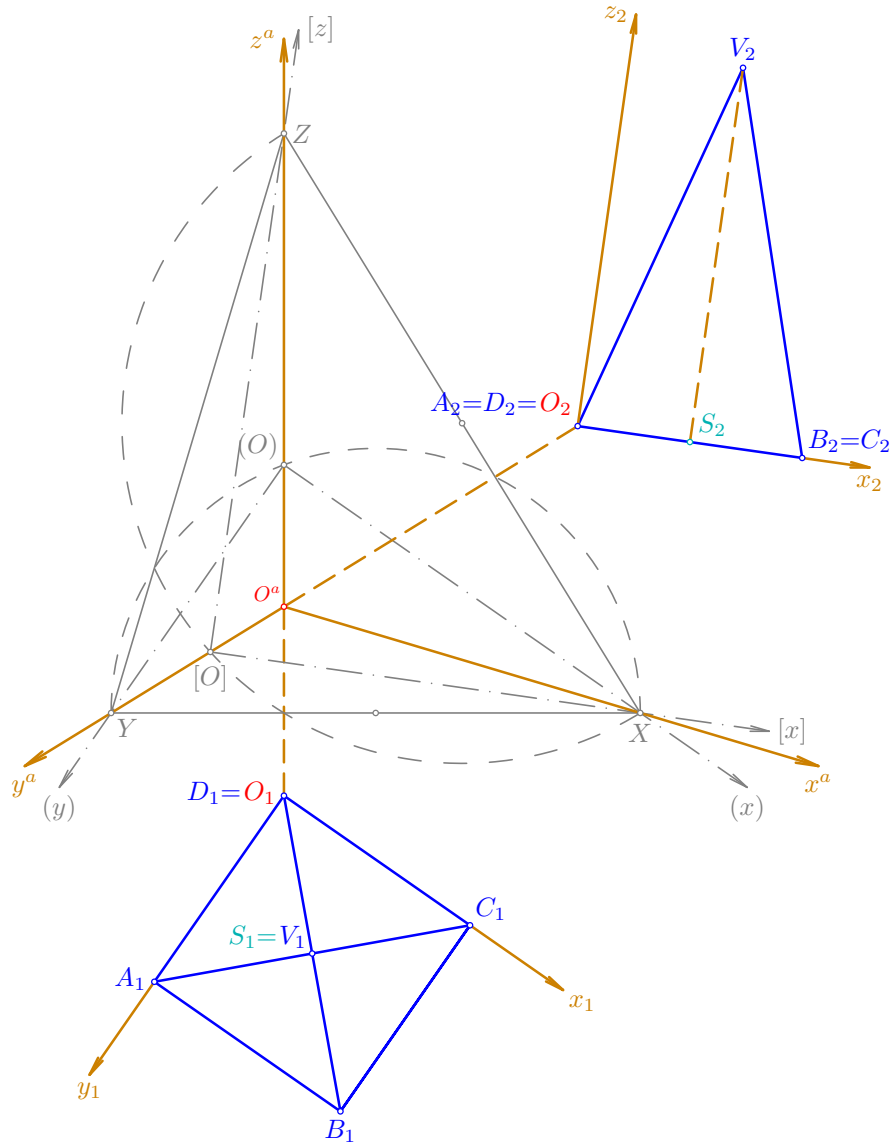
- v pravoúhlé axonometrii se často otočené polohy zobrazovaných útvarů kryjí s výsledným axonometrickým průmětem objektu; abychom se tomu vyhnuli, provedeme pomocné vysunutí otočeného půdorysu ve směru přímky z^a : na záporné části průmětu osy z zvolme pomocný půdorys O_1 a veďme jím pomocné půdorysy $x_1 \parallel (x), y_1 \parallel (y)$; do takto posunutého otočeného půdorysu ještě zakresleme skutečný půdorys daného tělesa – pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$



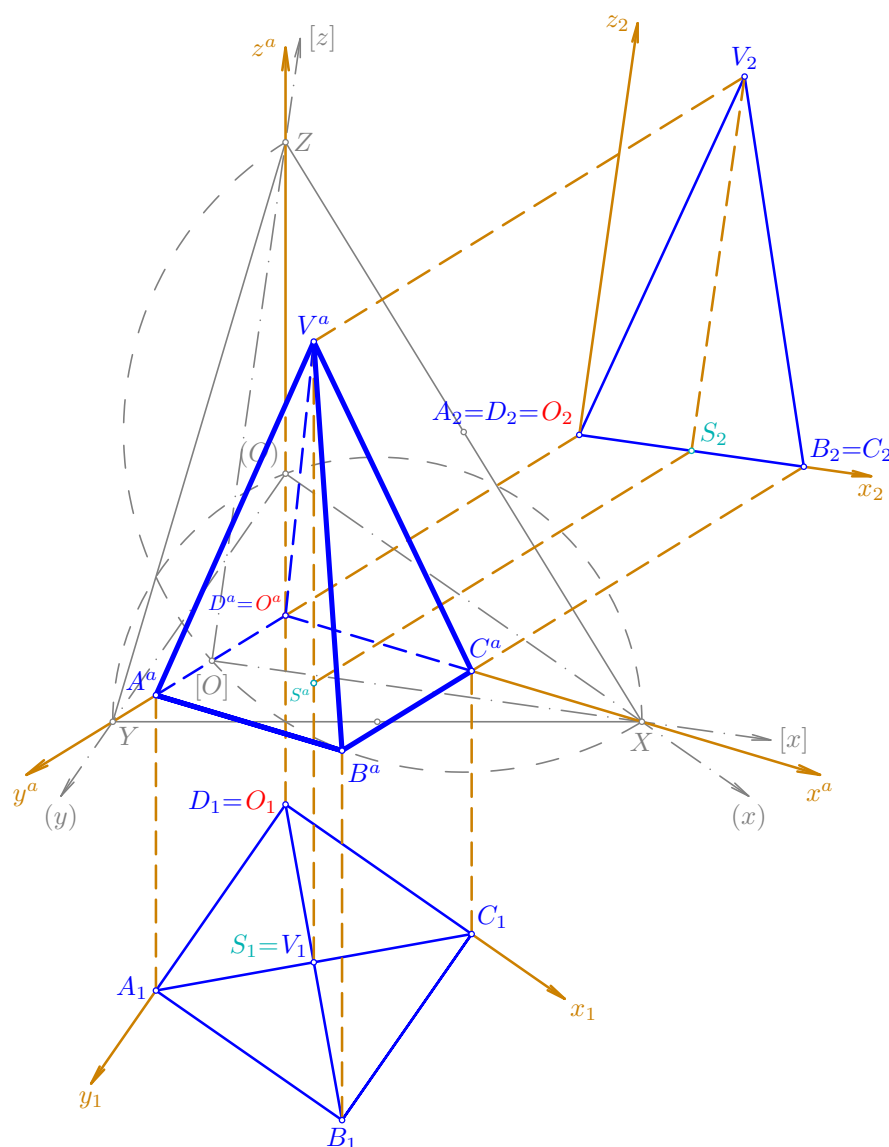
- předchozí dva kroky proved'eme analogicky pro nárys objektu: nejprve připravme otočené polohy $[O]$, $[x]=[O]X$, $[z]=[O]Z$ počátku O a souřadnicových os x, z ; uvažujme otočení nárysny kolem přímky XZ do axonometrické průmětny opět o menší z obou možných úhlů, bod $[O]$ leží tedy na kladné části průmětu y^a osy y a na Thaletově půlkružnici nad průměrem XZ



- na záporné části průmětu y^a osy y zvolme pomocný nárys O_2 počátku O a veďme jím pomocné nárysy $x_2 \parallel [x], z_2 \parallel [z]$; do tohoto vysunutého otočeného nárysu doplňme nezkreslený nárys daného jehlanu $ABCDV$



- nyní je vše připraveno pro konečný zářez tělesa z jeho vysunutého otočeného půdorysu a nárysu; konstrukci popíšeme pro hlavní vrchol V jehlanu, průměty ostatních vrcholů se sestrojí analogicky: pomocným půdorysem V_1 veďme rovnoběžku s přímkou z^a , pomocným nárysem V_2 veďme rovnoběžku s přímkou y^a a průsečík těchto rovnoběžek je axonometrickým průmětem V^a vrcholu V ; podobně najdeme průměty zbývajících vrcholů; na závěr vytáhneme průměty viditelných hran tlustě a průměty neviditelných hran čárkovaně



□

Křivky

Tematický obsah

- Kuželosečky
 - Definice a ohniskové vlastnosti elipsy
 - Afinní vztah kružnice a elipsy (trojúhelníková, proužkové a Rytzova konstrukce)
 - Definice a ohniskové vlastnosti hyperboly
 - Definice, ohniskové vlastnosti a jedna užitečná konstrukce paraboly
 - Konstrukce kuželoseček z daných podmínek
- Šroubovice
 - Šroubovice v Mongeově promítání
- Úlohy k samostatnému řešení

1. Kuželosečky

Výklad

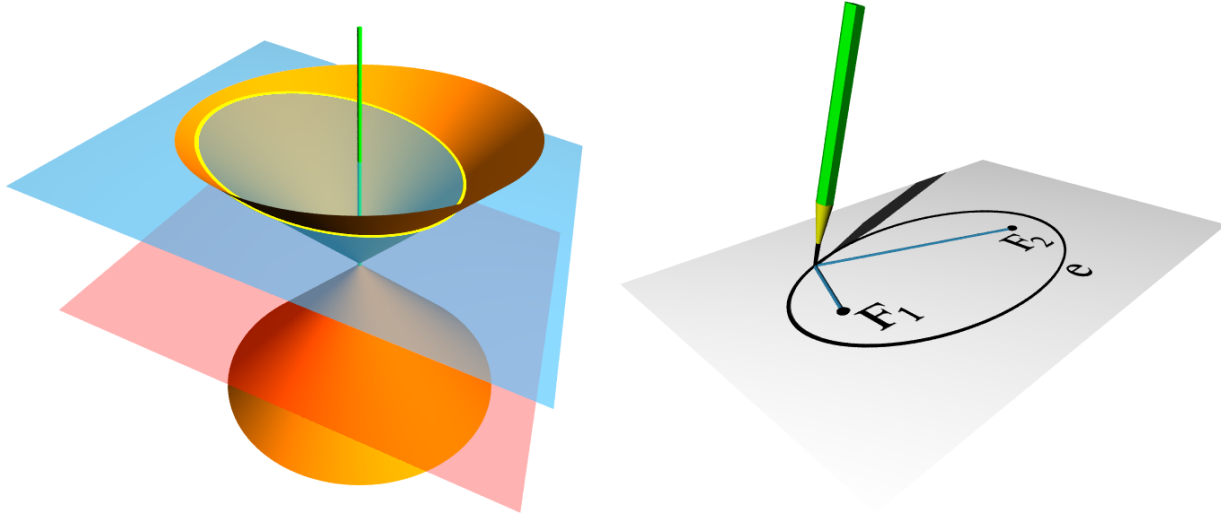
- souhrnný název pro křivky, které se objevují při rovinných řezech na rotační kuželové ploše
- dále jsou uvedeny pouze tzv. regulární kuželosečky (vyjma kružnice), jejichž rovina neprochází vrcholem kuželové plochy
- pro naše potřeby jsou však na následujících stránkách tyto křivky definovány přímo v rovině pomocí tzv. **ohniskových definic**



1.1. Elipsa



Výklad



1.1.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice (viz obrázek vlevo nahoře):* **elipsa** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řzná rovina není kolmá k ose rotační kuželové plochy a rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem má s kuželovou plochou společný pouze vrchol (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je větší než odchylka povrchových přímk)
- *ohnisková definice (viz obrázek vpravo nahoře, který ukazuje tzv. **zahradnickou konstrukci** elipsy):* **elipsa** e je množinou všech bodů v dané rovině ρ , jejichž součet vzdáleností od dvou různých pevných bodů F_1, F_2 je roven danému číslu $2a$, které je větší než vzdálenost bodů F_1, F_2 ; symbolicky zapsáno:

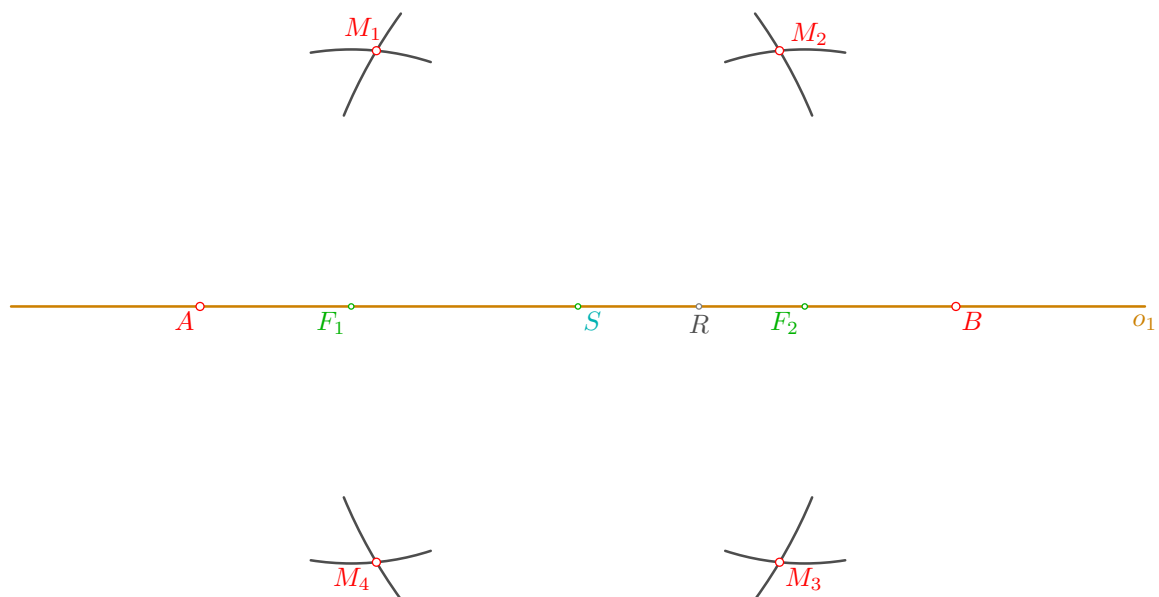
$$e = \{X \in \rho; |F_1X| + |F_2X| = 2a, 0 < |F_1F_2| < 2a\}$$

Konstrukce a základní pojmy

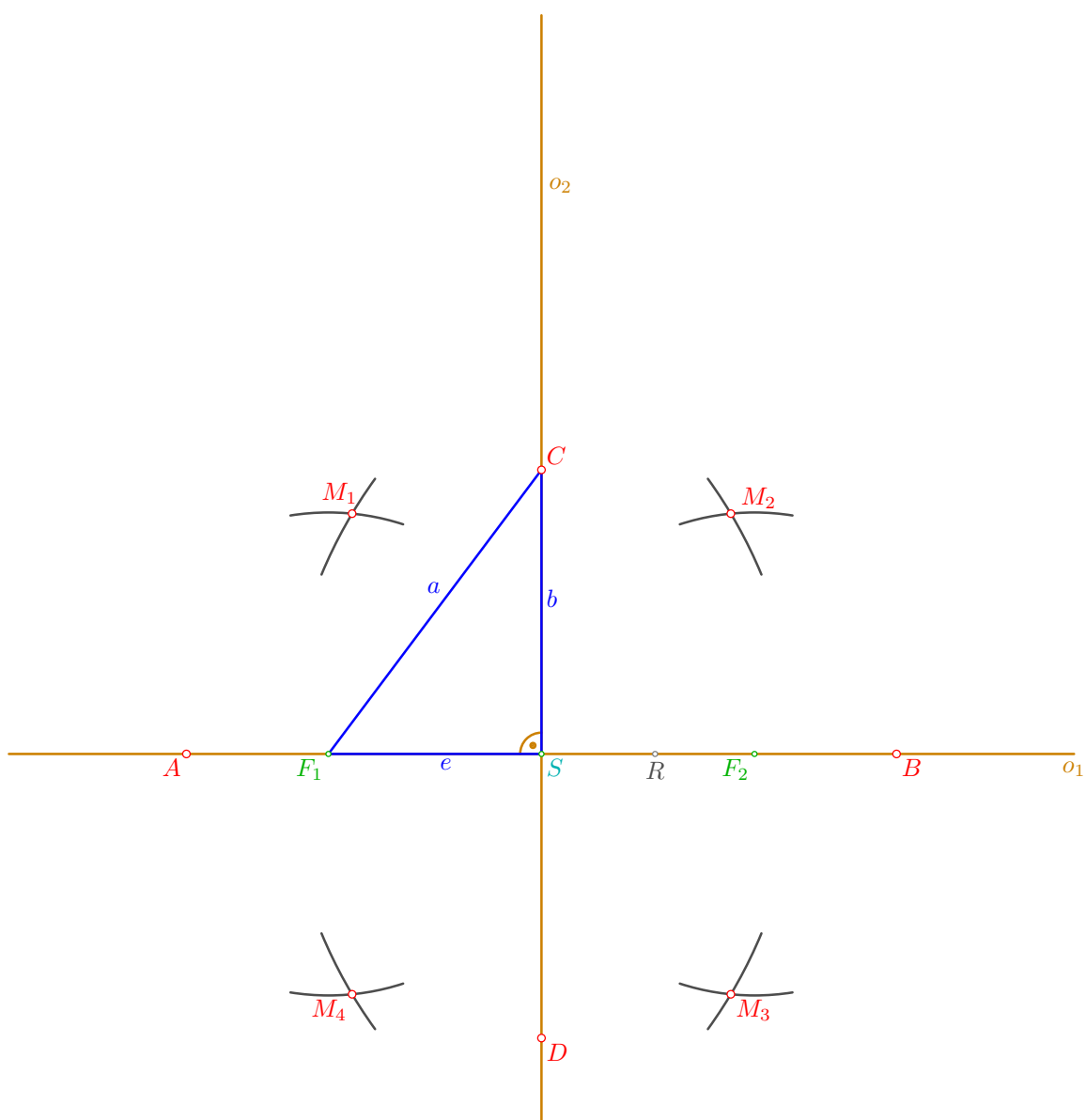
- na vodorovné přímce o_1 zvolme bod S a od něj na obě strany souměrně nanesme dvě libovolně zvolené vzdálenosti; bližší body označme F_1, F_2 a nazvěme je **ohnisky** elipsy, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; vzdálenější body označme A, B a necht' pro jejich vzdálenost platí $|AB| = 2a$; pak je $|F_1A| + |F_2A| = |F_1A| + |F_1B| = 2a$, a podle definice je bod A bodem elipsy e ; totéž lze ukázat pro bod B a body A, B se nazývají **hlavní vrcholy** elipsy (elipsa v nich má největší křivost); přímka $o_1 = AB = F_1F_2$ je **hlavní osa** elipsy a bod S je její **střed** (elipsa je podle něj středově souměrná)



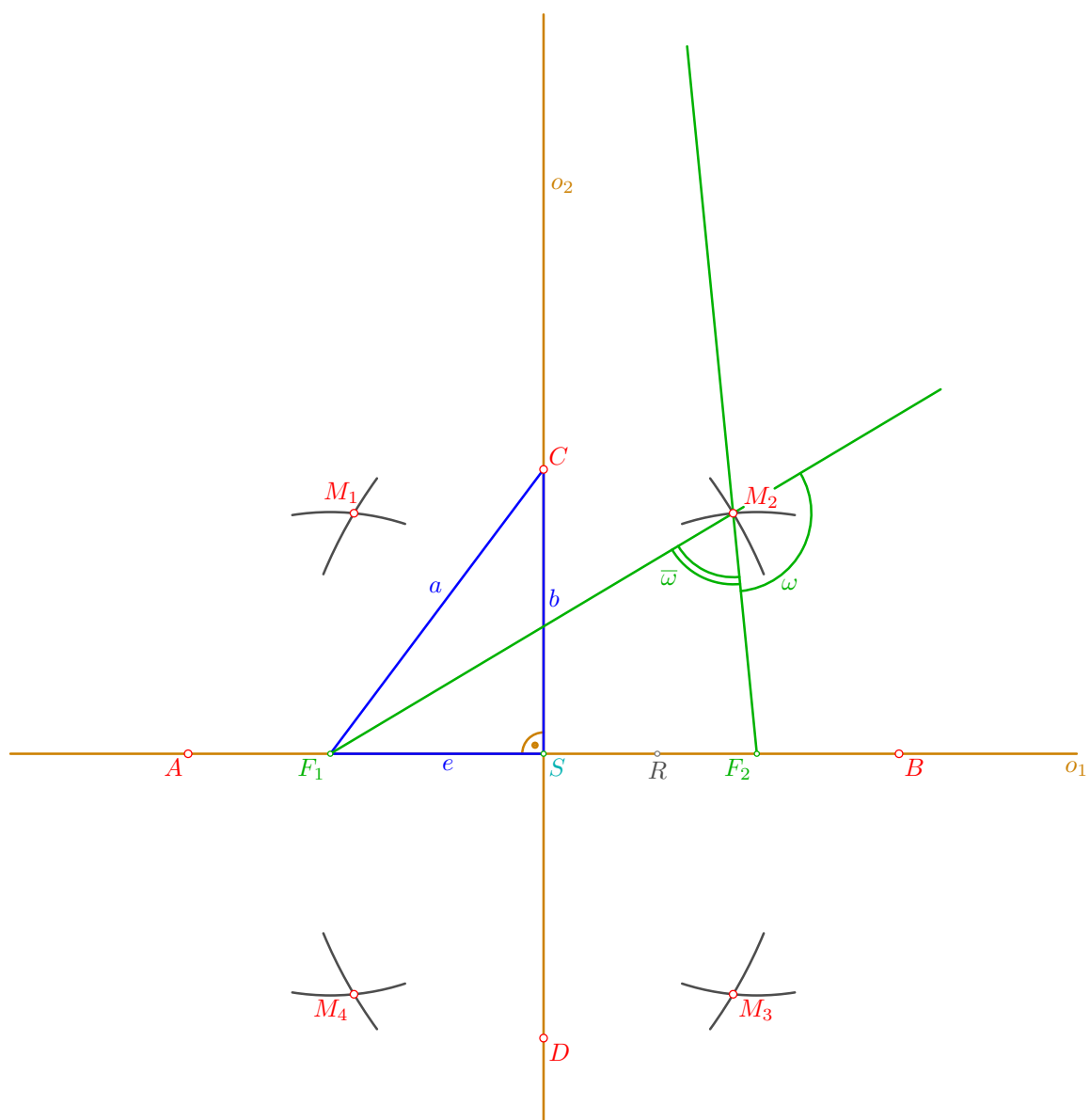
- sestrojme další **obecné body** elipsy: na úsečce F_1F_2 zvolme pomocný bod R , vezměme do kružítka poloměr délky $|AR|$ a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek F_1, F_2 ; změňme poloměr na délku $|RB|$ a provedme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body M_1, M_2, M_3, M_4 , kde např. pro M_2 platí $|F_1M_2| + |F_2M_2| = |AR| + |RB| = 2a$ (analogicky pro M_1, M_3, M_4); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body elipsy e ; zvolíme-li bod R v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem hlavní vrcholy A, B ; při volbě bodu R (na hlavní ose o_1) mimo úsečku F_1F_2 se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body elipsy



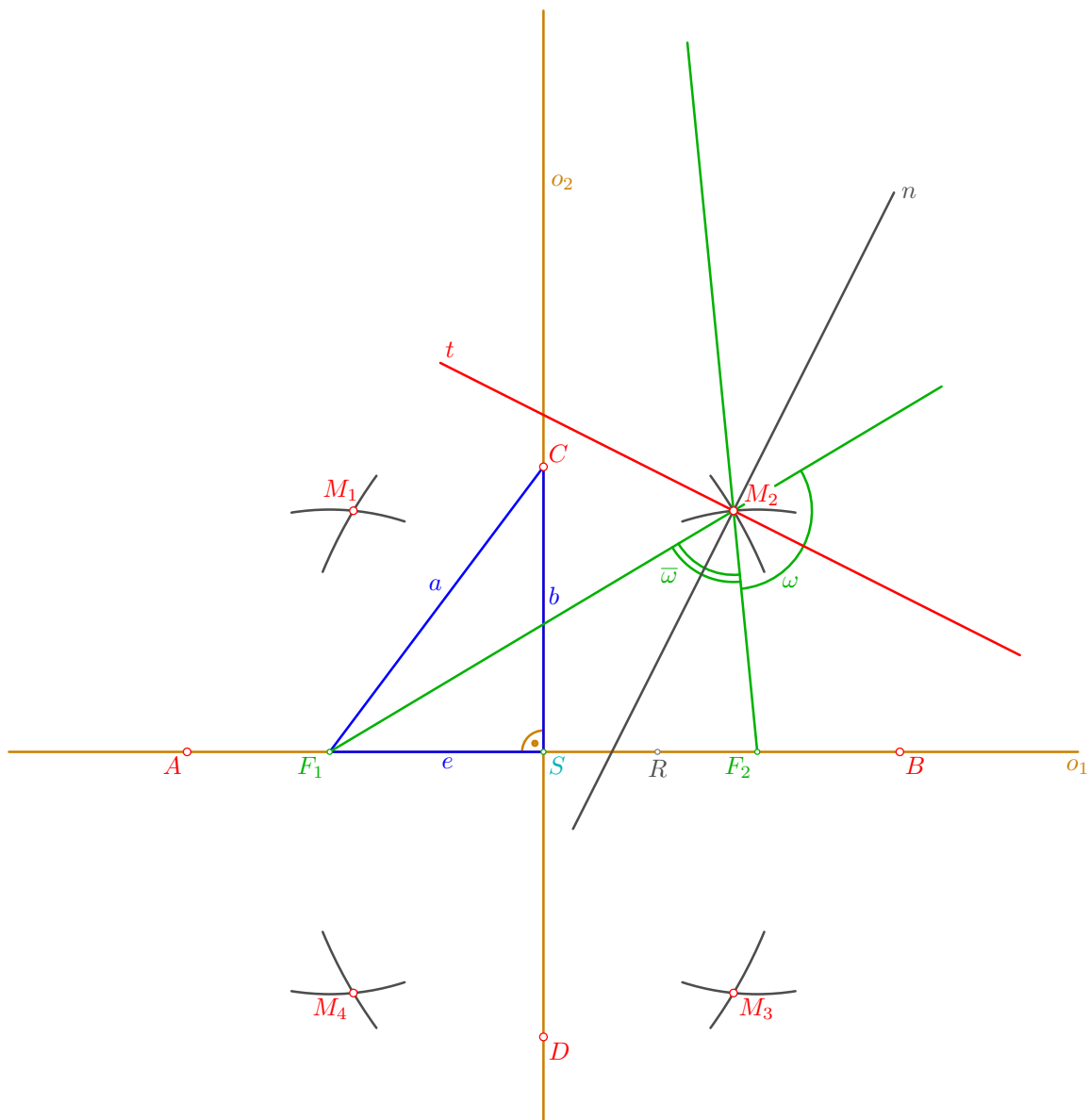
- provedeme-li předchozí konstrukci pro $R = S$, získáme pouze dva body – **vedlejší vrcholy** C, D elipsy, které leží na **vedlejší ose** $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; délka $a = |SA|$ se nazývá **délka hlavní poloosy** a objevuje se také jako délka přepony F_1C v tzv. **charakteristickém trojúhelníku** F_1SC elipsy; délka jeho odvěsny SC se nazývá **délka vedlejší poloosy** $b = |SC|$ a délka odvěsny F_1S udává tzv. **excentricitu** (výstřednost) $e = |F_1S|$ elipsy (pro $e \rightarrow 0$ se elipsa blíží kružnici, naopak pro $e \rightarrow a$ se elipsa blíží k úsečce); z pravoúhlého trojúhelníka F_1SC a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou elipsy: $a^2 = e^2 + b^2$



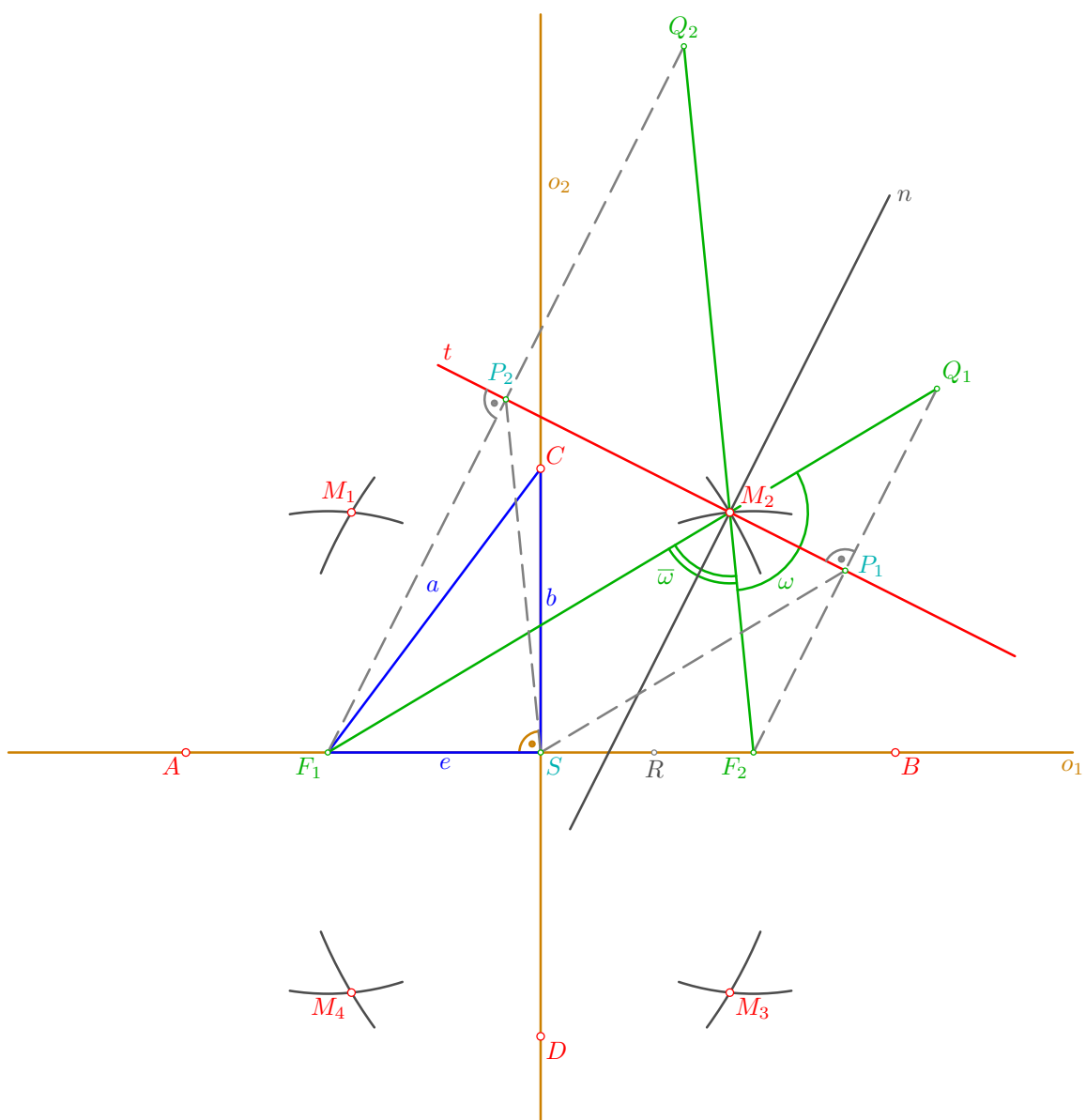
- pro další konstrukce vyberme např. bod M_2 a sestrojme přímky F_1M_2, F_2M_2 , což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_2 ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed S (nebo úhel k němu vrcholový) označme $\bar{\omega}$ a nazvěme ho **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_2 ; některý z úhlů vedlejších k úhlu $\bar{\omega}$ označme ω a řekněme mu **vnější úhel průvodičů** bodu M_2



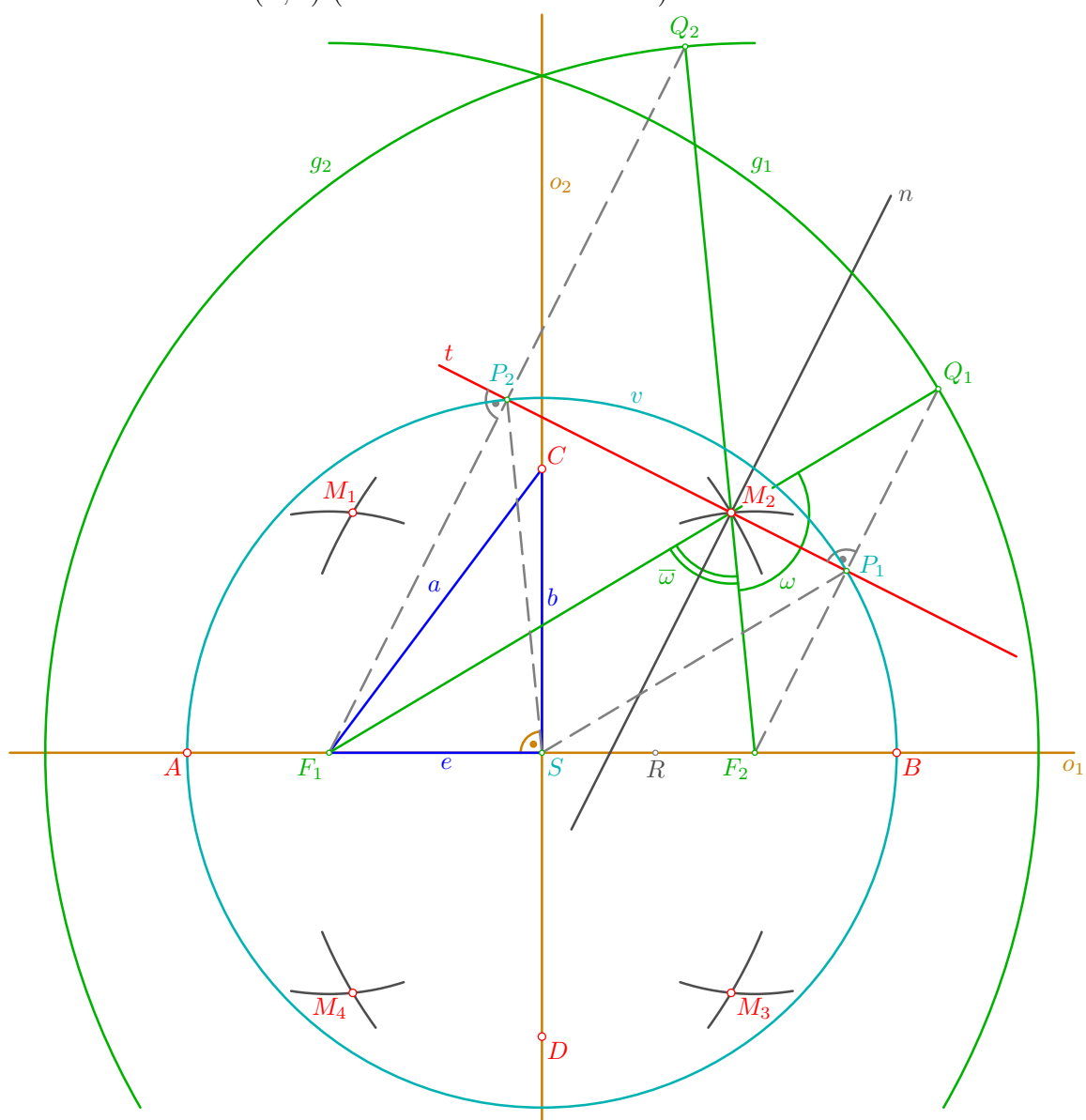
- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_2 je současně **tečnou** elipsy v bodě M_2 ; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** elipsy v bodě M_2 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_2 ; to platí v každém bodě elipsy a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené **Větě 1** (na straně 184)



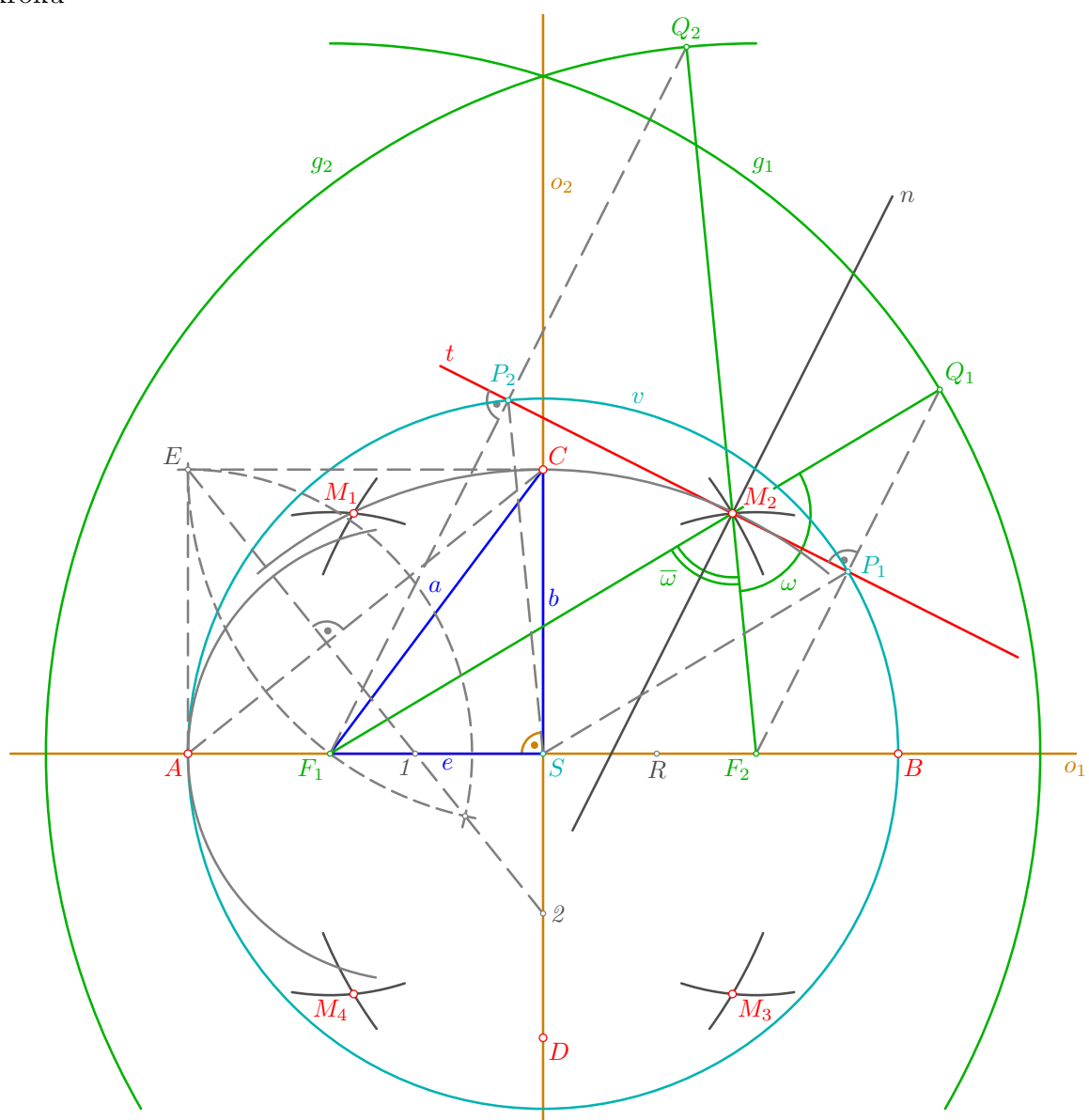
- na základě předchozího odvoďme další vlastnosti elipsy: sestrojme body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohnisky F_2, F_1 podle tečny t a označme příslušné paty P_1, P_2 kolmic Q_1F_2, Q_2F_1 spuštěných z ohnisek F_2, F_1 na tečnu t (tj. středy úseček Q_1F_2, Q_2F_1); z osové souměrnosti průvodičů bodu M_2 podle tečny t plyne, že bod Q_1 leží na přímce F_1M_2 a bod Q_2 padne na průvodič F_2M_2



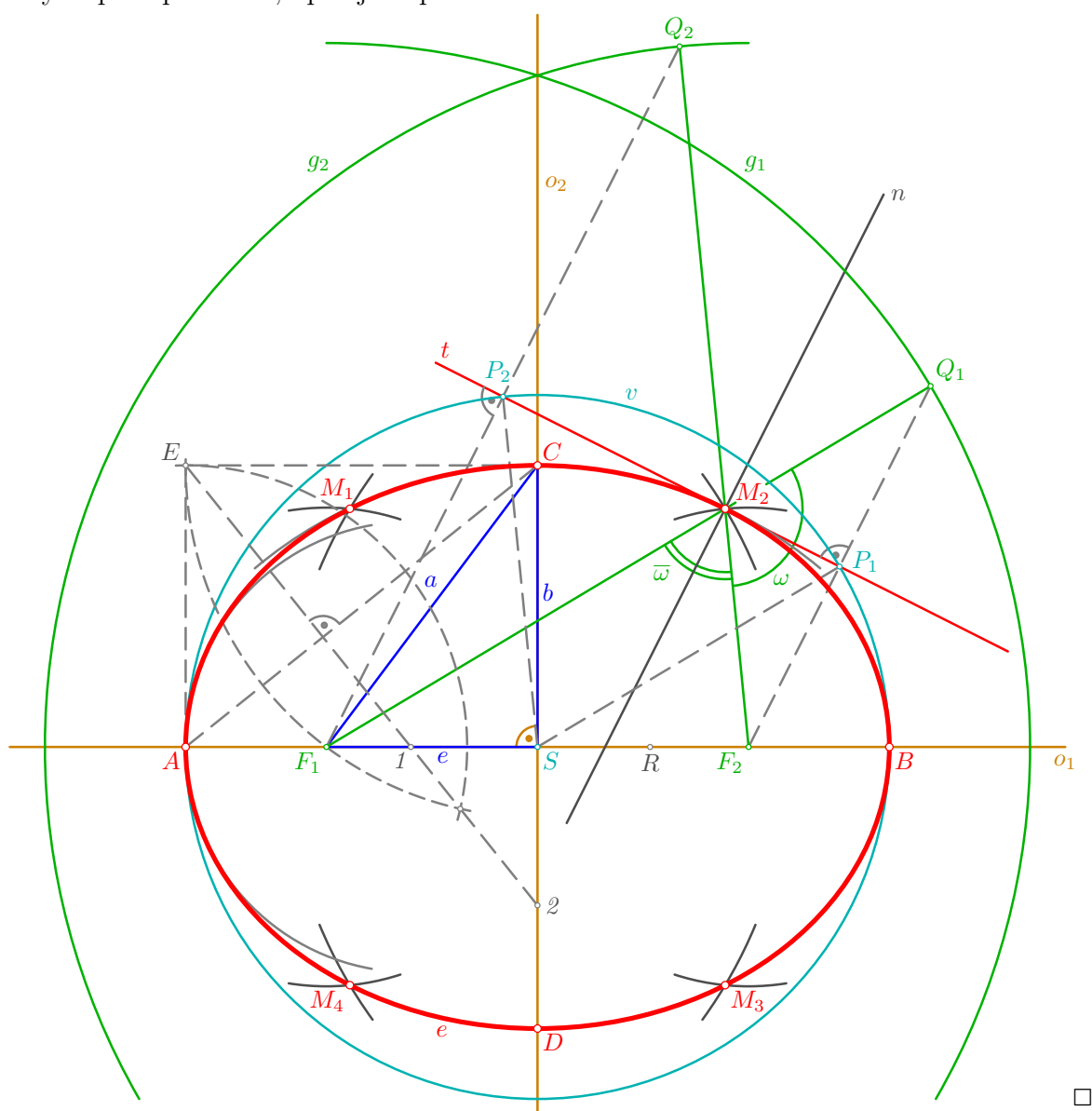
- díky osové souměrnosti je $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$, a tudíž platí $|F_1Q_1| = |F_1M_2| + |M_2Q_1| = |F_1M_2| + |M_2F_2| = 2a$; totéž lze ukázat v každém bodě elipsy, a všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle tečen elipsy tedy leží na tzv. **řídící kružnici** $g_1(F_1, 2a)$; analogicky dostaneme $|F_2Q_2| = 2a$ a můžeme sestavit druhou řídící kružnici $g_2(F_2, 2a)$, na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_1 podle tečen elipsy (viz **Věta 2** na straně 184); úsečky SP_1, SP_2 jsou po řadě střední příčky trojúhelníků $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$ a pro jejich délky tedy platí: $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$; obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny leží na tzv. **vrcholové kružnici** $v(S, a)$ (viz **Věta 3** na straně 184)



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování elipsy sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: trojúhelník ASC doplníme na obdélník $ASCE$, vrcholem E vedme kolmici k úhlopříčce AC a určíme její průsečíky $1, 2$ s hlavní a vedlejší osou elipsy; bod 1 , resp. 2 , je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu A , resp. ve vrcholu C (oblouky ve vrcholech B, D doplníme souměrně podle středu S , konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh elipsy v blízkém okolí vrcholů a jejich konstrukce výrazně přispěje k vytažení souměrné křivky (a ne nějaké „brambory“); alternativní způsob konstrukce bodů $1, 2$ je popsán v následujícím kroku



- body $1, 2$ je možné sestrojít také takto: kolem vedlejšího vrcholu C opišme oblouk kružnice o poloměru $a = |SA|$ (prochází oběma ohnisky) a protněme jej obloukem kružnice o poloměru $b = |SC|$ opsaným kolem hlavního vrcholu A ; přímka, která spojuje průsečíky sestrojených oblouků (jedním z nich je bod E), je pak kolmice k přímce AC (kterou při použití tohoto způsobu není potřeba sestrojovat) a ta protíná hlavní a vedlejší osu elipsy v bodech $1, 2$; na závěr je vytažena elipsa e , což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka, anebo užitím tzv. **zahradnické konstrukce**: dva konce provázku délky $|AB| = 2a$ se upevní do ohnisek a pohybující se hrot tužky, který napíná provázek, opisuje elipsu...



□

Věta 1

Tečna (normála) v bodě elipsy pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

Věta 2

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je řídicí kružnice elipsy o středu ve druhém ohnisku a poloměru $2a$.

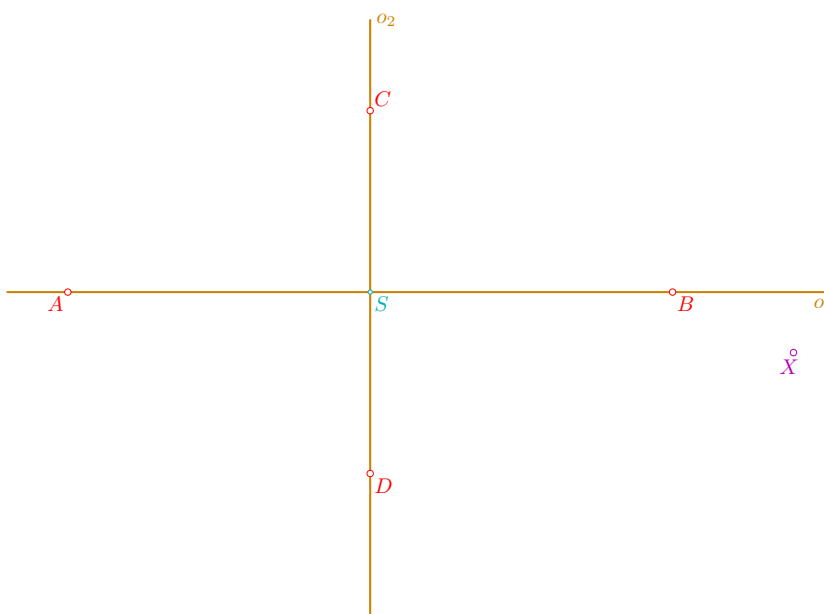
Věta 3

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je vrcholová kružnice elipsy.

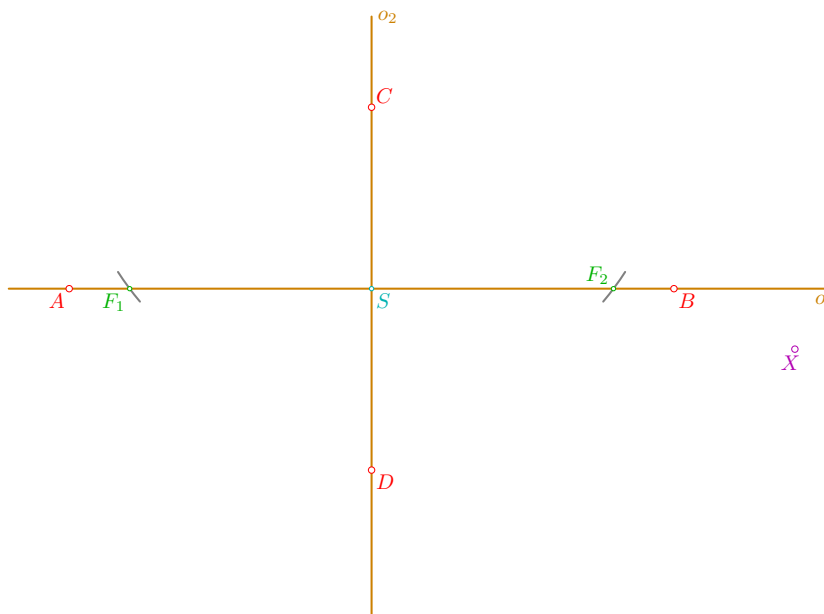
**Řešené úlohy****Tečny k elipse daným bodem**

Příklad: Bodem X veďte tečny k nenarýsované elipse e , která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy.

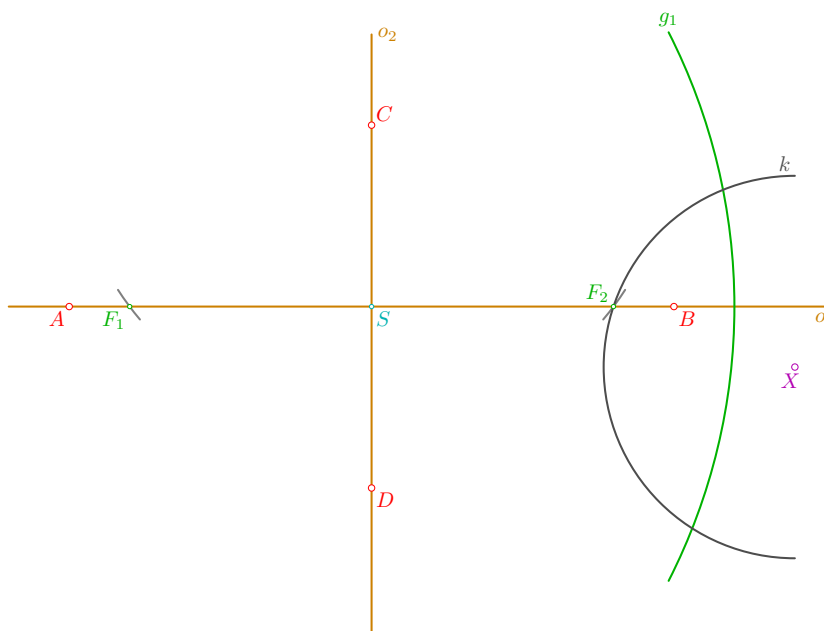
- zvolme střed S , vodorovně hlavní osu o_1 , na ní hlavní vrcholy A, B , svisle vedlejší osu $o_2 \perp o_1$ a na ní vedlejší vrcholy C, D ; rovněž zvolme bod X , z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané elipse



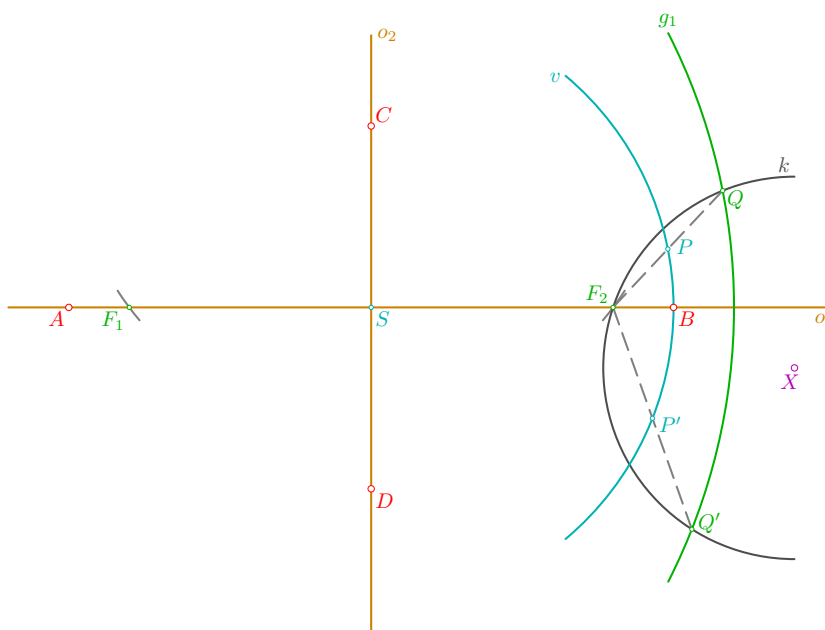
- nejprve doplníme ohniska F_1, F_2 elipsy: ta leží na hlavní ose o_1 a na kružnici o poloměru $a = |SA|$ opsané kolem vedlejšího vrcholu C , tj. platí $|F_1C| = |F_2C| = a$



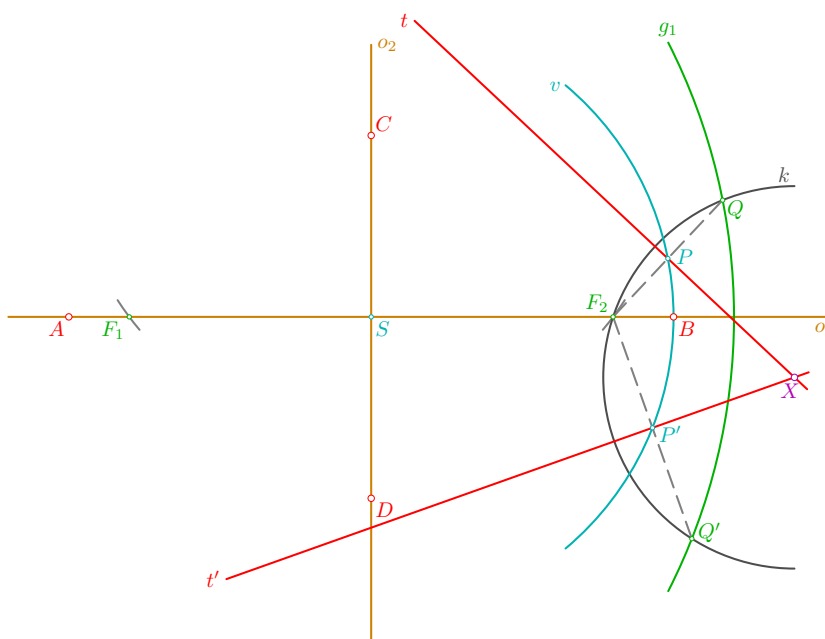
- podle **Věty 2** (na straně 184) leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí mít od bodu X vzdálenost $|F_2X|$, a musí tedy ležet také na kružnici $k(X, |F_2X|)$



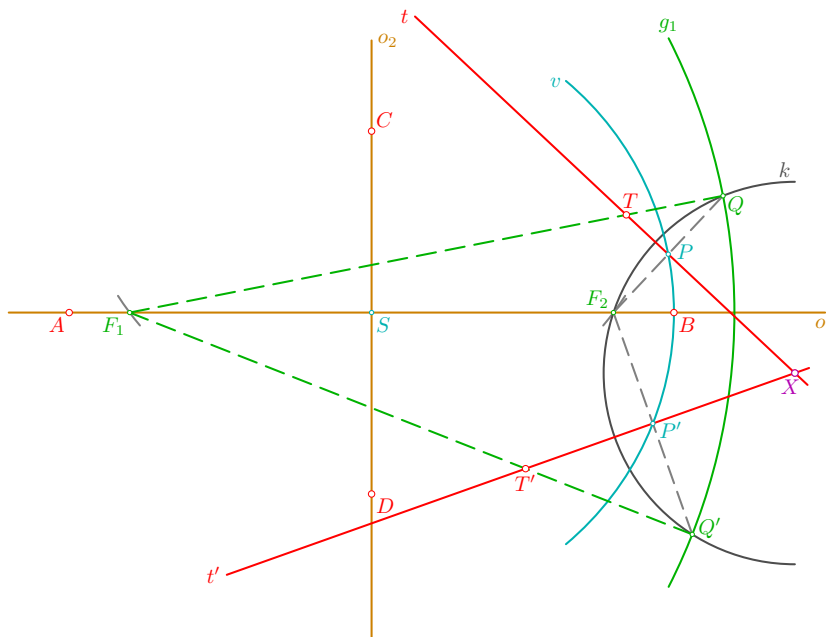
- kružnice g_1, k se protínají v bodech Q, Q' ; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 184) leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$



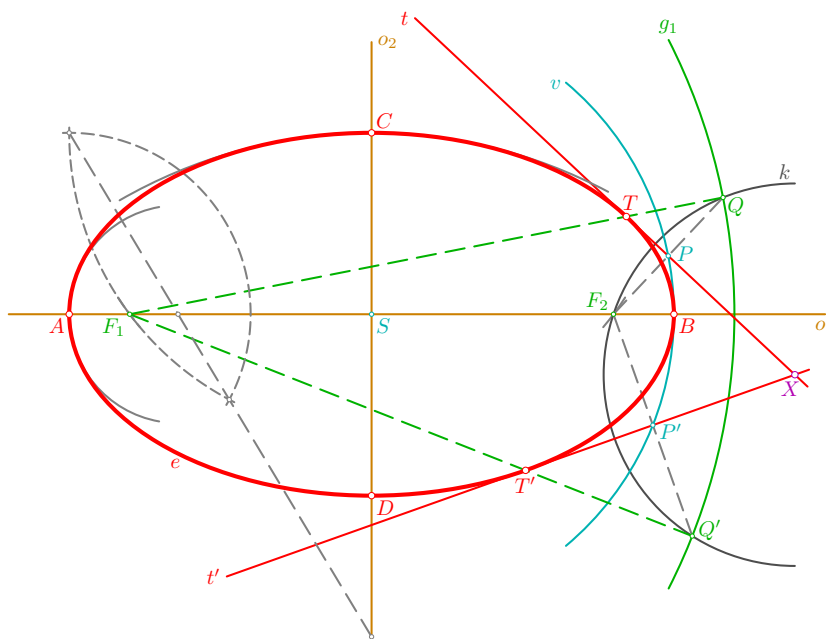
- nyní již můžeme sestrojít tečny $t = XP, t' = XP'$, pro které platí: $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s elipsou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q , resp. přímka F_1Q' , je vlastně jedním z průvodičů bodu T , resp. bodu T'



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu e , která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



□

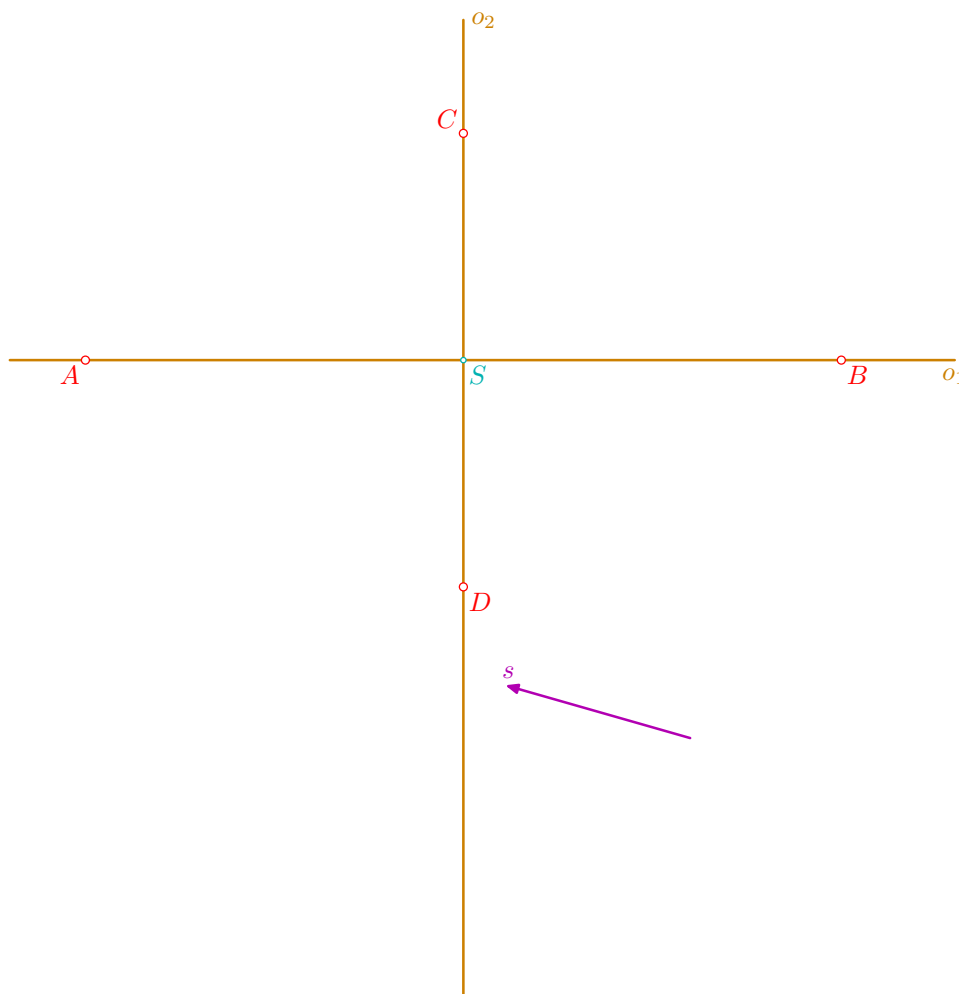
Alternativní způsob řešení: vystačíme pouze s vlastnostmi **Věty 3** (na straně 184), tj. s nalezením pat P, P' kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny; body P, P' musí ležet na vrcholové kružnici $v(S, a)$ a současně na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem F_2X ; pro body T, T' dotyku pak platí: $T \in t, F_1T \parallel SP$ a $T' \in t', F_1T' \parallel SP'$; roli obou ohnisek lze také prohodit, záleží na konkrétním zadání a velikosti nákresny; zkuste si jako cvičení. . .

Diskuze: pokud se kružnice $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$ (případně $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti elipsy e , resp. bod X je bodem elipsy e , resp. bod X leží ve vnitřní oblasti elipsy e , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané elipse e . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice $v(S, a)$ a Thaletovy kružnice nad průměrem F_2X nebo F_1X .

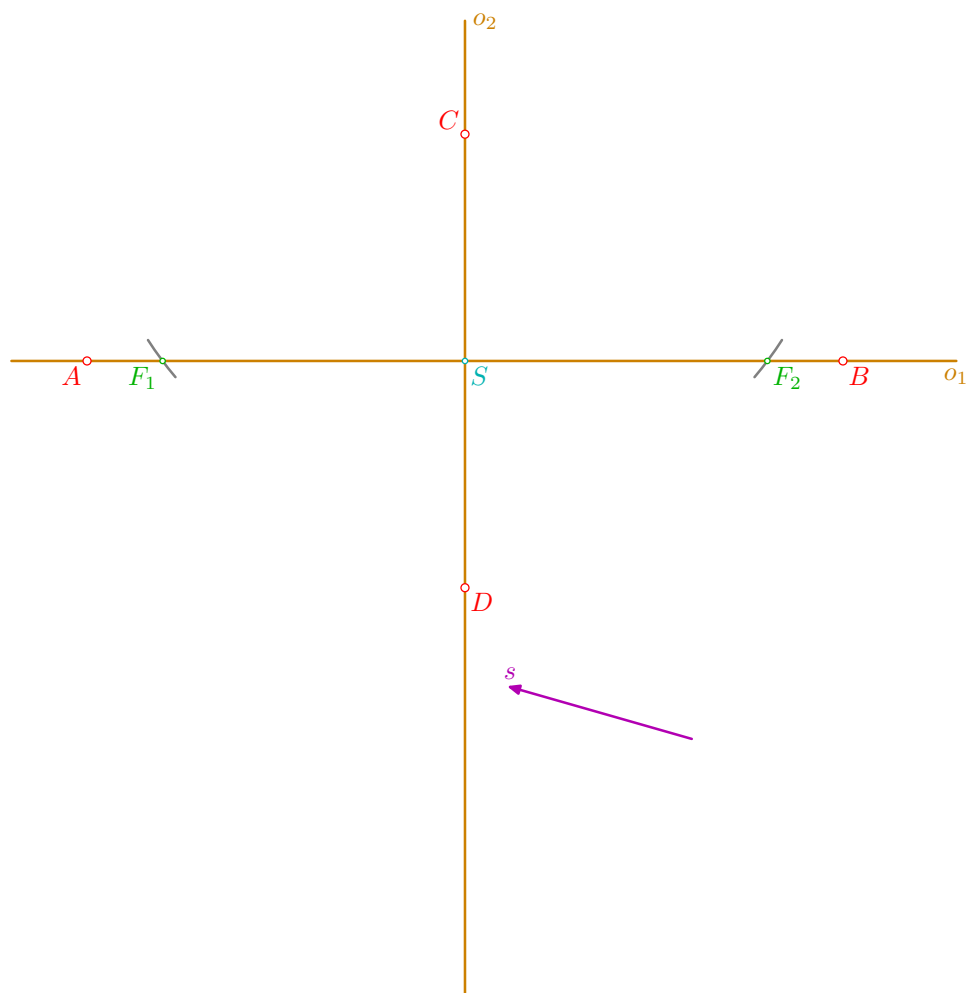
Tečny k elipse daného směru

Příklad: K nenarýsované elipse e , která je dána hlavními a vedlejšími vrcholy, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

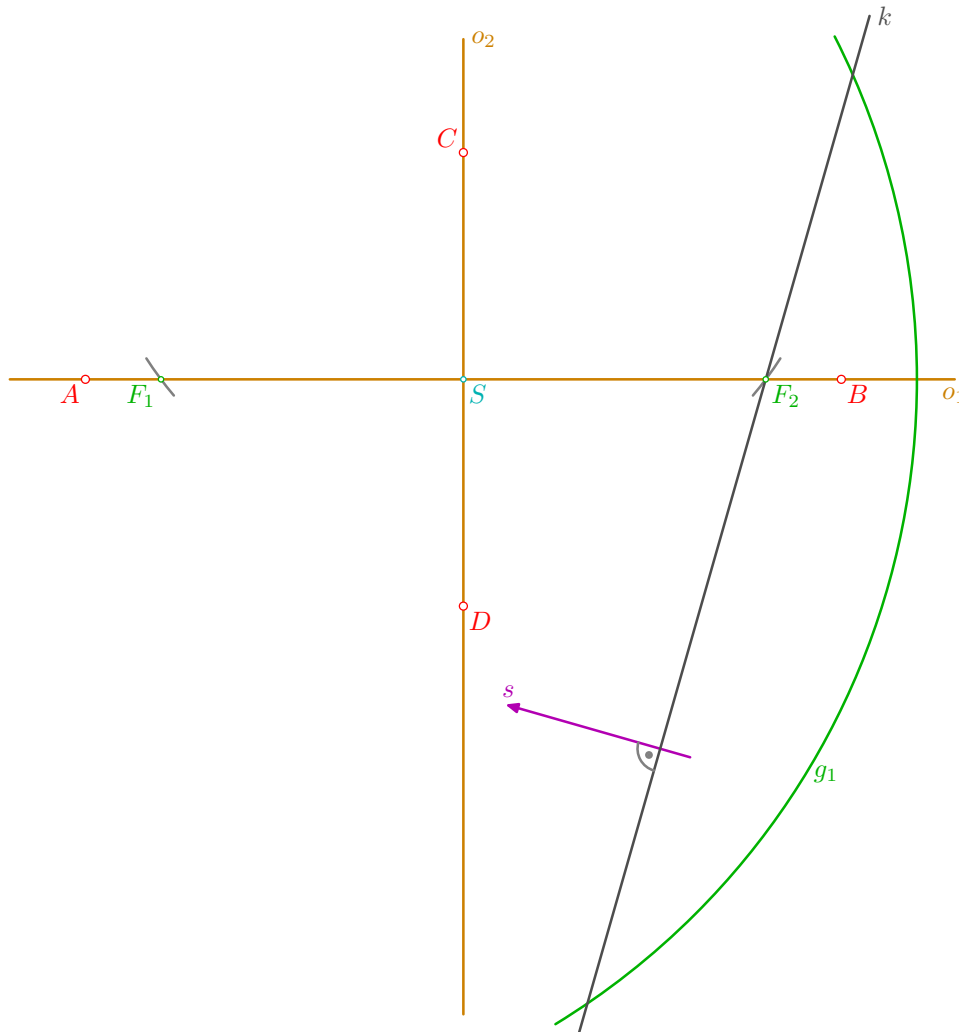
- zvolme střed S , vodorovně hlavní osu o_1 , na ní hlavní vrcholy A, B , svisle vedlejší osu $o_2 \perp o_1$ a na ní vedlejší vrcholy C, D ; rovněž zvolme směr s , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



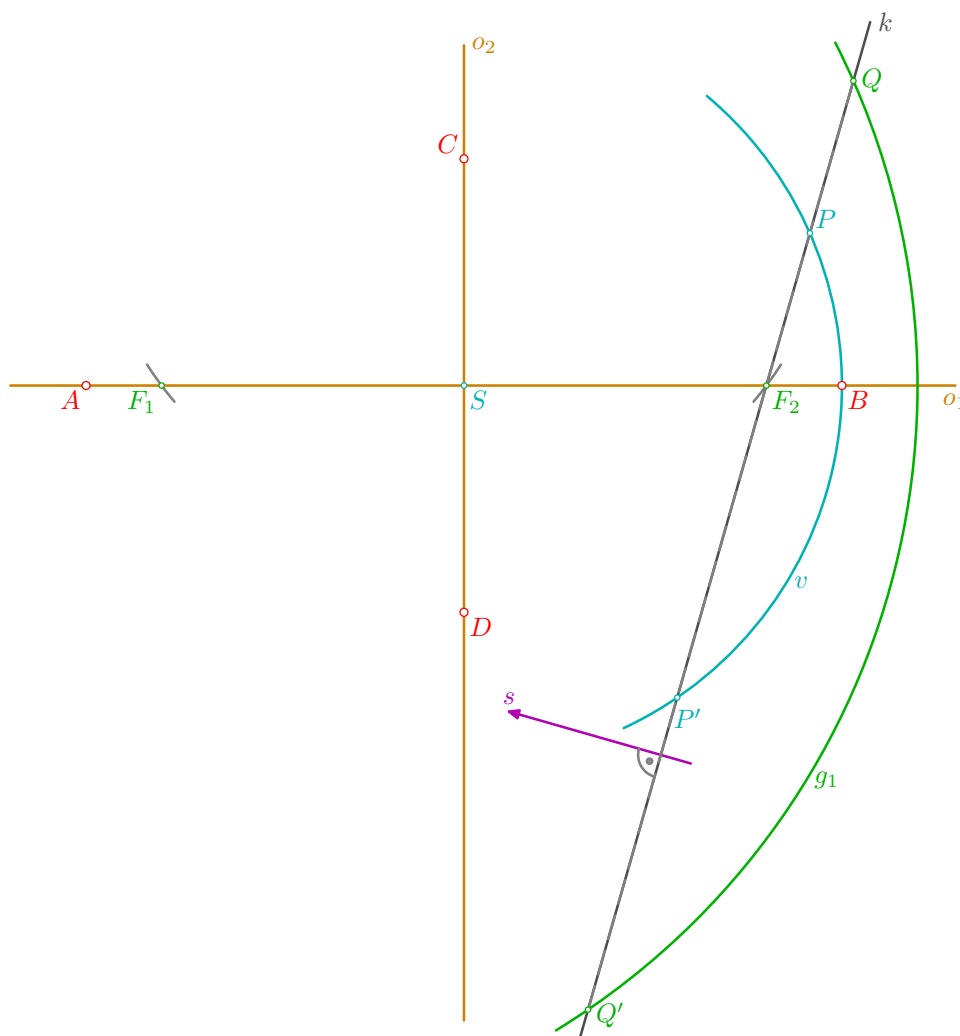
- nejprve doplňme ohniska F_1, F_2 elipsy: ta leží na hlavní ose o_1 a na kružnici o poloměru $a = |SA|$ opsané kolem vedlejšího vrcholu C , tj. platí $|F_1C| = |F_2C| = a$



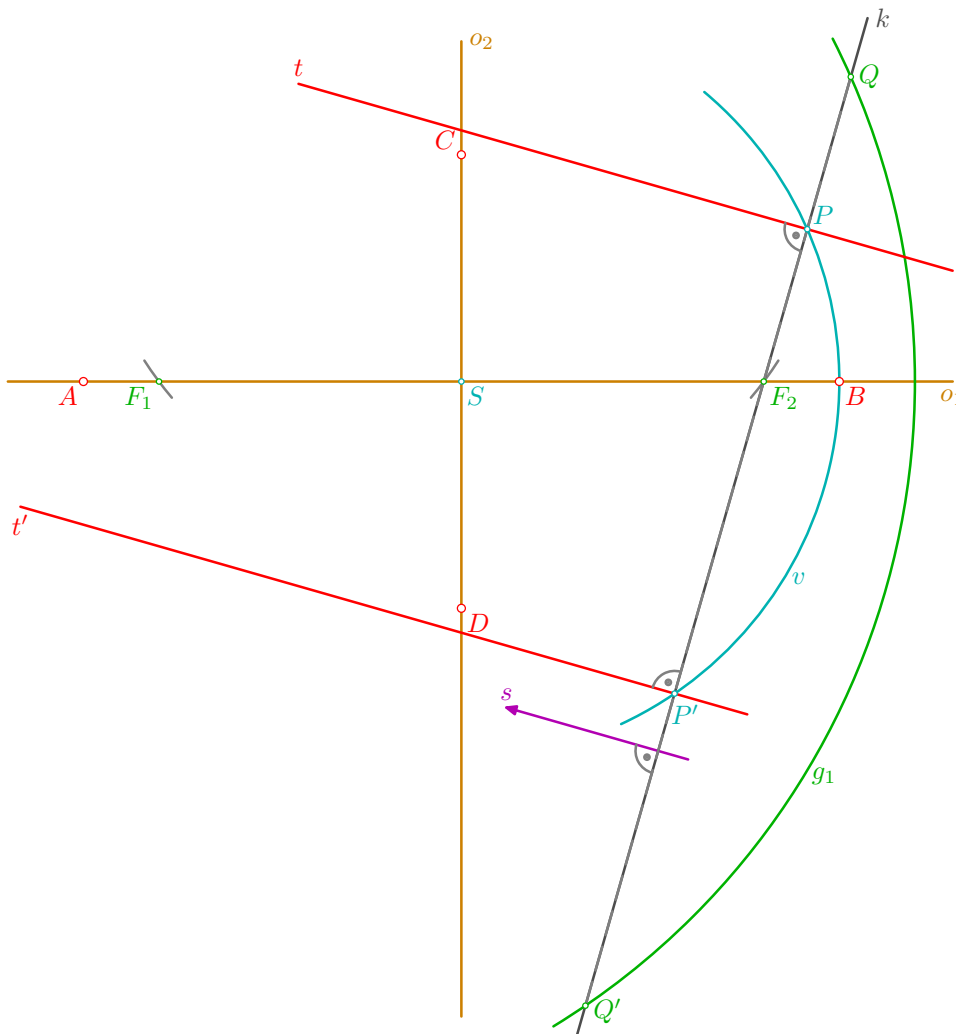
- podle **Věty 2** (na straně 184) leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F_2 kolmo k danému směru s ; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem F_1 , které musí ležet na řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru s



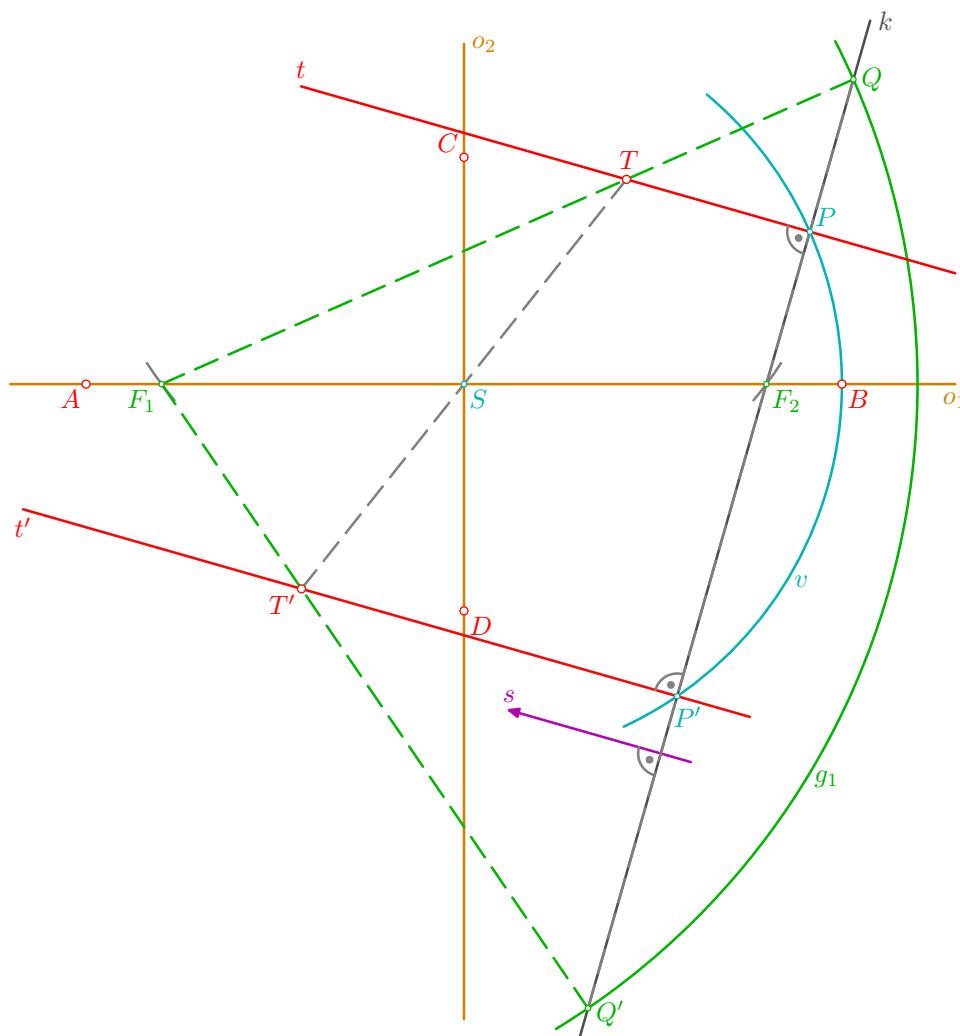
- přímka k protíná kružnici g_1 v bodech Q, Q' ; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 184) leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$; při řešení této úlohy bychom vystačili pouze s **Větou 3** a tedy s body $P, P' = k \cap v$; to v případě, že některý z bodů Q, Q' vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností **Věty 2**



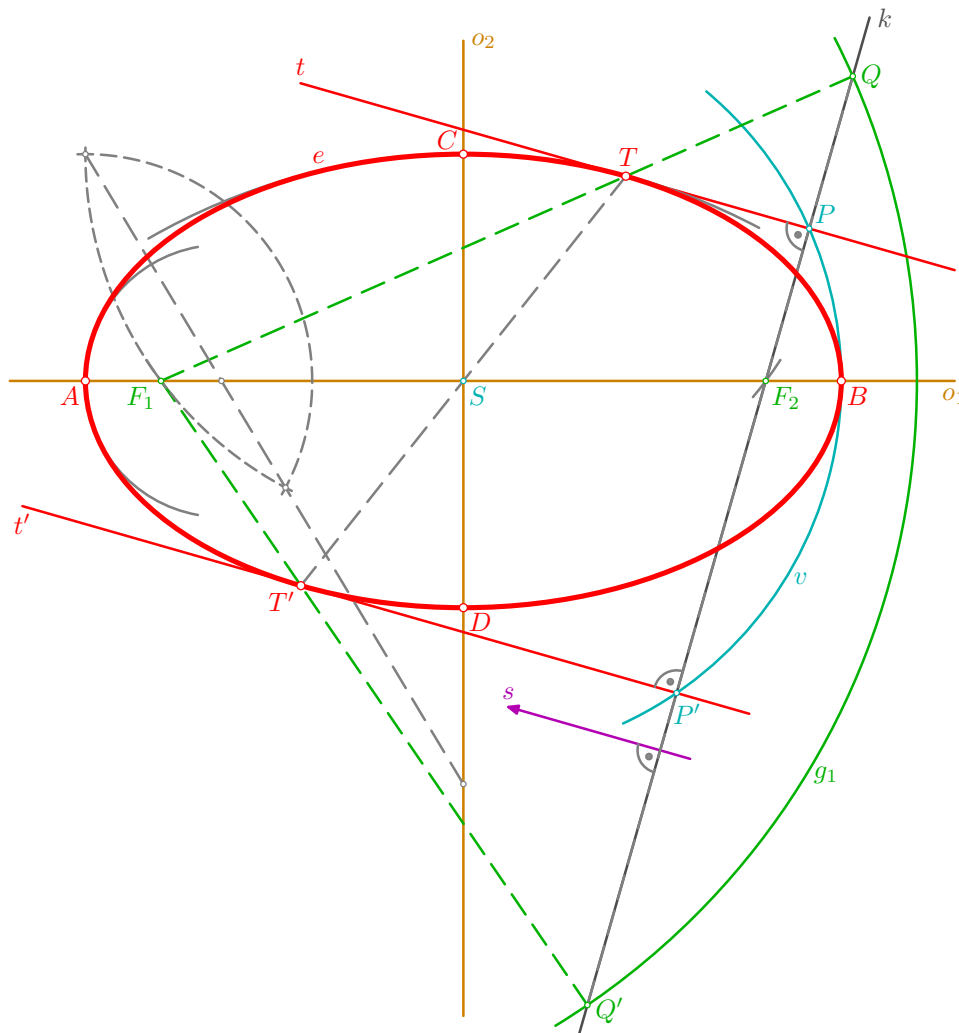
- nyní již můžeme sestrojít tečny t, t' , kde $t \parallel t' \parallel s$ (tj. $t \perp k, t' \perp k$) a $P \in t, P' \in t'$; zvědavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem F_1 kolmo ke směru s padnou na sestrojené tečny t, t' a současně na vrcholovou kružnici $v(S, a)$



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s elipsou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q , resp. přímka F_1Q' , je vlastně jedním z průvodičů bodu T , resp. bodu T' ; současně platí $F_1T \parallel SP$, $F_1T' \parallel SP'$ a navíc jsou tečny $t \parallel t'$ středově souměrné podle středu S elipsy, z čehož vyplývá $S \in TT'$; v této úloze je tedy možné sestavit pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat elipsu e , která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' rovnoběžných s daným směrem s



□

Diskuze: Řídící kružnice $g_1(F_1, 2a)$ a přímka k , vedená ohniskem F_2 kolmo k libovolně danému směru s , se vždy protínají právě ve dvou bodech, a úloha má tudíž vždy právě dvě řešení souměrná podle středu S elipsy e ; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice g_2 , nebo pomocí vrcholové kružnice v .

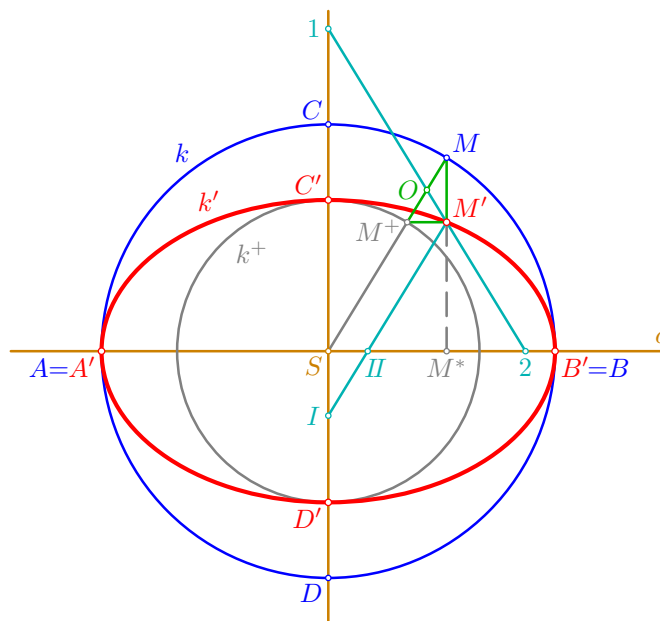
1.2. Afinní vztah kružnice a elipsy

Výklad



- rovnoběžným průmětem kružnice do roviny je v obecném případě elipsa; speciálně se může kružnice promítnout do kružnice nebo do úsečky
- daná kružnice k a její rovnoběžný průmět – elipsa k' – si odpovídají v prostorové osové afinitě mezi rovinami obou křivek; rovnoběžným průmětem této prostorové osové afinity do nějaké roviny ρ je osová afinita v této rovině ρ
- na základě tohoto afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou lze odvodit některé užitečné konstrukce elipsy

1.2.1. Trojúhelníková a proužkové konstrukce elipsy



- pravouhlá osová afinita mezi kružnicí k a elipsou k' je dána takto: osou o afinity je hlavní osa elipsy k' , dvojici odpovídajících si bodů tvoří body $C \in k$ a $C' \in k'$ na vedlejší ose
- potom lze další body elipsy k' sestrojovat pomocí tzv. **trojúhelníkové konstrukce**
 - na kružnici k zvolme bod M

- označme M^+ průsečík polopřímky SM s kružnicí $k^+(S, |SC'|)$
- bodem M^+ vedme rovnoběžku s osou o a bodem M kolmici k ose o afinity; jejich průsečík M' je pak bodem elipsy k' (to lze odvodit z vlastností charakteristiky dané osovou afinitou: $\frac{|M'M^*|}{|MM^*|} = \frac{|M^+S|}{|MS|} = \frac{|SC'|}{|SC|}$)

- **součtová proužková konstrukce**

- sestrojený bod M' spojme se středem O úsečky MM^+
- tato spojnice protíná vedlejší a hlavní osu elipsy k' v bodech 1, 2, pro něž platí: $|1M'| = |SM|$, což je délka hlavní poloosy, a $|2M'| = |SM^+|$, což je délka vedlejší poloosy elipsy k'
- kdybychom úsečku 12 (její délka je **součtem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s dělicím bodem M' přenesli na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod 1 ležel stále na vedlejší resp. bod 2 na hlavní ose elipsy, potom bod M' bude opisovat elipsu k'

- **rozdílová proužková konstrukce**

- sestrojeným bodem M' vedme rovnoběžku s přímkou SM
- ta protne vedlejší a hlavní osu elipsy k' v bodech I, II , pro které platí: $|IM'| = |SM|$, což je délka hlavní poloosy, a $|IIM'| = |SM^+|$, což je délka vedlejší poloosy elipsy k'
- kdybychom úsečku III (její délka je **rozdílem** délek hlavní a vedlejší poloosy) spolu s prodloužením do bodu M' nanесли na proužek papíru a jím pak pohybovali tak, aby bod I ležel stále na vedlejší resp. bod II na hlavní ose elipsy, potom bod M' bude opět opisovat elipsu k'

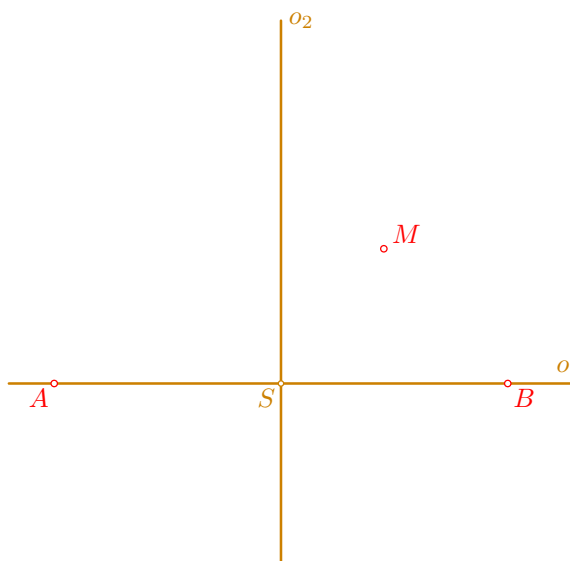
1.2.2. Užití proužkových konstrukcí



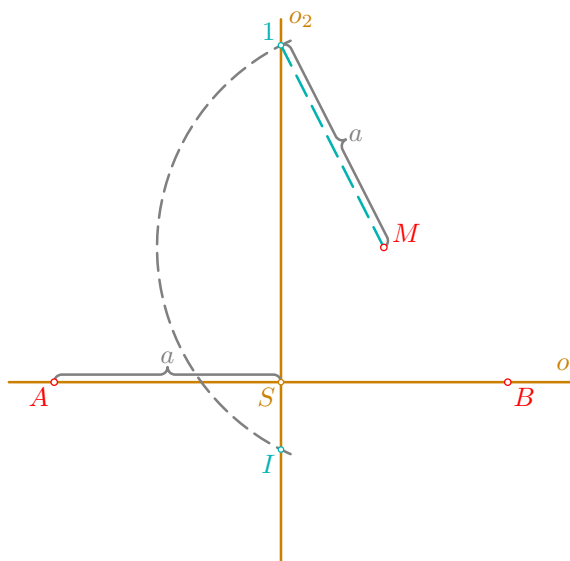
Řešené úlohy

Příklad: Sestrojte vedlejší vrcholy C, D elipsy e , která je dána hlavními vrcholy A, B a obecným bodem M .

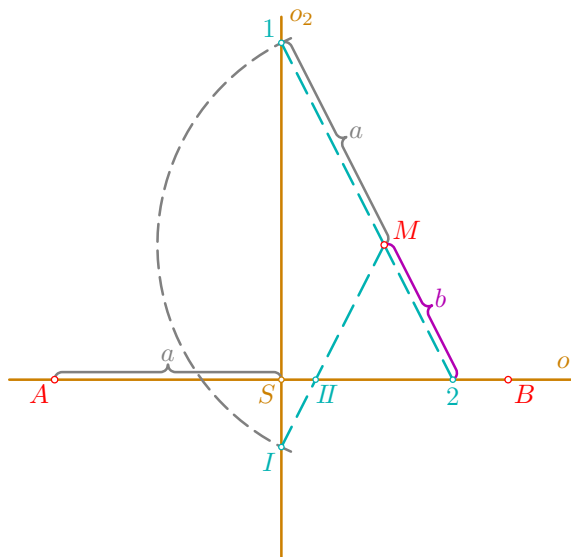
- pro elipsu e zvolme střed S a souměrně podle něj hlavní vrcholy A, B na hlavní ose o_1 ; doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$ a obecný bod M tak, aby bylo $|SM| < |SA|$



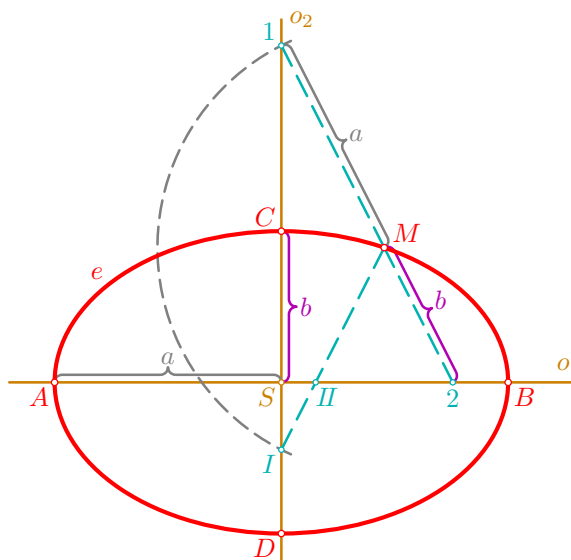
- kolem zvoleného bodu M opišme oblouk pomocné kružnice o poloměru délky $a = |SA|$ hlavní poloosy a najděme její průsečíky $1, I$ s vedlejší osou o_2



- přímka $1M$, resp. přímka IM , protíná hlavní osu o_1 v bodě 2, resp. v bodě II , přičemž $|2M| = |IIM| = b$ je podle předchozího délka vedlejší poloosy sestrojované elipsy e



- nyní již můžeme snadno doplnit vedlejší vrcholy $C, D \in o_2$, $|SC| = |SD| = b$, a (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech, tato konstrukce ovšem není v obrázku provedena) vyrýsovat elipsu e ; pro řešení úlohy zřejmě stačí použít buď pouze součtovou (body 1, 2) nebo pouze rozdílovou variantu (body I, II) některé z proužkových konstrukcí...

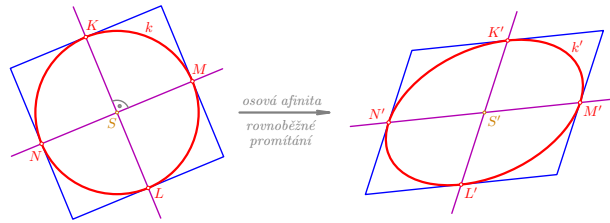


□

1.2.3. Sdružené průměry kružnice a elipsy



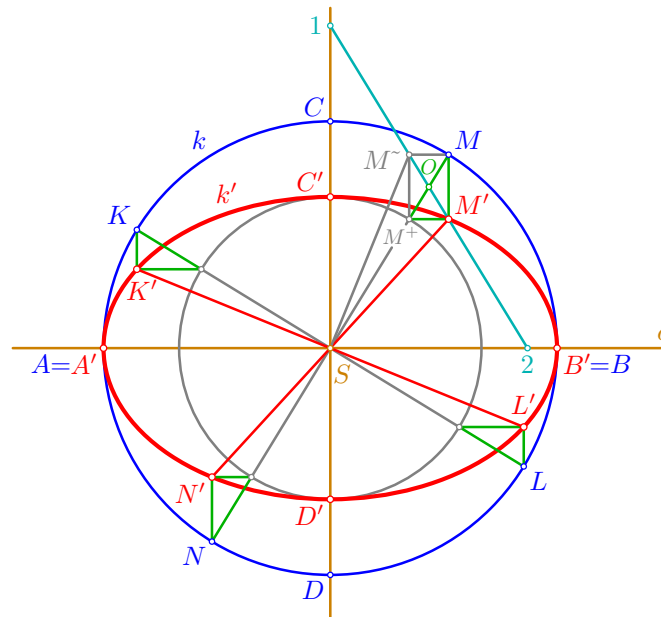
Výklad



- dva průměry kružnice nebo elipsy se nazývají **sdružené**, právě když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem
- sdruženost průměrů se rovnoběžným promítáním a tedy i osovou afinitou zachovává
- u kružnice jsou každé dva sdružené průměry současně navzájem kolmé
- u elipsy existuje jediná dvojice sdružených a současně kolmých průměrů – na hlavní a vedlejší ose

1.2.4. Rytzova konstrukce

- ukazuje, jak lze sestavit hlavní a vedlejší vrcholy elipsy, která je dána pomocí dvojice svých sdružených průměrů



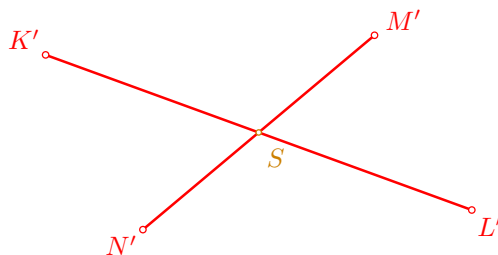
- kružnice k a elipsa k' si odpovídají v pravoúhlé osové afinitě, jejíž osou o je hlavní osa elipsy a v níž se bod C zobrazí na bod C'
- zvolme dvojici kolmých (a tedy i sdružených) průměrů KL, MN kružnice k a pomocí trojúhelníkové konstrukce sestrojme odpovídající sdružené průměry $K'L', M'N'$ elipsy k'
- doplníme-li trojúhelník $MM'M^+$ bodem M^\sim na obdélník, pak platí $SM^\sim \perp K'L'$ a pro střed O obdélníka $MM'M^+M^\sim$ je $|OS| = |O1| = |O2|$
- na základě těchto vztahů lze odvodit tzv. **Rytzovu konstrukci**, jejíž použití předvedeme na následujícím příkladě

Řešené úlohy

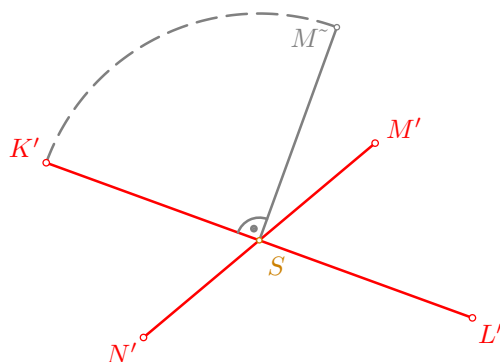
Příklad: Sestrojte hlavní a vedlejší vrcholy elipsy k' , která je dána dvojicí sdružených průměrů $K'L', M'N'$.



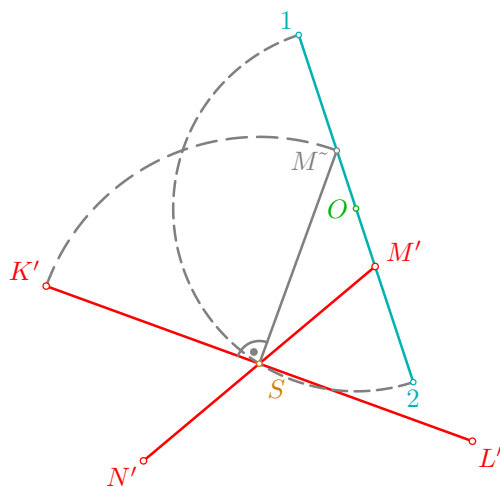
- zvolme dvojici obecných (tj. ne kolmých) sdružených průměrů $K'L', M'N'$ elipsy k' , které se protínají v jejím středu S ; pro lepší orientaci a porozumění je ponecháno označení z předchozího obrázku



- krajní bod K' jednoho z průměrů otočme o 90° kolem středu S do bodu M ; přitom je lhostejné, který z bodů K', L', M', N' vybereme a jestli jej otočíme v kladném nebo záporném smyslu



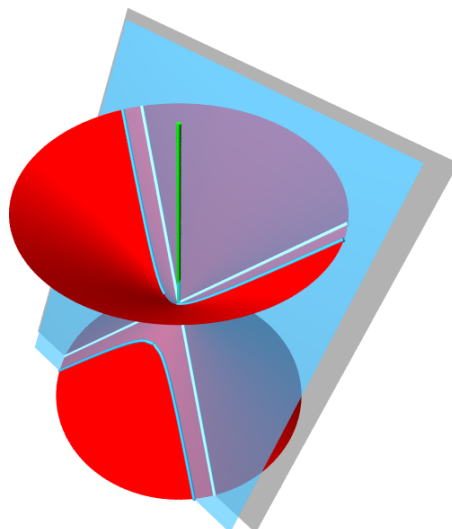
- bod M spojíme s některým (tradičně bližším, ale opět je to jedno) krajním bodem druhého průměru, tj. např. s bodem M' , a sestrojme střed O úsečky $M'M'$; dále na přímce $M'M'$ sestrojme body 1, 2, pro které platí $|O1| = |O2| = |OS|$



1.3. Hyperbola



Výklad



1.3.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice (viz obrázek nahoře):* **hyperbola** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řezná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem protíná kuželovou plochu ve dvou různoběžných přímkách (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je menší než odchylka povrchových přímek)
- *ohnisková definice:* **hyperbola** h je množinou všech bodů v dané rovině ρ , pro něž je absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou různých pevných bodů F_1, F_2 rovna danému číslu $2a$, které je menší než vzdálenost bodů F_1, F_2 ; symbolicky zapsáno:

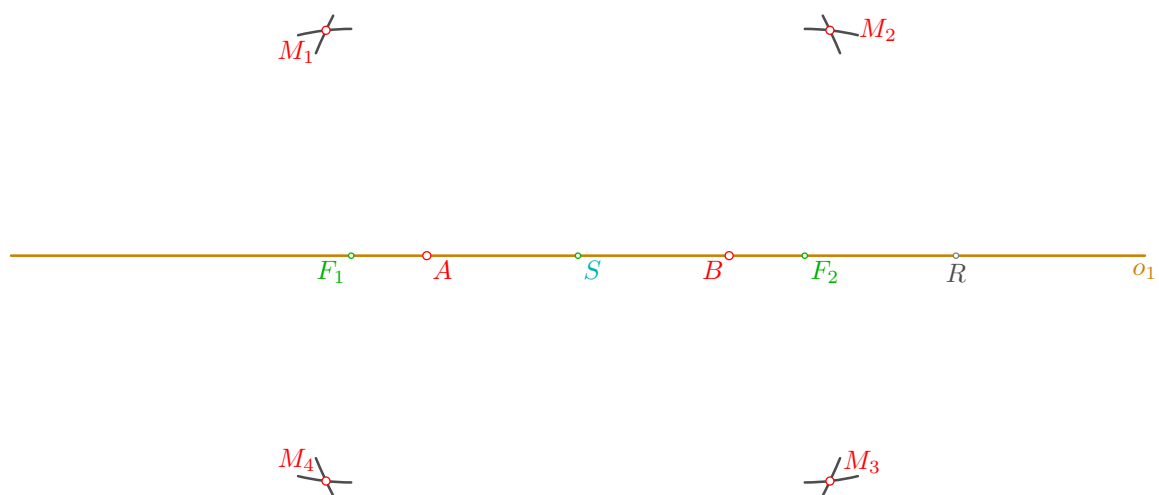
$$h = \{X \in \rho; ||F_1X| - |F_2X|| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|\}$$

Konstrukce a základní pojmy

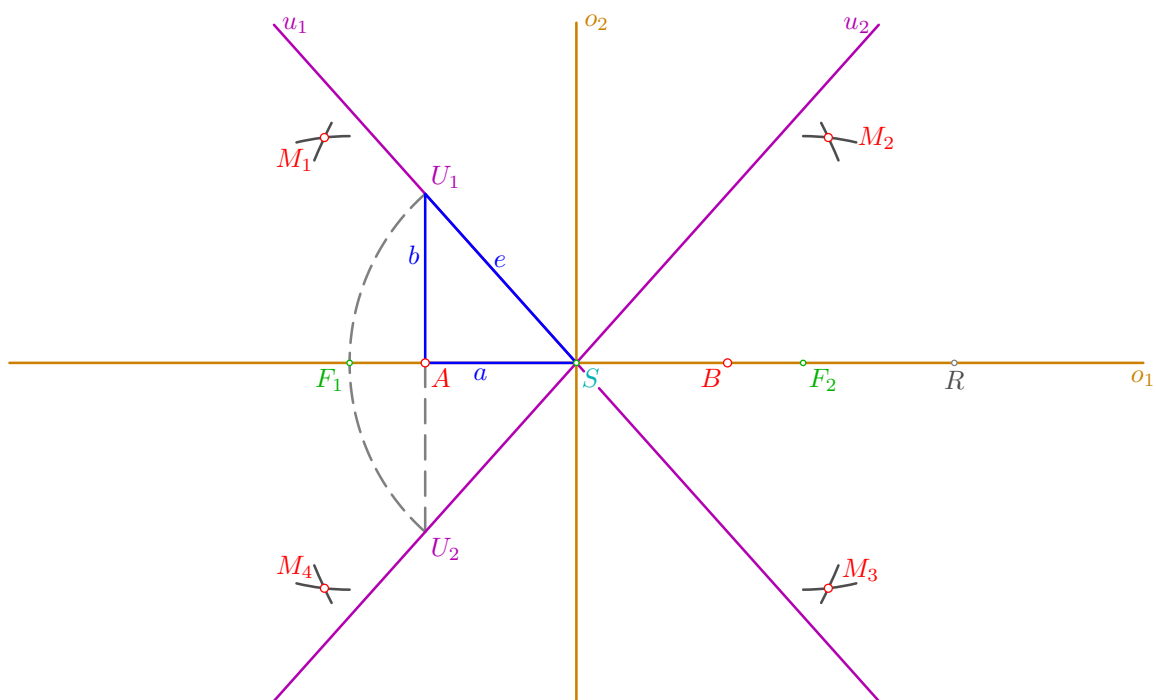
- na vodorovné přímce o_1 zvolme bod S a od něj na obě strany souměrně nanesme dvě libovolně zvolené vzdálenosti; vzdálenější body označme F_1, F_2 a nazvěme je **ohnisky** hyperboly, oněmi pevnými body, o nichž se mluví v ohniskové definici; bližší body označme A, B a necht' pro jejich vzdálenost platí $|AB| = 2a$; pak je $||F_1A| - |F_2A|| = = ||F_1B| - |F_2B|| = 2a$, a podle definice je bod A bodem hyperboly h ; totéž lze ukázat pro bod B a body A, B se nazývají **vrcholy** (někdy se používá i přívlastek *hlavní*) hyperboly (hyperbola v nich má největší křivost); přímka $o_1 = AB = F_1F_2$ je **hlavní osa** hyperboly a bod S je její **střed** (hyperbola je podle něj středově souměrná)



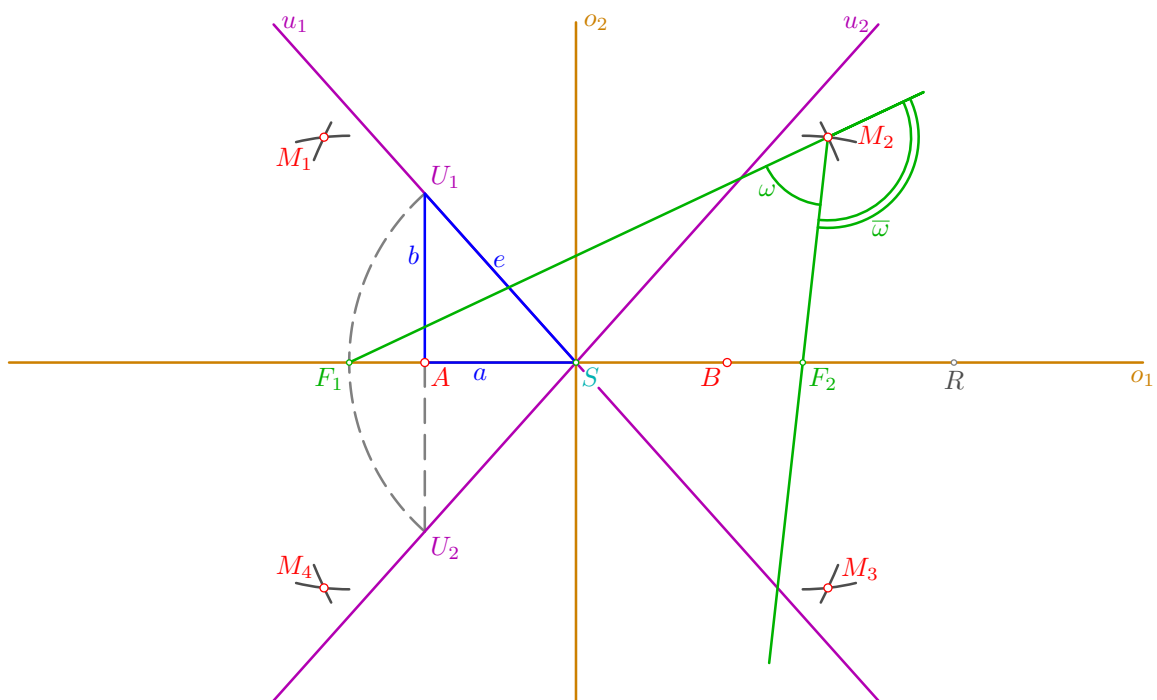
- sestrojme další **obecné body** hyperboly: na hlavní ose o_1 mimo úsečku F_1F_2 zvolme pomocný bod R , vezměme do kružítka poloměr délky $|AR|$ a opišme čtyři oblouky kružnic kolem ohnisek F_1, F_2 ; změňme poloměr na délku $|BR|$ a provedme totéž – kolem ohnisek protněme předchozí čtyři oblouky; získáme tak čtyři body M_1, M_2, M_3, M_4 , kde např. pro M_2 platí $||F_1M_2| - |F_2M_2|| = ||AR| - |BR|| = |AB| = 2a$ (analogicky pro M_1, M_3, M_4); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body hyperboly h ; zvolíme-li bod R v některém z ohnisek, dostaneme tímto způsobem vrcholy A, B ; při volbě bodu R uvnitř úsečky F_1F_2 se příslušné kruhové oblouky neprotnou a nezískáme tak žádné další body hyperboly



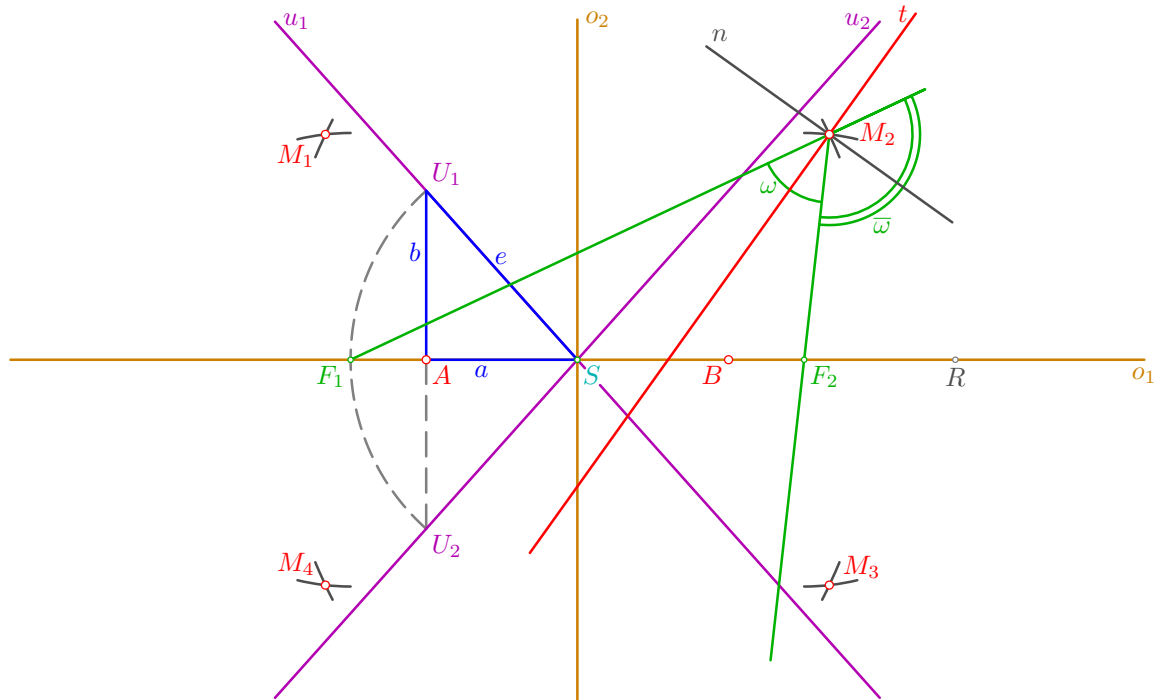
- vrcholem A vztyčme kolmici na hlavní osu o_1 a sestrojme její průsečíky U_1, U_2 s kružnicí, která má střed v bodě S a poloměr $|SF_1|$; přímky $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$ jsou pak tzv. **asymptoty** hyperboly – tečny, které se jí dotýkají v nekonečnu; hyperbola je osově souměrná také podle **vedlejší osy** $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; délka $a = |SA|$ se nazývá **délka hlavní poloosy**, délka úsečky AU_1 se nazývá **délka $b = |AU_1|$ vedlejší poloosy** a délka úsečky F_1S udává tzv. **excentricitu** (výstřednost) $e = |F_1S| = |SU_1|$ hyperboly; z charakteristického pravoúhlého trojúhelníka ASU_1 a Pythagorovy věty vyplývá vztah mezi délkami poloos a excentricitou hyperboly: $a^2 = e^2 - b^2$



- pro další konstrukce vyberme např. bod M_2 a sestrojme přímky F_1M_2, F_2M_2 , což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_2 ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží střed S (nebo úhel k němu vrcholový) označme ω a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu M_2 ; některý z úhlů vedlejších k úhlu ω označme $\bar{\omega}$ a říkejme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_2



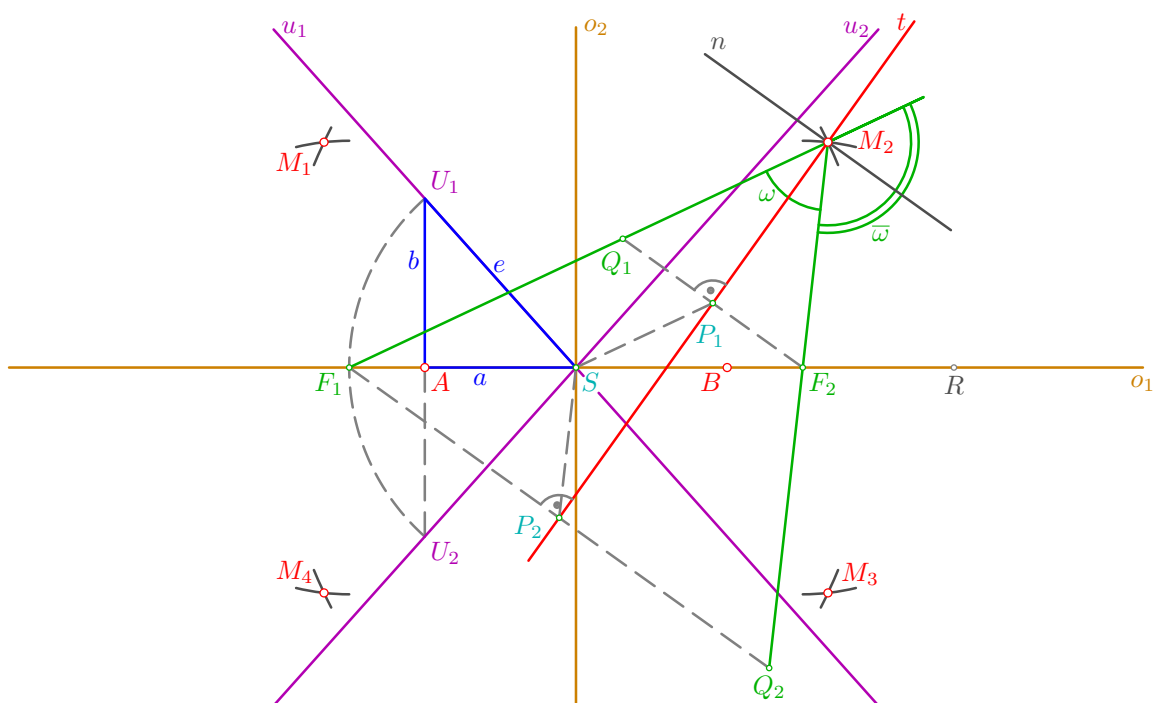
- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_2 je současně **tečnou** hyperboly v bodě M_2 ; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** hyperboly v bodě M_2 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_2 ; to platí v každém bodě hyperboly a toto tvrzení je shrnuto v níže uvedené Větě 1



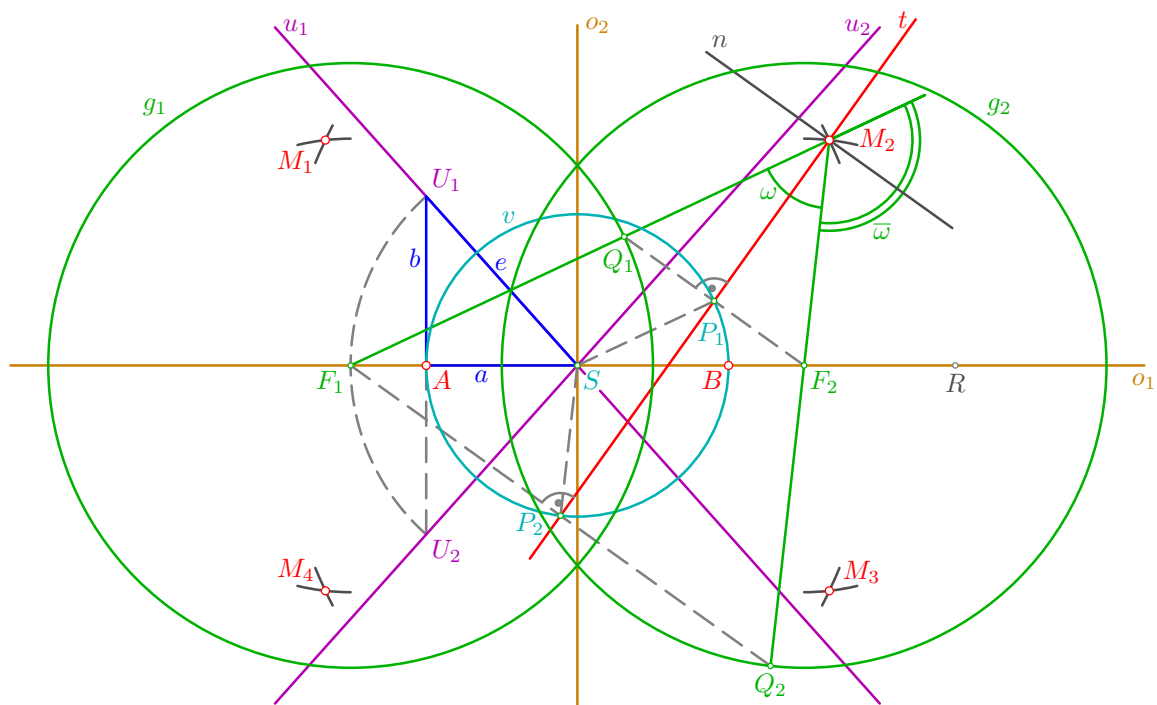
Věta 1

Tečna (normála) v bodě hyperboly pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

- na základě předchozího odvodíme další vlastnosti hyperboly: sestrojme body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohnisky F_2, F_1 podle tečny t a označme příslušné paty P_1, P_2 kolmic Q_1F_2, Q_2F_1 spuštěných z ohnisek F_2, F_1 na tečnu t (tj. středy úseček Q_1F_2, Q_2F_1); z osové souměrnosti průvodičů bodu M_2 podle tečny t plyne, že bod Q_1 leží na přímce F_1M_2 a bod Q_2 padne na průvodič F_2M_2



- díky osové souměrnosti je $|M_2Q_1| = |M_2F_2|$, a tudíž platí $|F_1Q_1| = ||F_1M_2| - |M_2Q_1|| = |F_1M_2| - |M_2F_2| = 2a$; totéž lze ukázat v každém bodě hyperboly, a všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle tečen hyperboly tedy leží na tzv. **řídící kružnici** $g_1(F_1, 2a)$; analogicky dostaneme $|F_2Q_2| = 2a$ a můžeme sestavit druhou řídící kružnici $g_2(F_2, 2a)$, na níž leží všechny body souměrně sdružené s ohniskem F_1 podle tečen hyperboly (viz Věta 2); úsečky SP_1, SP_2 jsou po řadě střední příčky trojúhelníků $F_1F_2Q_1, F_1F_2Q_2$ a pro jejich délky tedy platí: $|SP_1| = \frac{|F_1Q_1|}{2} = a = \frac{|F_2Q_2|}{2} = |SP_2|$; obecně shrnuto, paty kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na tzv. **vrcholové kružnici** $v(S, a)$ (viz Věta 3)



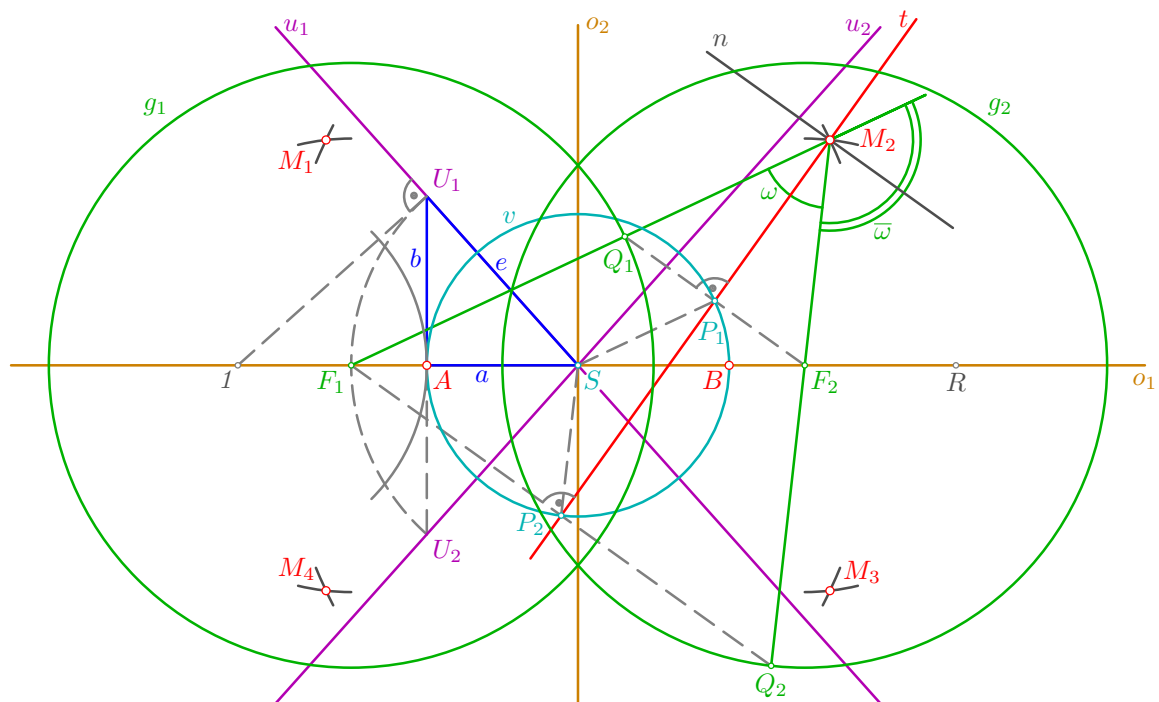
Věta 2

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly podle jejich tečen je řídící kružnice hyperboly o středu ve druhém ohnisku a poloměru $2a$.

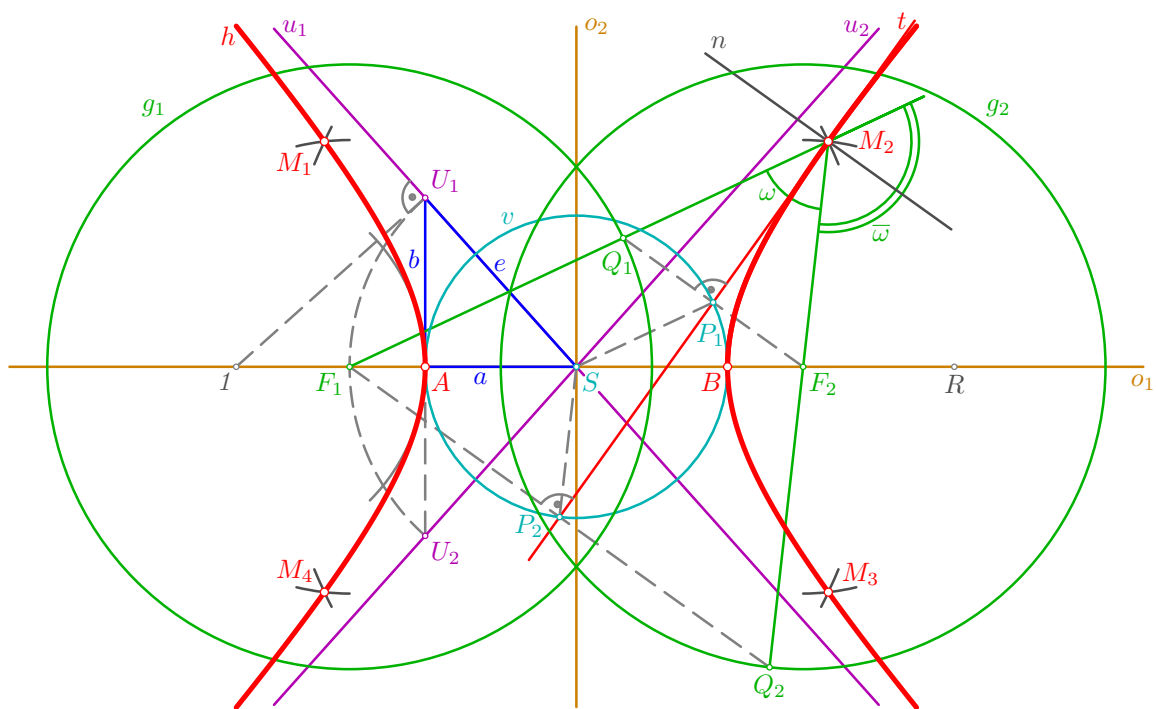
Věta 3

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny je vrcholová kružnice hyperboly.

- pro jednodušší a pěknější vyrýsování hyperboly sestrojme v jejích vrcholech oblouky tzv. **hyperoskulačních kružnic**: stačí vést bodem U_1 kolmici k asymptotě u_1 a určit její průsečík 1 s hlavní osou o_1 hyperboly; bod 1 je pak středem oblouku hyperoskulační kružnice ve vrcholu A (oblouk ve vrcholu B doplníme souměrně podle středu S , konstrukce není v obrázku provedena); tyto oblouky přibližně nahrazují průběh hyperboly v blízkém okolí vrcholů, ale jejich konstrukce není tak užitečná jako u elipsy



- na závěr je vytažena hyperbola h (přesněji řečeno její část), což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; při tom jsou důležitým vodítkem právě asymptoty, k nimž se směrem od vrcholů hyperbola stále přibližuje, ale dotkne se jich až v nekonečnu (v jejich nevlastních bodech); zkusme si představit hypotetickou cestu po hyperbole, např. na kole: vyjedeme z vrcholu A směrem k bodu M_1 , projedeme jím a pokračujeme dále k asymptotě u_1 ; dejme tomu, že se nám podaří dojet do jejího nevlastního bodu, kde se jí „konečně“ dotkneme, chvílku si odpočineme, přece jen to byla nekonečně dlouhá cesta, a vydáme se dál započatým směrem, tj. musíme se od asymptoty u_1 začít vzdalovat, projedeme bodem M_3 , vrcholem B , bodem M_2 , v němž se dotkneme sestrojené tečny t , podruhé přijedeme do nekonečna, tentokrát do nevlastního bodu asymptoty u_2 , jíž se v něm dotkneme, a přes bod M_4 se vrátíme zpět do vrcholu A ; hyperbola je tedy také (podobně jako elipsa) uzavřená křivka, která se skládá ze dvou větví oddělených dvěma nevlastními body...



□

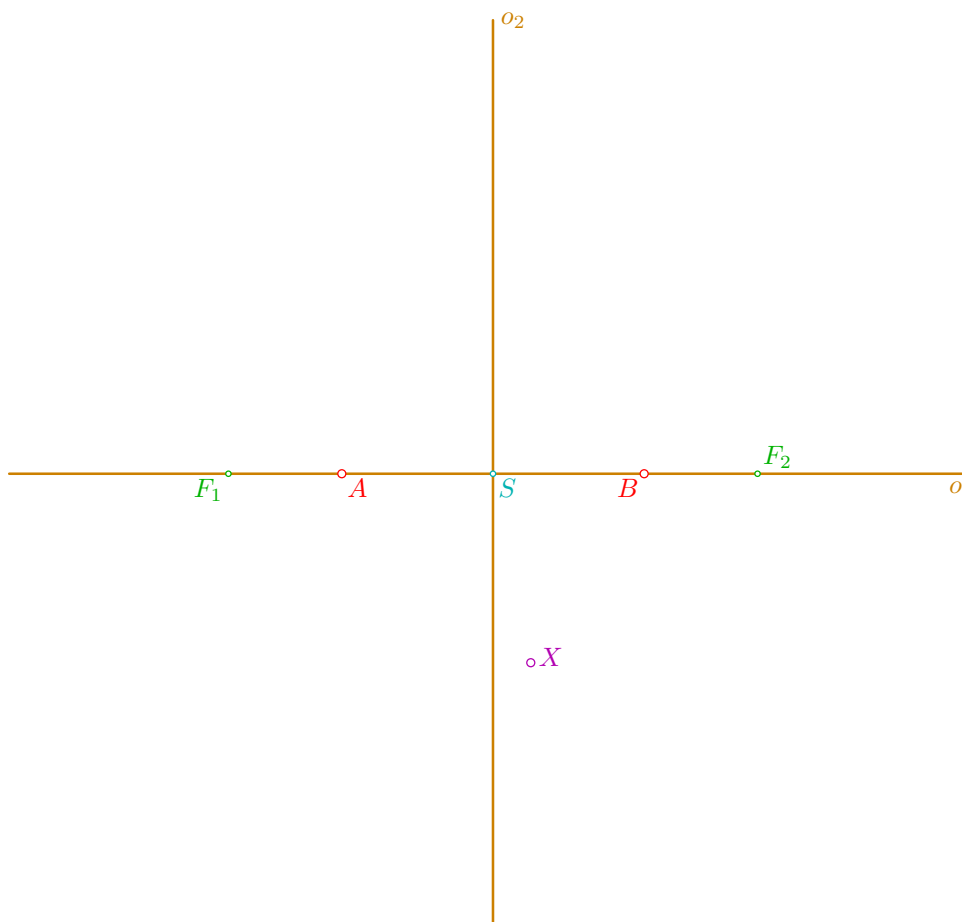


Řešené úlohy

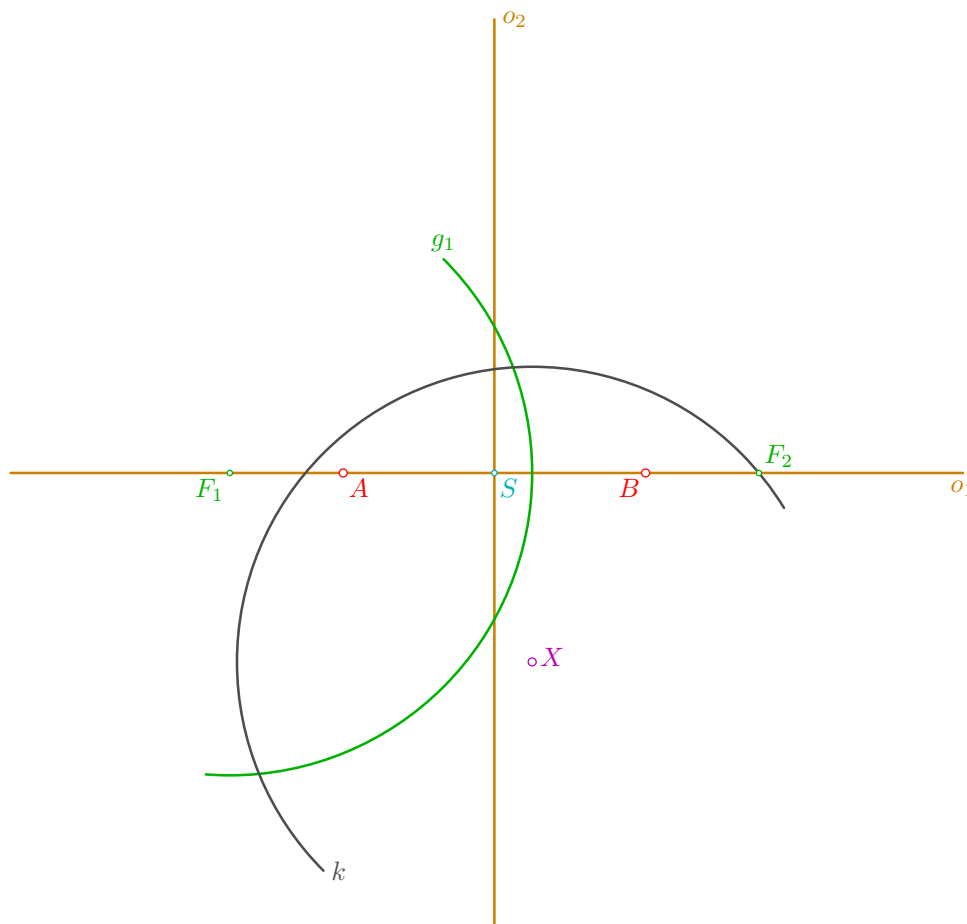
Tečny k hyperbole daným bodem

Příklad: Bodem X ved'te tečny k nenarýsované hyperbole h , která je dána svými vrcholy a ohnisky.

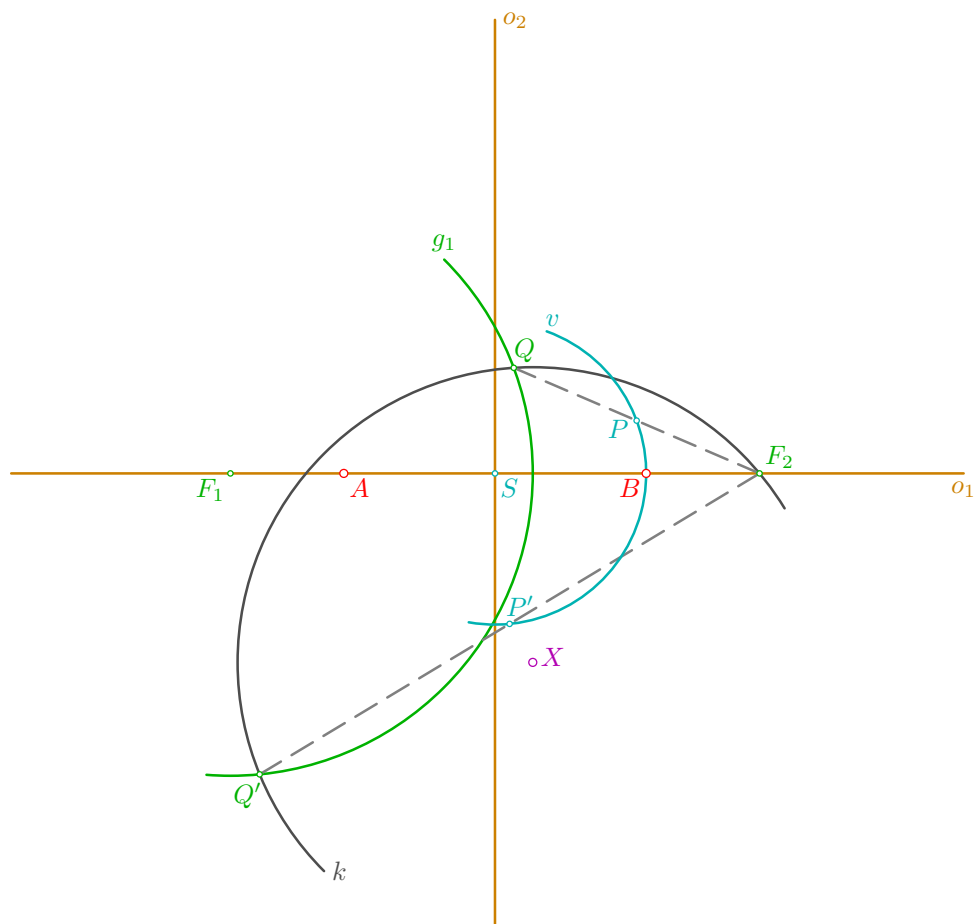
- zvolme střed S hyperboly, vodorovně hlavní osu o_1 , na ní hlavní vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2 , svisle doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; rovněž zvolme bod X , z něhož pomocí uvedených ohniskových vlastností povedeme tečny k zadané hyperbole



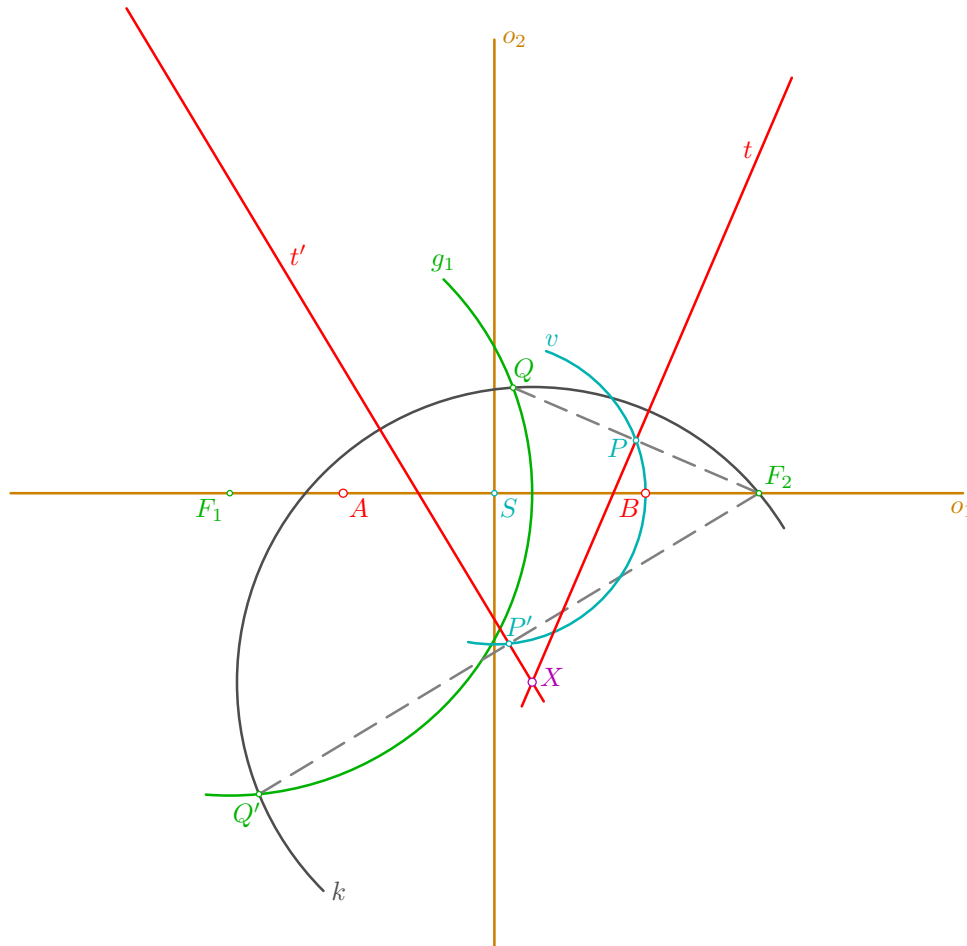
- podle **Věty 2** (na straně 211) leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí mít od bodu X vzdálenost $|F_2X|$, a musí tedy ležet také na kružnici $k(X, |F_2X|)$; analogicky bychom mohli k řešení použít druhou řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a kružnici o poloměru $|F_1X|$ opsanou kolem bodu X (tato varianta není v obrázku zakreslena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



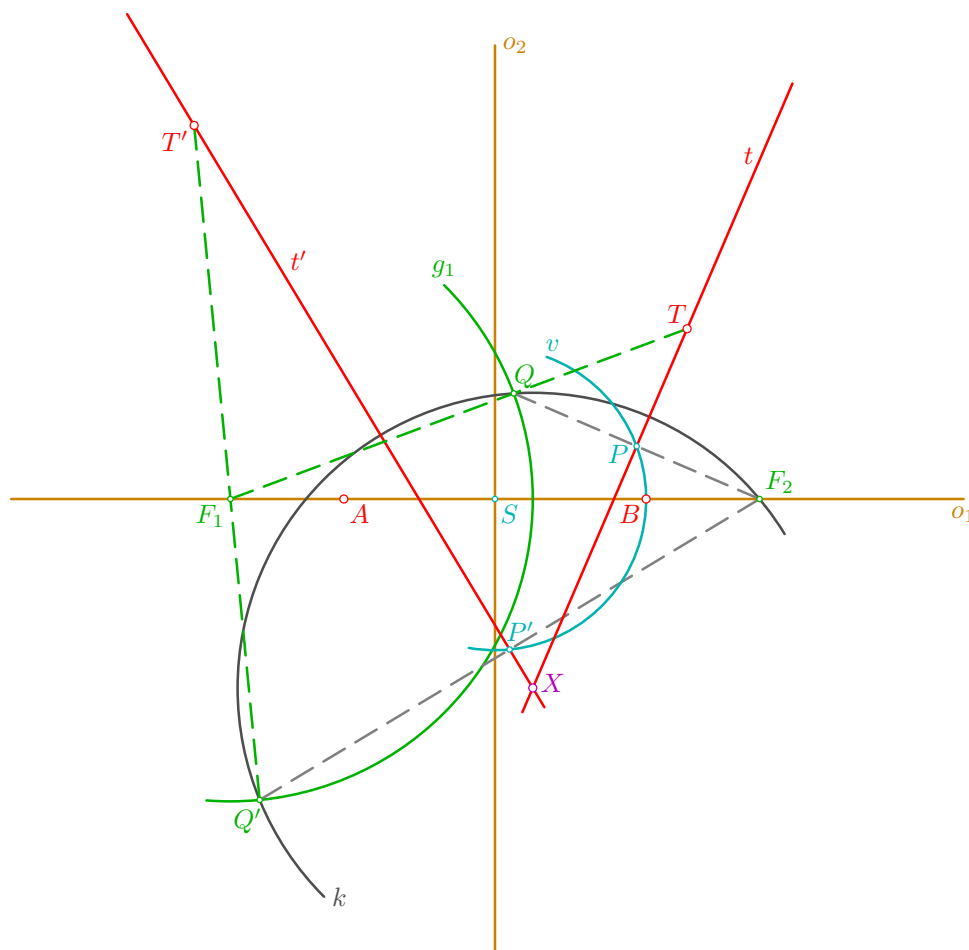
- kružnice g_1, k se protínají v bodech Q, Q' ; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 211) leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$



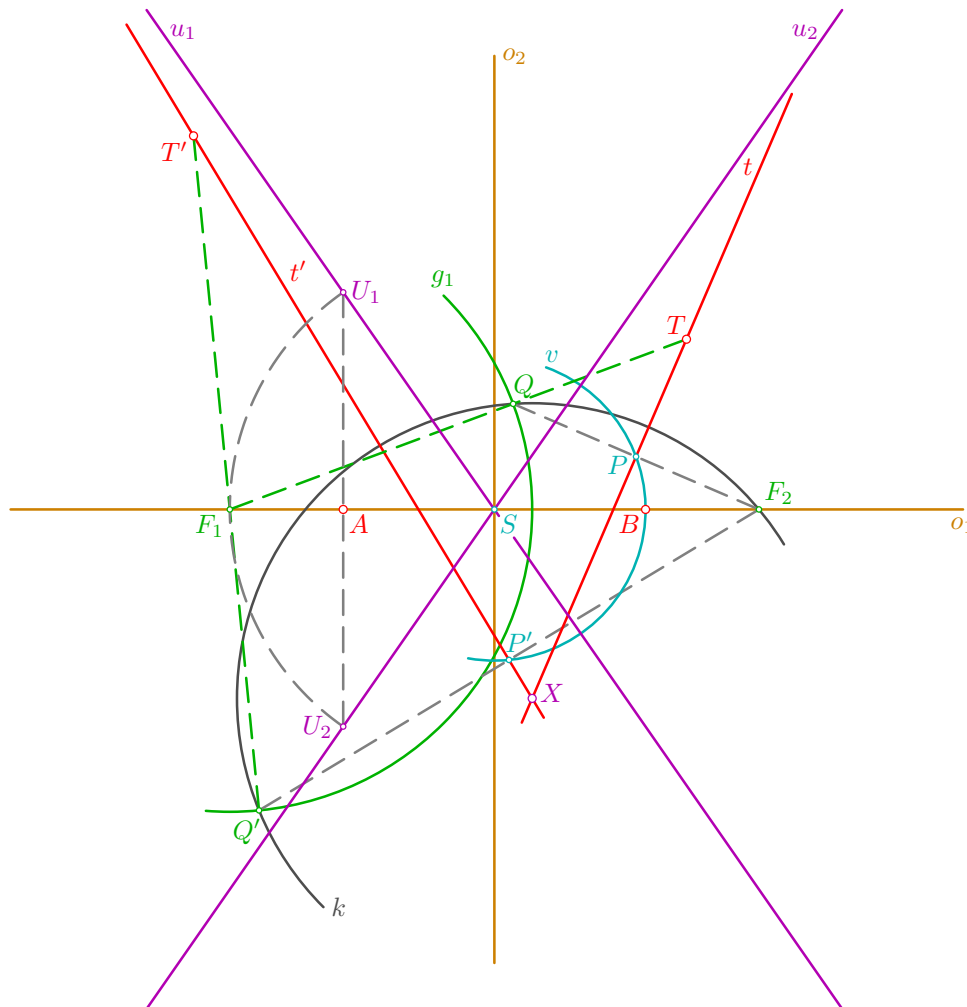
- nyní již můžeme sestrojít tečny $t = XP, t' = XP'$, pro něž platí: $t \perp F_2Q, t' \perp F_2Q'$; z toho je vidět, že body P, P' musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem XF_2 ; pro řešení úlohy lze tedy vystačit pouze se vztahy uvedenými ve **Větě 2** (na straně 211); tento alternativní postup je opět ponechán čtenáři jako procvičení ohniskových vlastností hyperboly



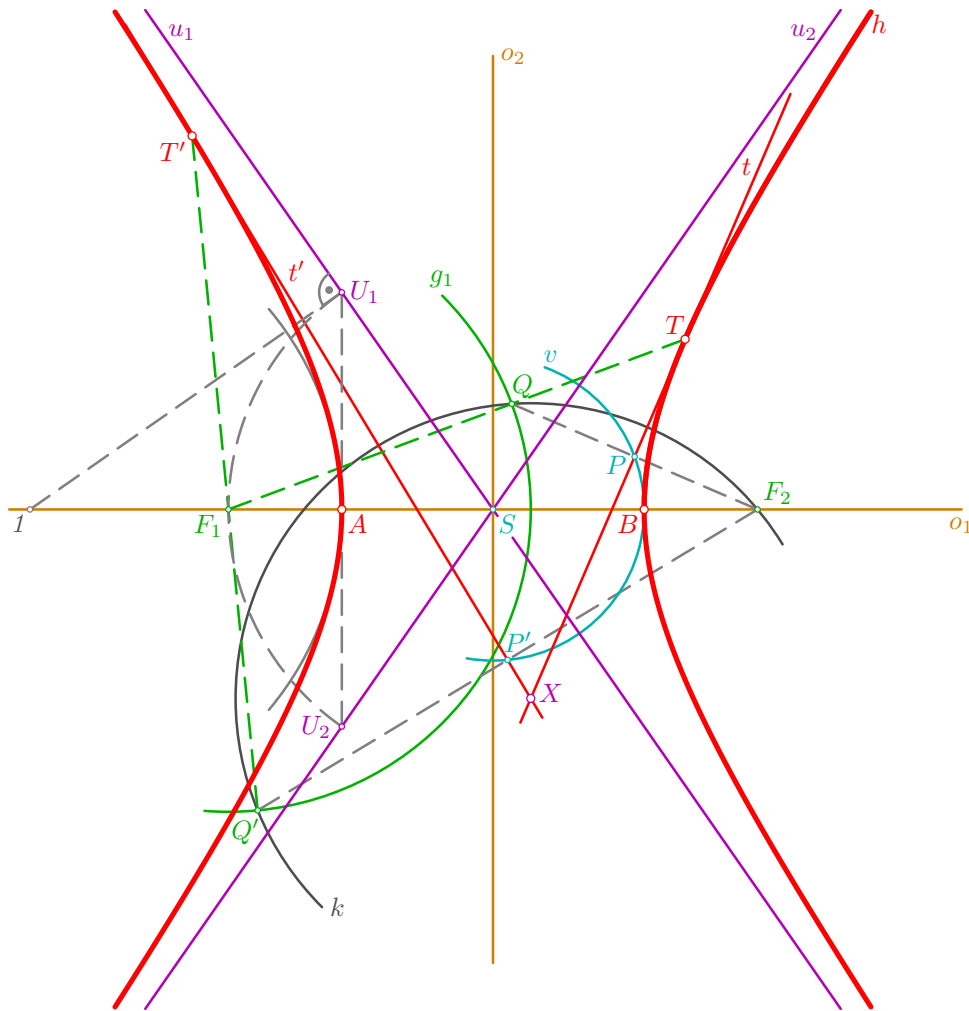
- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s hyperbolou platí: $T = t \cap F_1Q$, $T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q , resp. přímka F_1Q' , je vlastně jedním z průvodičů bodu T , resp. bodu T' ; navíc platí $TF_1 \parallel SP$, resp. $T'F_1 \parallel SP'$, a při konstrukci bodů T, T' dotyku tak vystačíme jen s body P, P' , které můžeme sestrojít alternativním způsobem naznačeným v předchozím kroku



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$, kde body U_1, U_2 leží na kolmici k ose o_1 vedené vrcholem A a na kružnici o poloměru $|SF_1|$ opsané kolem středu S



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly h , která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



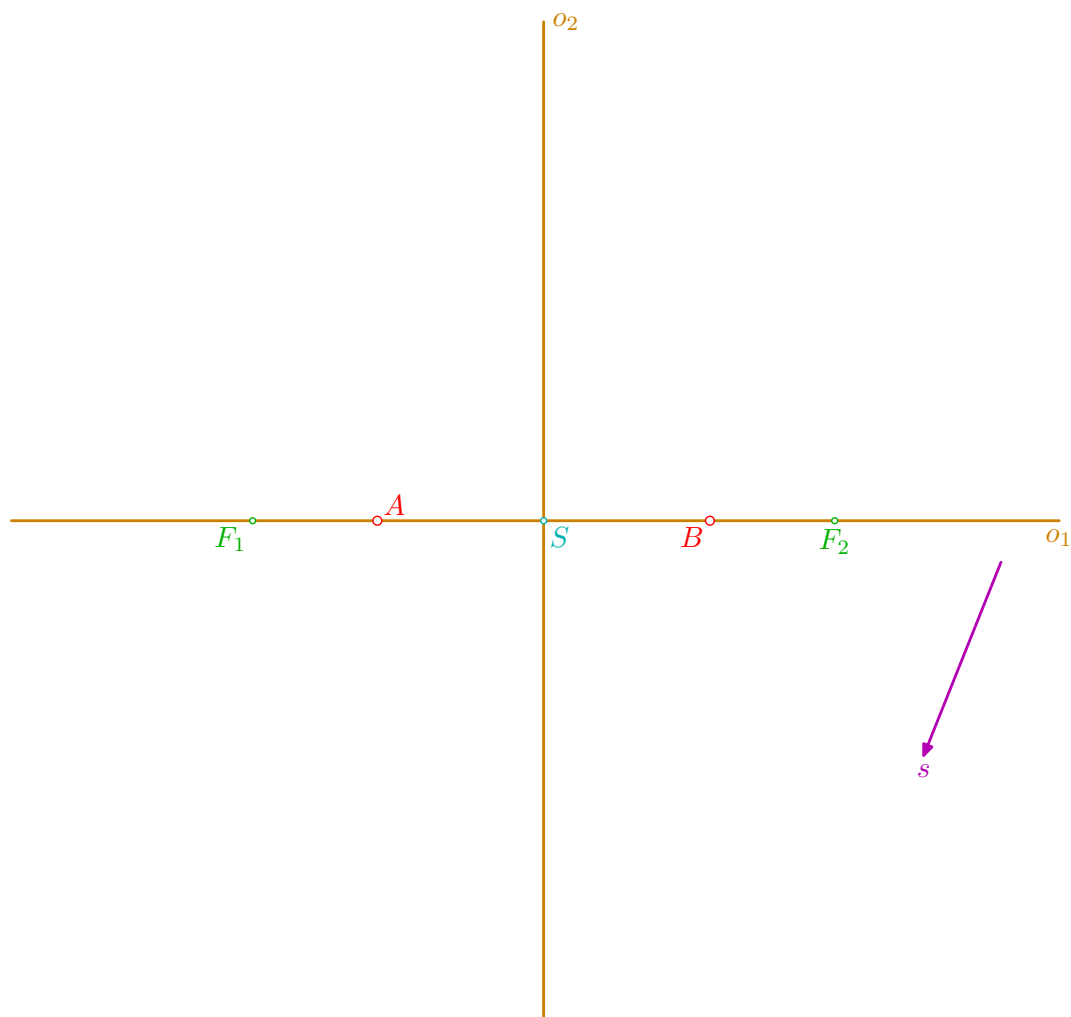
□

Diskuze: pokud se kružnice $g_1(F_1, 2a), k(X, |XF_2|)$ (případně $g_2(F_2, 2a), k(X, |XF_1|)$) protínají ve dvou bodech, resp. se dotýkají v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti hyperboly h , resp. bod X je bodem hyperboly h , resp. bod X leží ve vnitřní oblasti hyperboly h , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané hyperbole h . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové kružnice $v(S, a)$ a Thaletovy kružnice nad průměrem F_2X nebo F_1X .

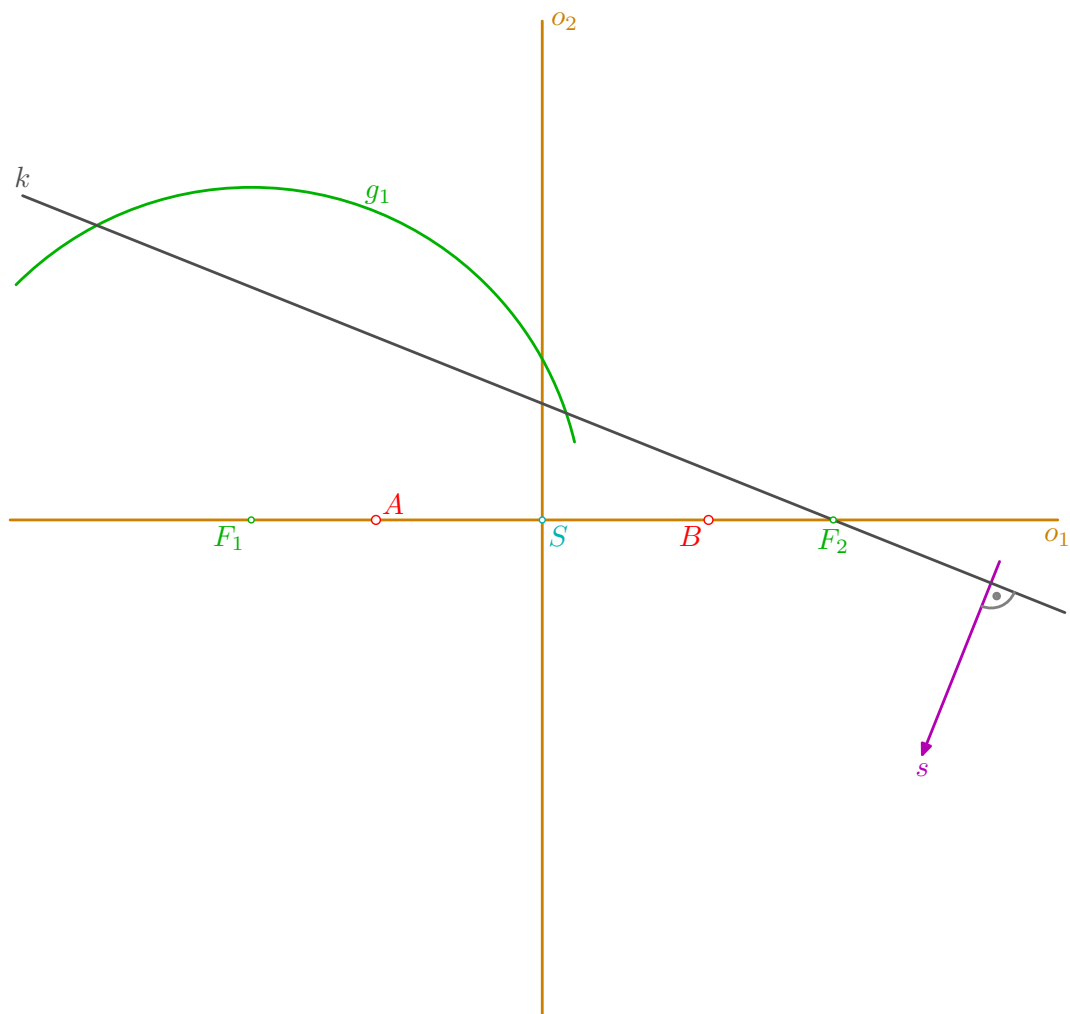
Tečny k hyperbole daného směru

Příklad: K nenarýsované hyperbole h , která je dána svými vrcholy a ohnisky, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

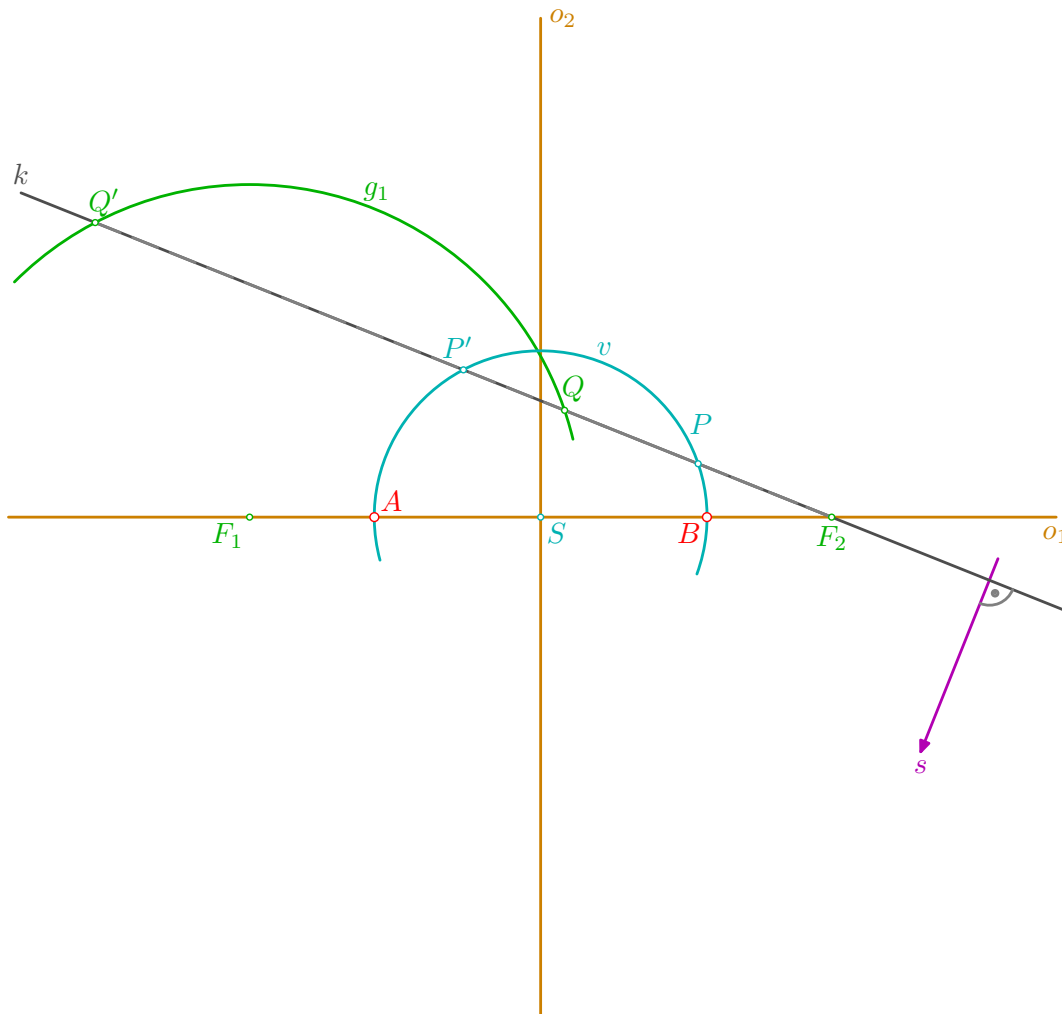
- zvolme střed S hyperboly, vodorovně hlavní osu o_1 , na ní hlavní vrcholy A, B a ohniska F_1, F_2 , svisle doplňme vedlejší osu $o_2 \perp o_1, S \in o_2$; rovněž zvolme směr s , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



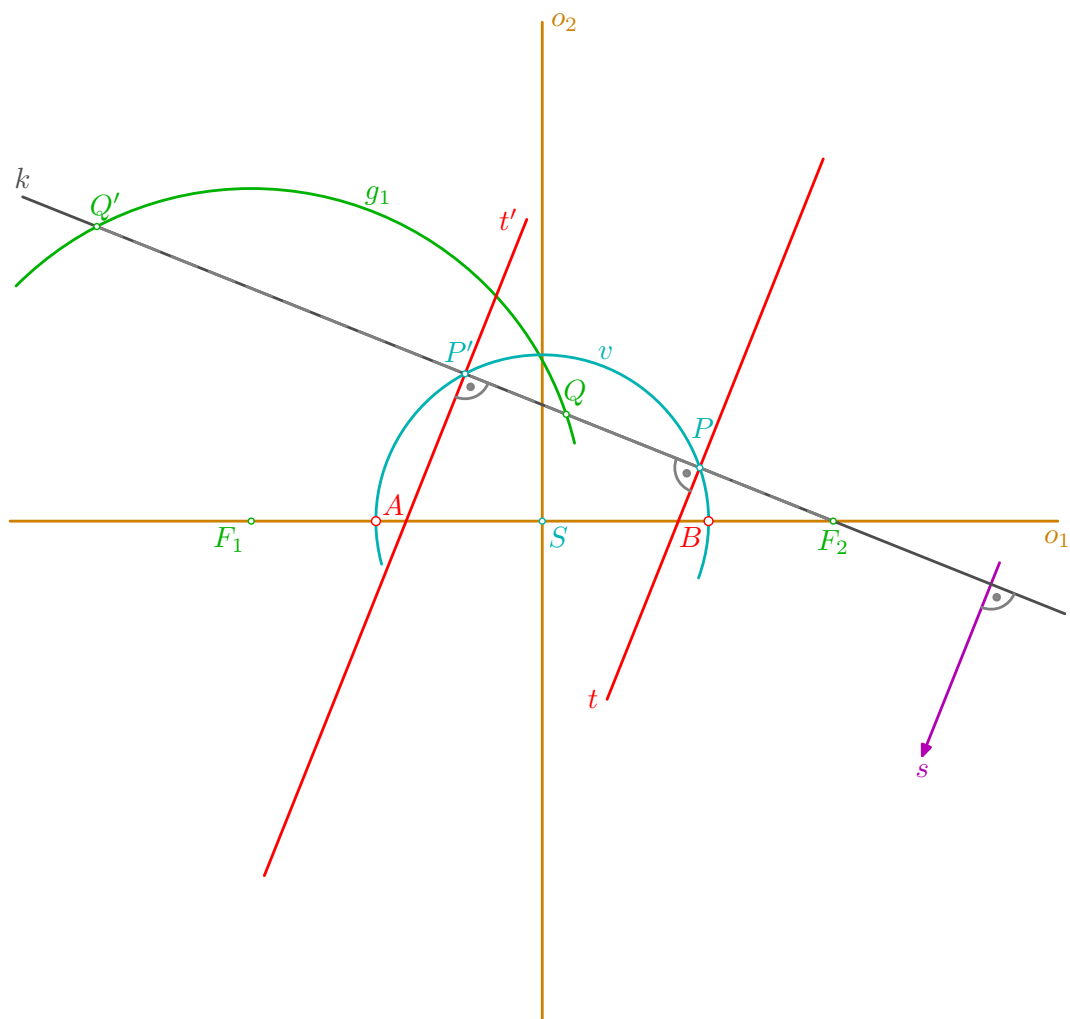
- podle **Věty 2** (na straně 211) leží body souměrně sdružené s ohniskem F_2 podle hledaných tečen na řídicí kružnici $g_1(F_1, 2a = |AB|)$; současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F_2 kolmo k danému směru s ; alternativně bychom mohli hledat body souměrně sdružené s ohniskem F_1 , které musí ležet na řídicí kružnici $g_2(F_2, 2a)$ a na přímce vedené tímto ohniskem kolmo ke směru s



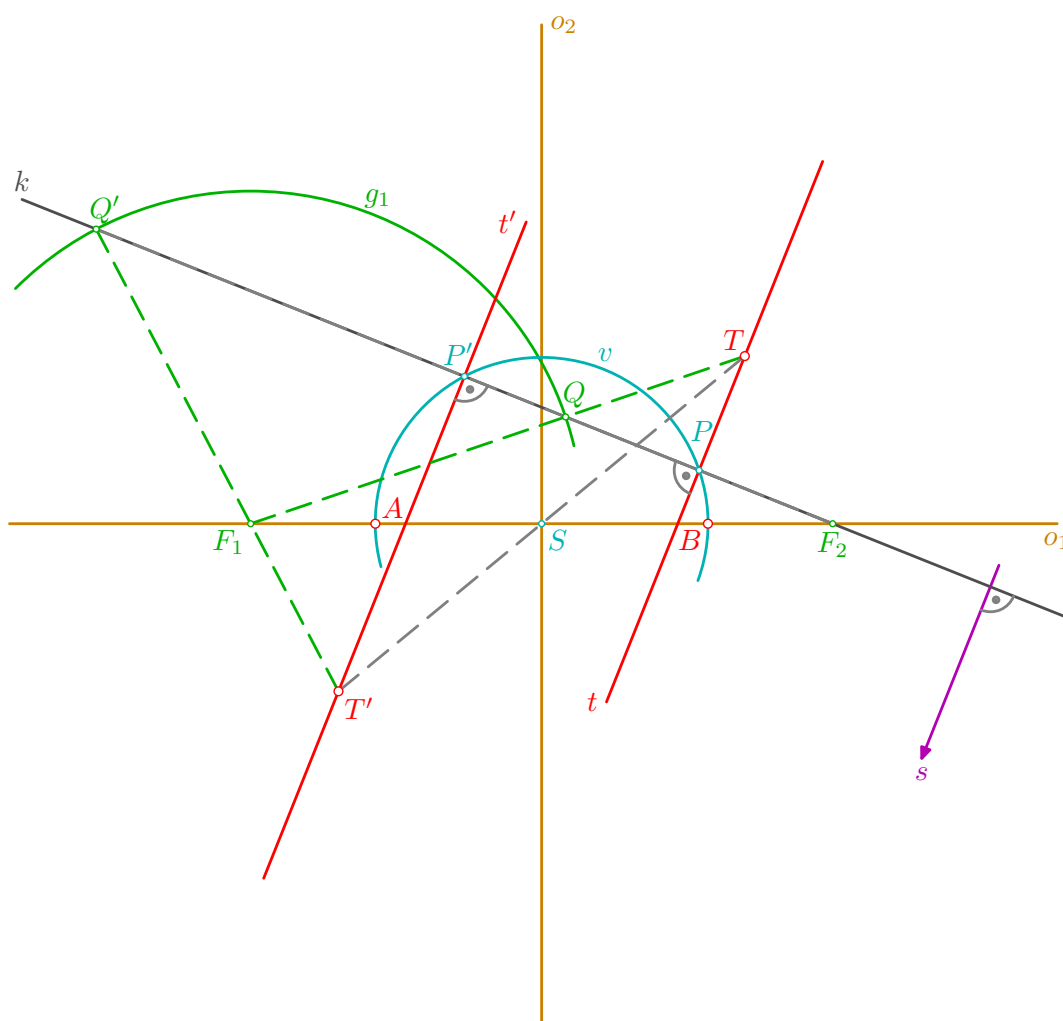
- přímka k protíná kružnici g_1 v bodech Q, Q' ; středy P, P' úseček F_2Q, F_2Q' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F_2 na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 211) leží také na vrcholové kružnici $v(S, a)$; při řešení této úlohy bychom vystačili pouze s **Větou 3** a tedy s body $P, P' = k \cap v$; to v případě, že některý z bodů Q, Q' vychází mimo nákresnu; my zde ovšem chceme demonstrovat také užití vlastností **Věty 2**



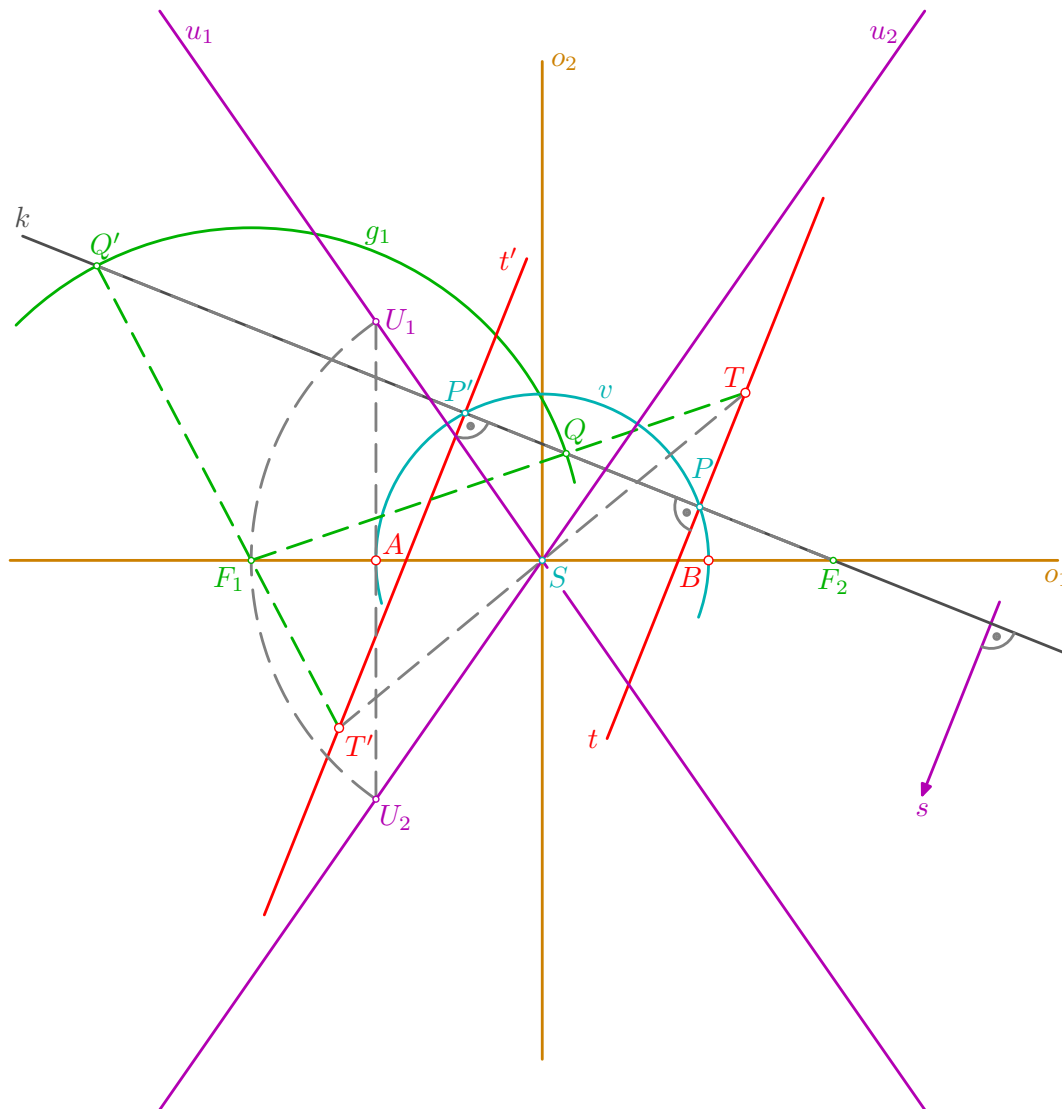
- nyní již můžeme sestrojít tečny t, t' , kde $t \parallel t' \parallel s$ (tj. $t \perp k, t' \perp k$) a $P \in t, P' \in t'$; zvědavý čtenář si může do obrázku dokreslit alternativní variantu řešení: paty kolmice vedené ohniskem F_1 kolmo ke směru s padnou na sestrojené tečny t, t' a současně na vrcholovou kružnici $v(S, a)$



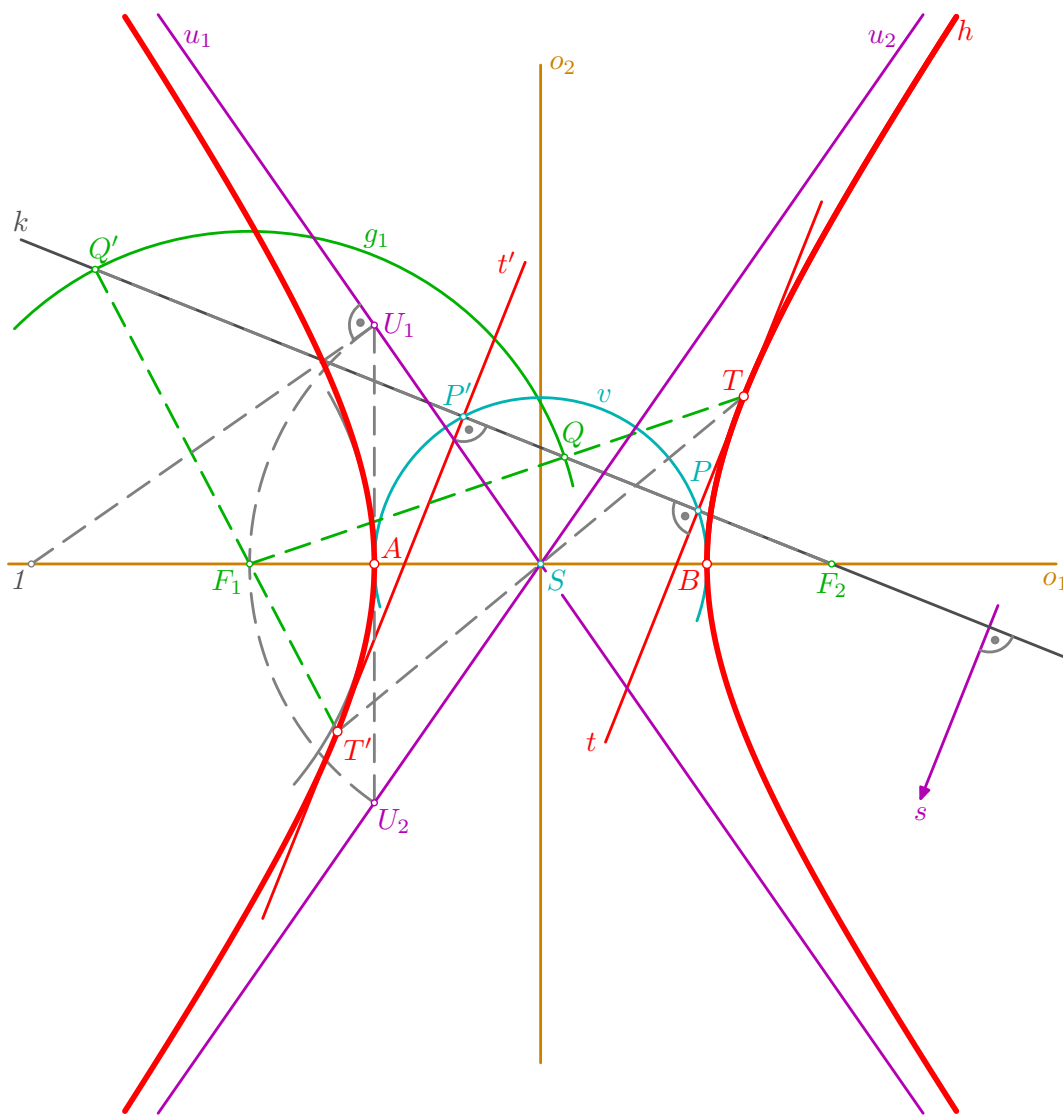
- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s hyperbolou platí: $T = t \cap F_1Q, T' = t' \cap F_1Q'$; přímka F_1Q , resp. přímka F_1Q' , je vlastně jedním z průvodičů bodu T , resp. bodu T' ; současně platí $F_1T \parallel SP, F_1T' \parallel SP'$ a navíc jsou tečny $t \parallel t'$ středově souměrné podle středu S hyperboly, z čehož vyplývá $S \in TT'$; v této úloze je tedy možné sestrojít pouze jedno řešení na základě ohniskových vlastností a druhé lze snadno doplnit pomocí středové souměrnosti; konstrukce vztahující se k užití alternativního řešení pomocí druhého ohniska F_1 jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- pro přesnější vyrýsování jsou doplněny asymptoty $u_1 = SU_1, u_2 = SU_2$, kde body U_1, U_2 leží na kolmici k ose o_1 vedené vrcholem A a na kružnici o poloměru $|SF_1|$ opsané kolem středu S



- nyní již můžeme doplnit oblouky hyperoskulačních kružnic ve vrcholech a vyrýsovat část hyperboly h , která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' rovnoběžných s daným směrem s



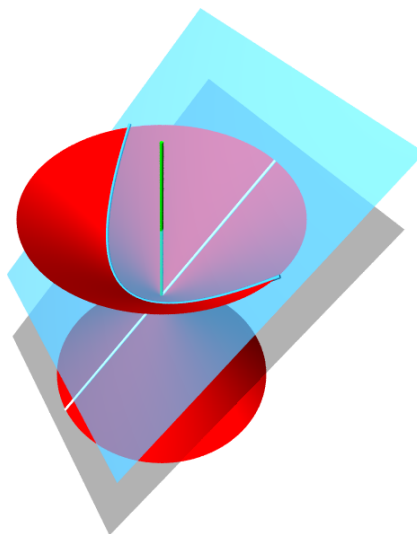
□

Diskuze: Je-li přímka k , vedená ohniskem F_2 kolmo k danému směru s , sečnou, resp. tečnou, resp. nesečnou, řídicí kružnice $g_1(F_1, 2a)$, pak lze daným směrem vést dvě různé tečny, resp. jedinou tečnu (asymptotu), resp. žádnou tečnu, k dané hyperbole h ; k témuž závěru lze dojít při užití alternativních způsobů řešení – tj. pomocí druhé řídicí kružnice g_2 , nebo pomocí vrcholové kružnice v .

1.4. Parabola



Výklad



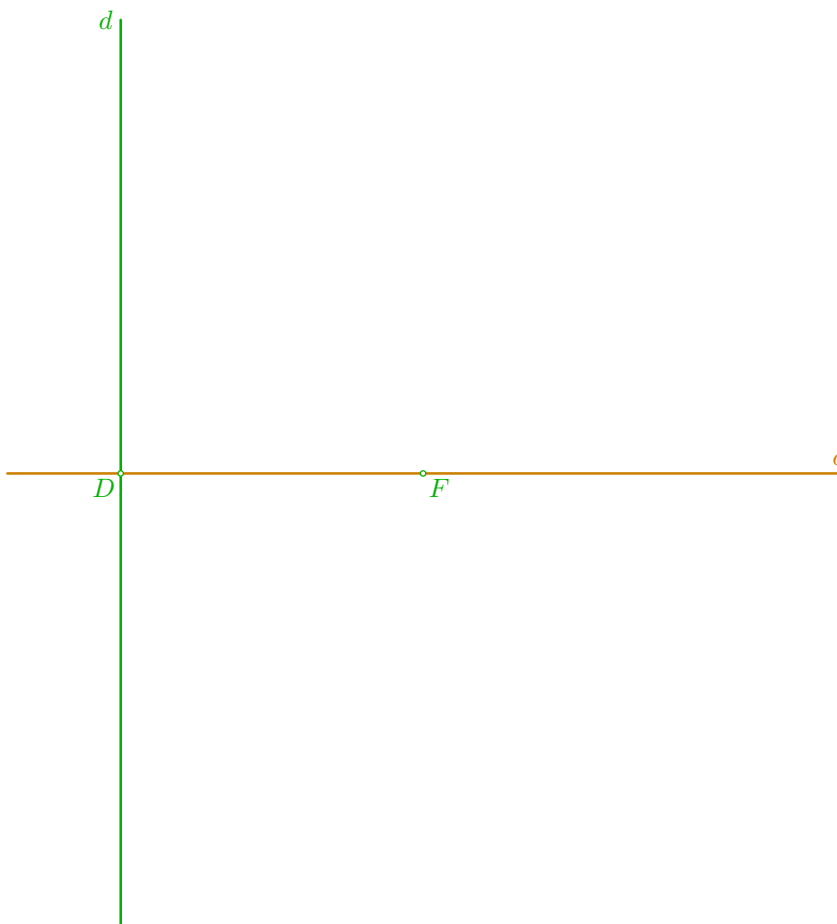
1.4.1. Definice a ohniskové vlastnosti

- *prostorová definice* (viz obrázek nahoře): **parabola** je průsečnou křivkou rovinného řezu na rotační kuželové ploše, jestliže řzná rovina má takovou polohu, že rovina s ní rovnoběžná jdoucí vrcholem se dotýká kuželové plochy podél jedné její povrchové přímky (nebo jinak: odchylka roviny řezu od osy je rovna odchylce povrchových přímek)
- *ohnisková definice*: **parabola** p je množinou všech bodů v dané rovině ρ , jež mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a od daného bodu F , který na přímce d neleží; symbolicky zapsáno:

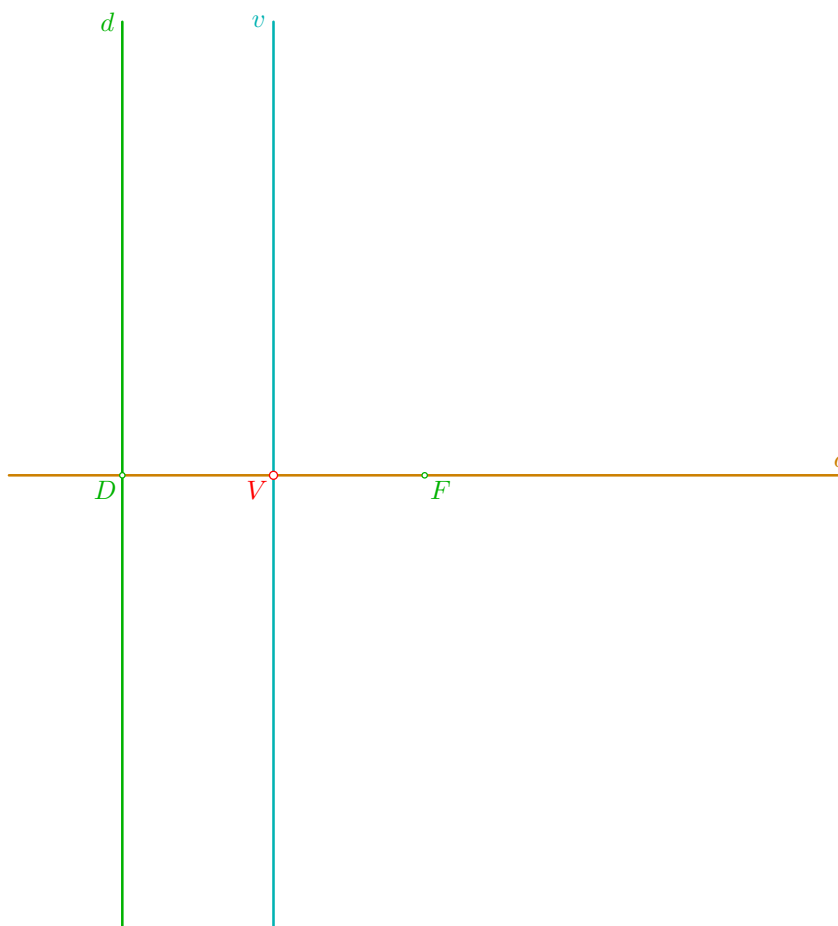
$$p = \{X \in \rho; |Xd| = |FX|, F \notin d\}$$

Konstrukce a základní pojmy

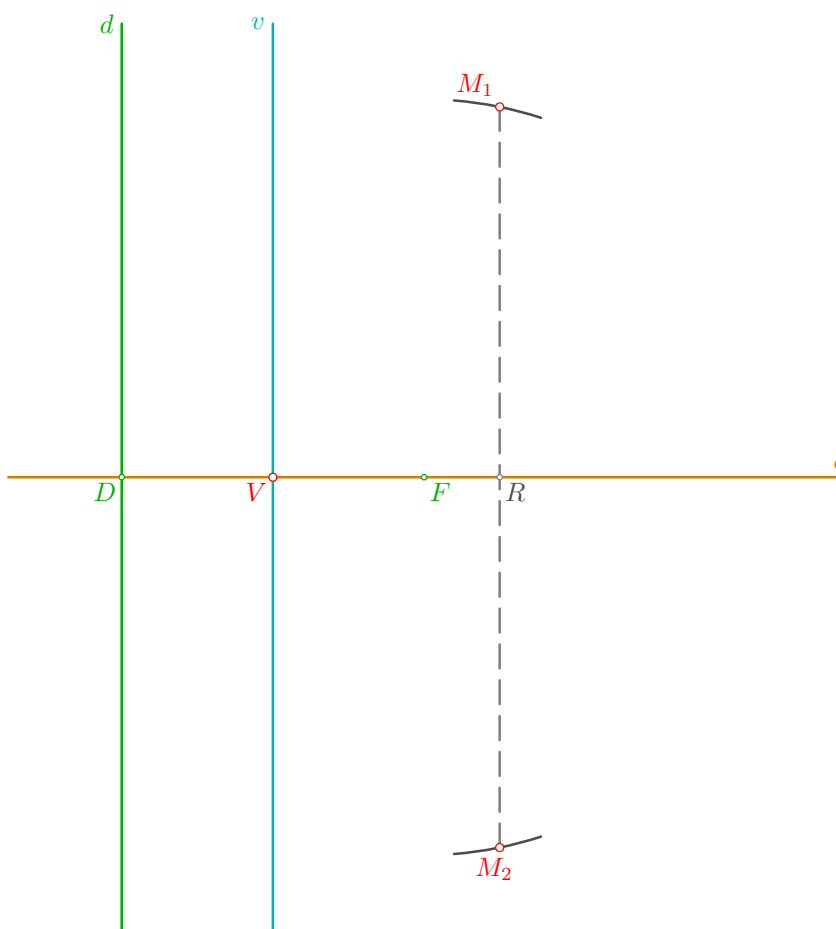
- na vodorovné přímce o zvolme dva různé body D, F a bodem D veďme svislou přímku $d \perp o$; bod F nazveme **ohniskem** a přímka d je tzv. **řídící přímka** paraboly; přímka $o = DF$ je **osa** paraboly a vzdálenost $|Fd| = |FD|$ ohniska od řídící přímky je tzv. **parametr** paraboly



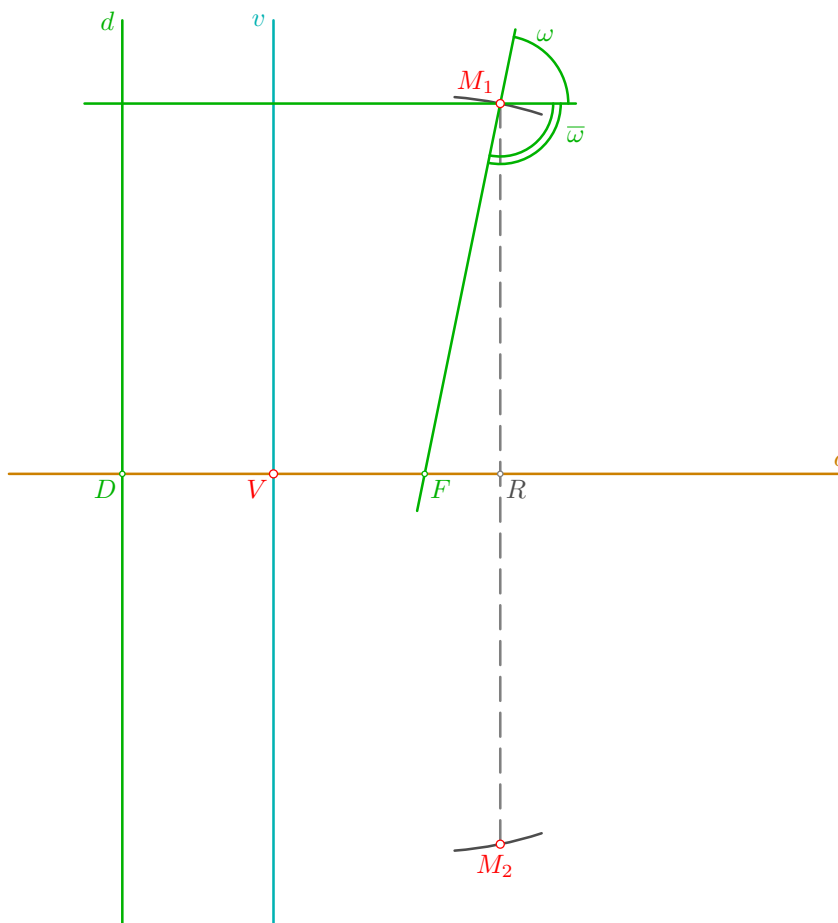
- sestrojme střed V úsečky FD ; platí pro něj $|Vd| = |VD| = |VF|$ a podle ohniskové definice je to tedy bod paraboly, říkáme mu **vrchol**; dá se ukázat, že přímka $v \parallel d$, $V \in v$ je tečna paraboly v bodě V , tedy tzv. **vrcholová tečna**



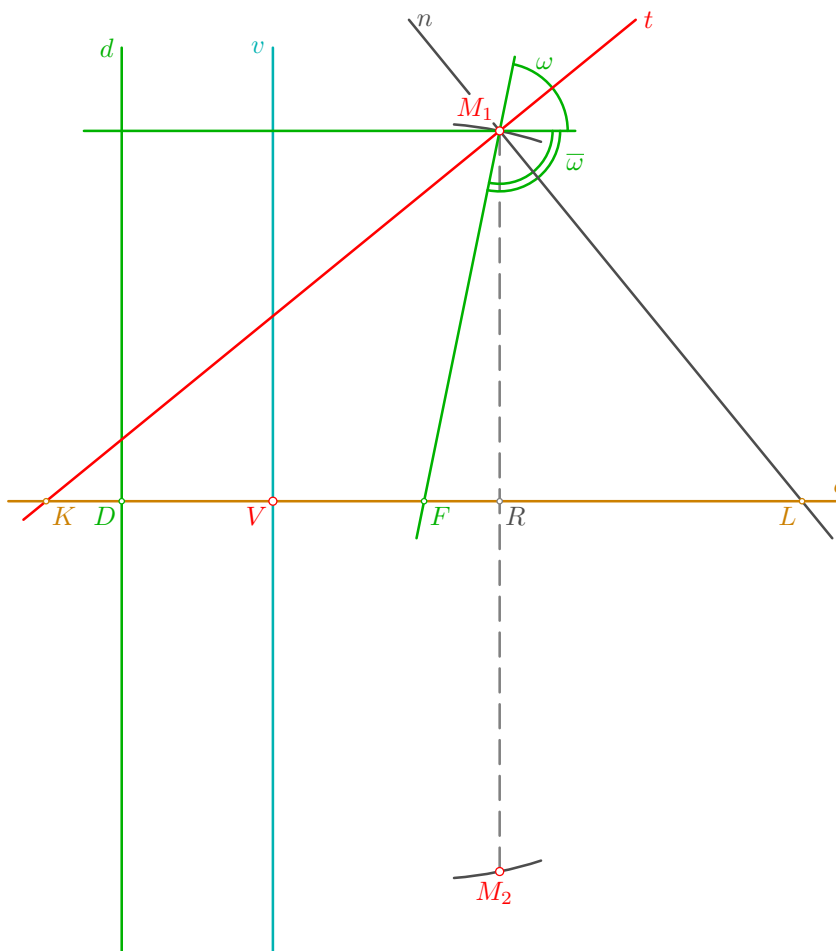
- sestrojme další **obecné body** paraboly: na polopřímce VF zvolme pomocný bod R a veďme jí rovnoběžku s řídicí přímkou d ; tuto pomocnou přímku protněme oblouky kružnice opsané kolem ohniska F poloměrem délky $|RD|$; získáme tak dva body M_1, M_2 , kde např. pro M_1 platí $|M_1d| = |RD| = |FM_1|$ (analogicky pro M_2); podle ohniskové definice tak snadno můžeme jinou volbou bodu R konstruovat další a další body paraboly p ; zvolíme-li bod R ve vnitřním bodě polopřímky VD , pak se pomocná rovnoběžka a kružnice neprotnou a nezískáme tak žádné další body paraboly; z uvedené konstrukce dále vyplývá, že se body paraboly směrem od vrcholu stále více vzdalují od osy o



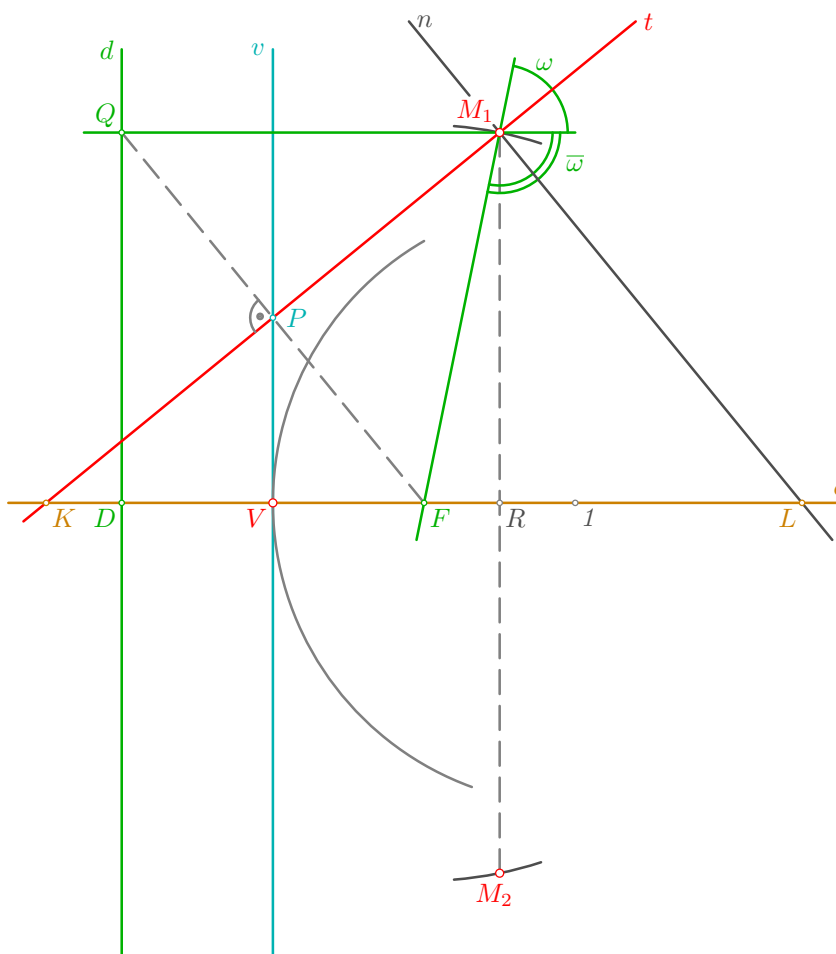
- pro další konstrukce vyberme např. bod M_1 , veďme jím rovnoběžku s osou o a přímkou FM_1 , což jsou tzv. **průvodiče bodu** M_1 ; ty rozdělí rovinu na čtyři úhly, vždy dva protější vrcholové shodné; úhel, v němž leží bod D (nebo úhel k němu vrcholový) označme ω a nazvěme ho **vnější úhel průvodičů** bodu M_1 ; některý z úhlů vedlejších k úhlu ω označme $\bar{\omega}$ a řijeme mu **vnitřní úhel průvodičů** bodu M_1



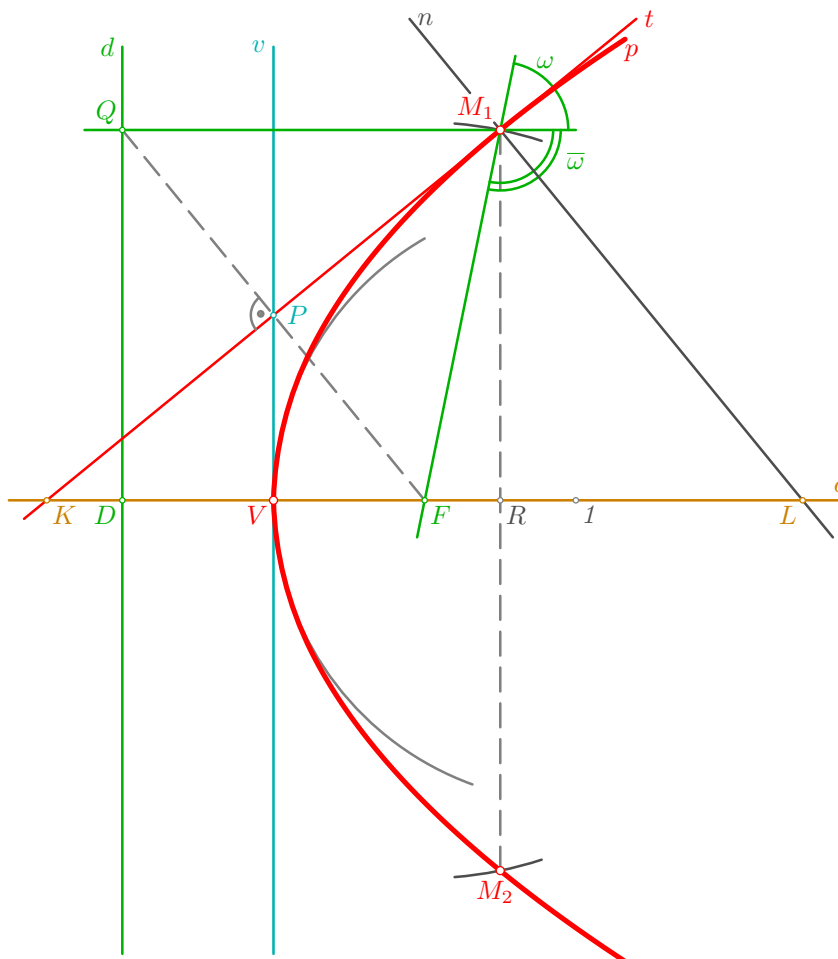
- dá se dokázat, že osa t vnějšího úhlu ω průvodičů bodu M_1 je současně **tečnou** paraboly v bodě M_1 ; přímka $n \perp t$ je pak **normálou** paraboly v bodě M_1 a současně osou vnitřního úhlu $\bar{\omega}$ průvodičů bodu M_1 ; to platí v každém bodě paraboly a toto tvrzení je shrnuto v dále uvedené **Větě 1** (na straně 236); označme ještě body K a L , kde $K = t \cap o$ a $L = n \cap o$; potom úsečka KR je tzv. **subtangenta** bodu M_1 a úsečka LR je jeho **subnormála**; tyto úsečky mají zajímavé vlastnosti, které budou popsány v následujícím kroku a obecně jsou shrnuty ve **Větech 4,5,6** (na straně 237)



- pro jednodušší a pěknější vyrýsování paraboly sestrojíme v jejím vrcholu V oblouk tzv. **hyperoskulační kružnice**: její poloměr je roven parametru $|Fd|$ paraboly a její střed I tedy sestrojíme na polopřímce VF tak, že platí $|IV| = |FD| = |Fd|$; oblouk hyperoskulační kružnice přibližně nahrazuje průběh paraboly v blízkém okolí vrcholu V , ale podobně jako u hyperboly není jeho konstrukce tak významná jako u elipsy



- na závěr je vytažena parabola p , což lze provést od ruky, nebo pomocí vhodného křivítka; parabola je také, stejně jako elipsa a hyperbola, uzavřená křivka, která se v nevlastním bodě osy o dotýká nekonečna, tj. nevlastní přímky dané roviny ρ , v níž leží. . .



□

Věta 1

Tečna (normála) v bodě paraboly pólí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů.

Věta 2

Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle jejich tečen je řídicí přímka paraboly.

Věta 3

Množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna paraboly.

Věta 4

Subtangenta bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlena jejím vrcholem.

Věta 5

Součet subtangenty a subnormály bodu paraboly (vyjma vrcholu) je půlen jejím ohniskem.

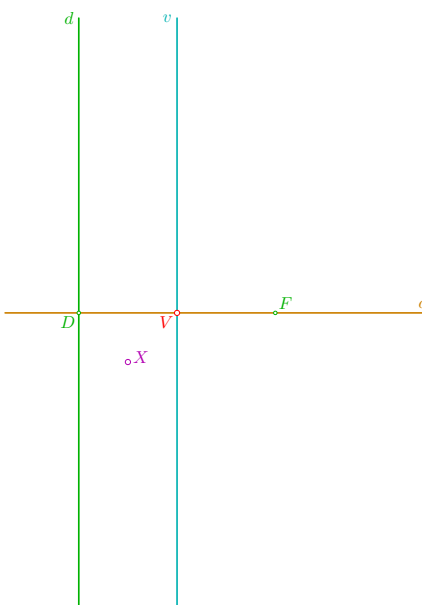
Věta 6

Délka subnormály libovolného bodu paraboly (vyjma jejího vrcholu) je rovna parametru paraboly.

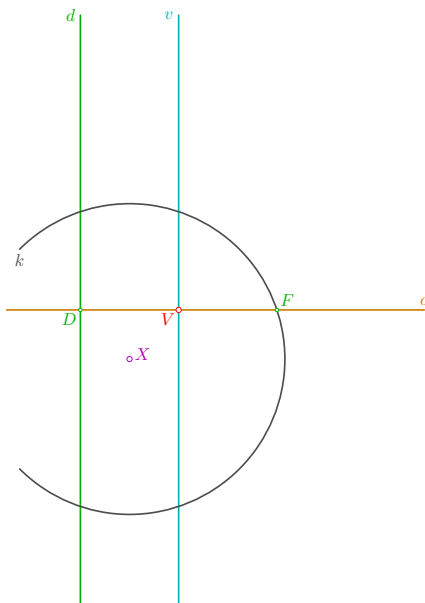
Řešené úlohy**Tečny k parabole daným bodem**

Příklad: Bodem X ved'te tečny k nenarýsované parabole p , která je dána ohniskem a řídicí přímkou.

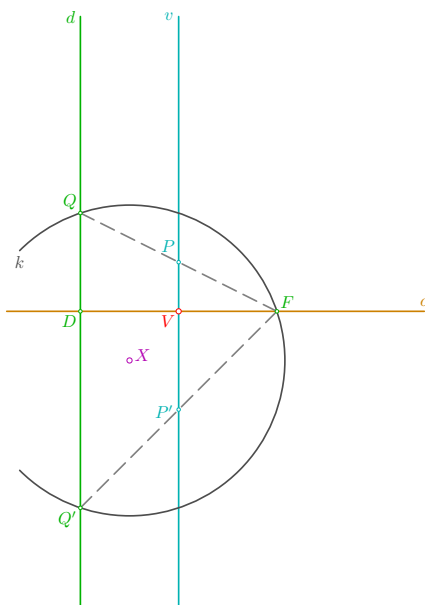
- vodorovně zvolme osu o , na ní ohnisko F a pomocný bod D , kterým jde svisle řídicí přímka $d \perp o$; doplníme vrchol V jako střed úsečky FD a v něm sestrojme vrcholovou tečnu $v \parallel d$; rovněž zvolme bod X , z něhož pomocí výše uvedených vět povedeme tečny k zadané parabole



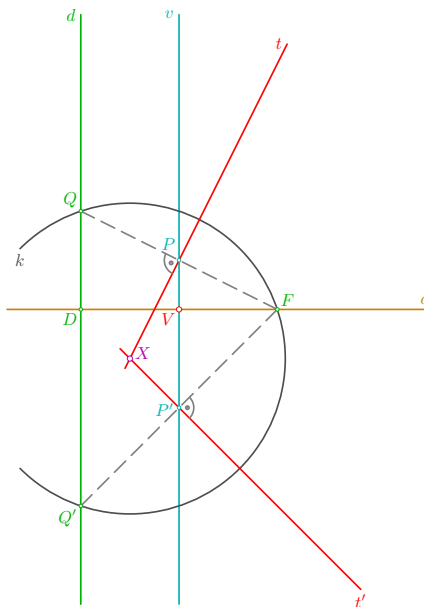
- podle **Věty 2** (na straně 236) leží body souměrně sdružené s ohniskem F podle hledaných tečen na řídicí přímce d a současně musí mít od bodu X vzdálenost $|FX|$, tj. leží také na kružnici $k(X, |FX|)$



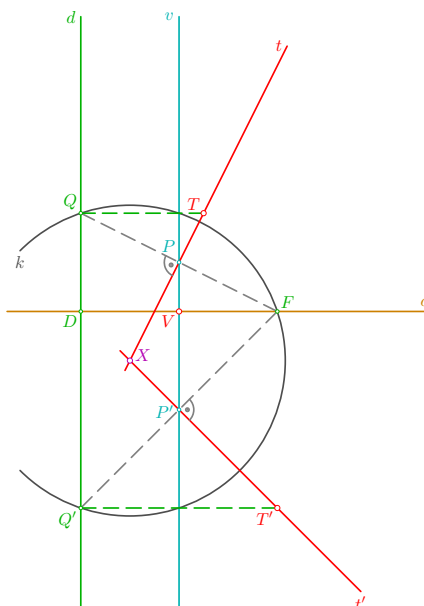
- kružnice k protíná řídicí přímku d v bodech Q, Q' ; středy P, P' úseček FQ, FQ' jsou paty kolmic spuštěných z ohniska F na hledané tečny a podle **Věty 3** (na straně 237) leží také na vrcholové tečně v



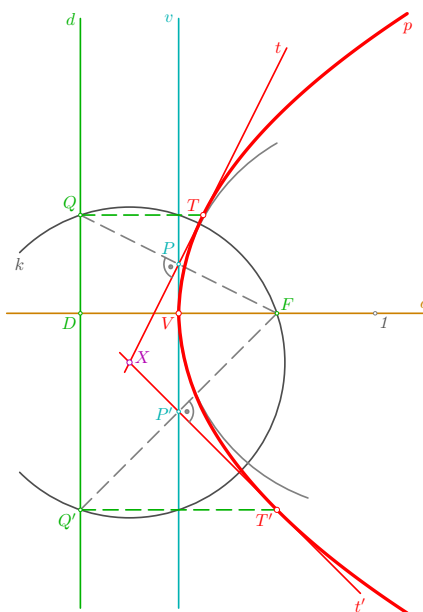
- nyní již můžeme sestrojít tečny $t = XP, t' = XP'$, pro které platí: $t \perp FQ, t' \perp FQ'$; za povšimnutí stojí skutečnost, že body P, P' musí ležet také na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem XF , čehož lze využít k alternativnímu postupu řešení (konstrukce není v obrázku provedena a je přenechána čtenáři jako cvičení)



- pro body T, T' dotyku tečen t, t' s parabolou platí: $T \in t, TQ \parallel o$ a $T' \in t', T'Q' \parallel o$; přímka TQ , resp. přímka $T'Q'$, je vlastně jedním z průvodičů bodu T , resp. bodu T' ; při alternativním způsobu řešení můžeme pro konstrukci bodů T, T' dotyku využít také vlastnosti příslušné subtangenty nebo subnormály, tj. **Věty 4,5,6** (na straně 237) – konkrétně nechtě si to čtenář promyslel a případně provede jako cvičení. . .



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu V a vyrýsovat parabolu p , která se v bodech T, T' dotýká tečen t, t' vedených z daného bodu X



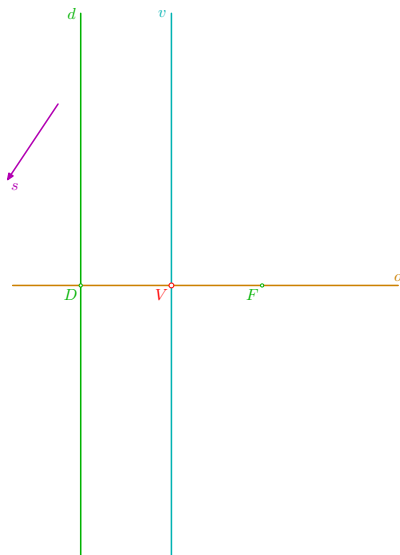
□

Diskuze: pokud kružnice $k(X, |XF|)$ protíná řídicí přímku d ve dvou bodech, resp. se jí dotýká v jednom bodě, resp. nemají žádný společný bod, pak bod X leží ve vnější oblasti paraboly p , resp. bod X je bodem paraboly p , resp. bod X leží ve vnitřní oblasti paraboly p , a lze jím vést dvě různé tečny, resp. jedinou (dvojnásobnou) tečnu, resp. jím nelze vést žádnou tečnu k dané parabole p . Při alternativním způsobu řešení rozhoduje o počtu tečen vzájemná poloha vrcholové tečny v a Thaletovy kružnice nad průměrem FX .

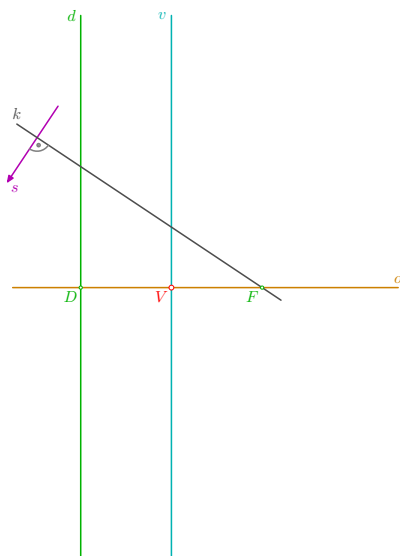
Tečny k parabole daného směru

Příklad: K nenarýsované parabole p , která je dána ohniskem a řídicí přímkou, veďte tečny směru s (tj. rovnoběžné s přímkou s).

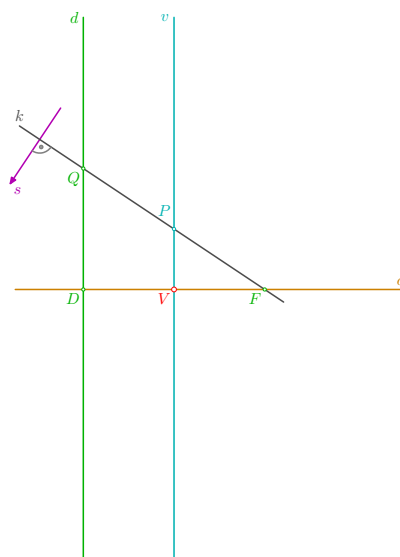
- vodorovně zvolme osu o , na ní ohnisko F a pomocný bod D , kterým jde svisle řídicí přímka $d \perp o$; doplníme vrchol V jako střed úsečky FD a v něm sestrojme vrcholovou tečnu $v \parallel d$; rovněž zvolme směr s , s nímž mají být hledané tečny rovnoběžné



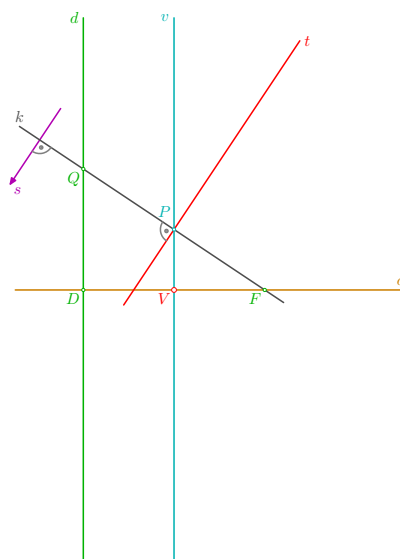
- podle **Věty 2** (na straně 236) leží body souměrně sdružené s ohniskem F podle hledaných tečen na řídicí přímkce d a současně musí ležet na kolmici k vedené ohniskem F kolmo k danému směru s



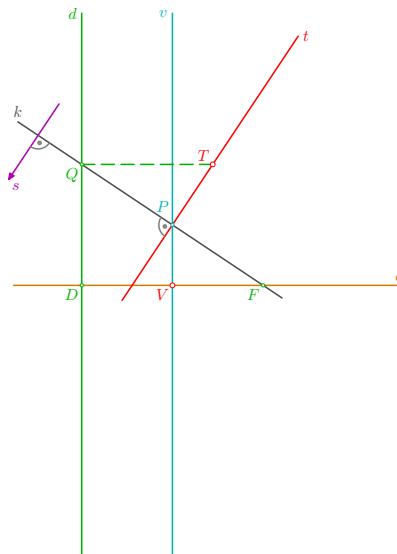
- přímky k, d se protínají v bodě Q ; střed P úsečky FQ je pata kolmice spuštěné z ohniska F na hledanou tečnu a podle **Věty 3** (na straně 237) leží také na vrcholové tečně v



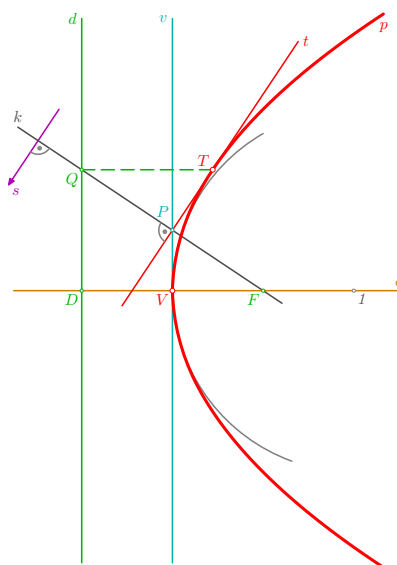
- nyní již můžeme sestavit hledanou tečnu t , kde $t \parallel s$ (tj. $t \perp k$) a $P \in t$



- pro bod T dotyku tečny t s parabolou platí: $T \in t, TQ \parallel o$; přímka TQ je vlastně jedním z průvodičů bodu T ; alternativní způsob konstrukce bodu T pomocí vlastností jeho subtangenty nebo subnormály (viz **Věty 4,5,6** na straně 237) jsou přenechány čtenáři jako cvičení...



- nyní již můžeme doplnit oblouk hyperoskulační kružnice ve vrcholu V a vyrýsovat parabolu p , která se v bodě T dotýká tečny t rovnoběžné s daným směrem s



□

Diskuze: Jsou-li řídicí přímka d a přímka k vedená ohniskem F kolmo k danému směru s různoběžné (tj. směr s je různoběžný s osou o), resp. rovnoběžné (tj. $s \parallel o$), pak lze sestrojít právě jednu tečnu, resp. nelze sestrojít žádnou tečnu paraboly p daného směru s .

Další užitečná konstrukce paraboly

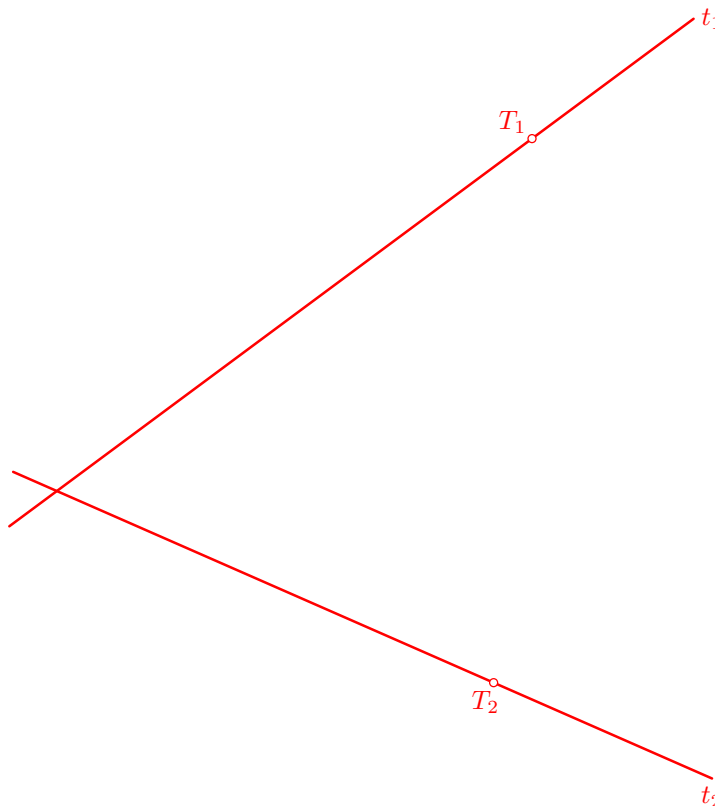


Řešené úlohy

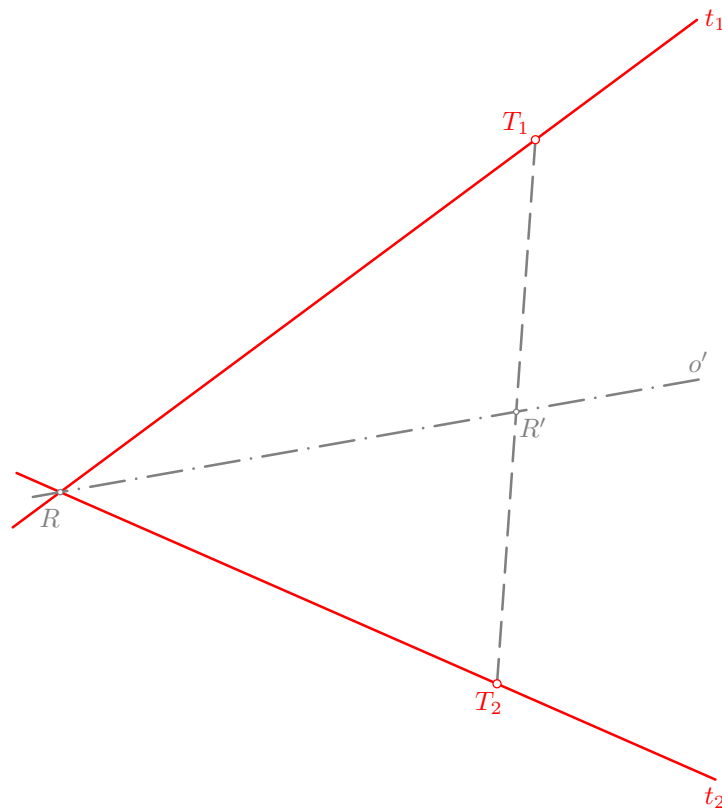
Konstrukce paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku

Příklad: Sestrojte parabolu p , jsou-li dány její tečny t_1, t_2 s body T_1, T_2 dotyku.

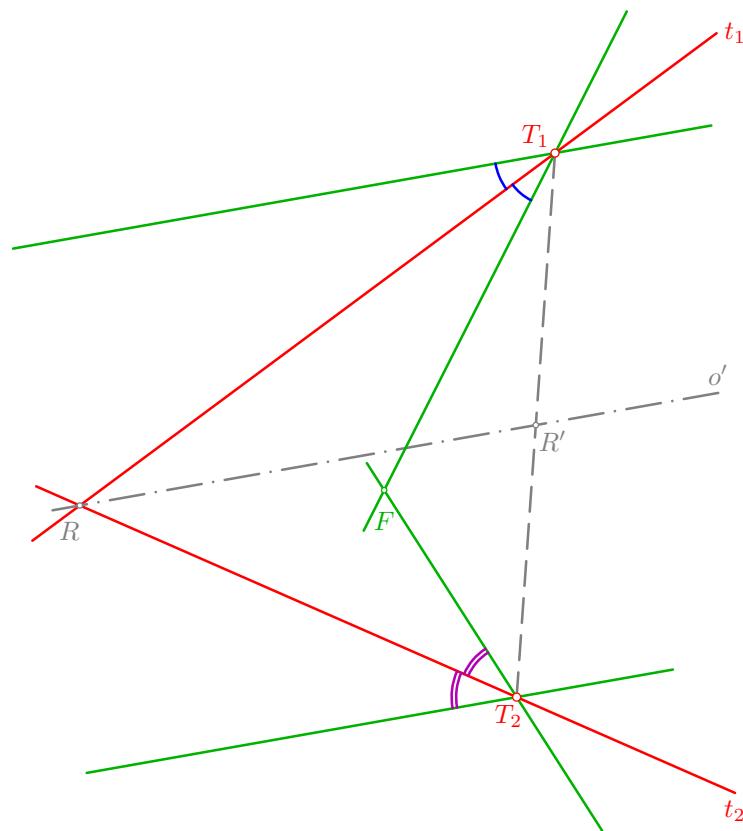
- zvolme dvě různoběžné přímky t_1, t_2 a na každé z nich jeden bod, označme je $T_1 \in t_1$ a $T_2 \in t_2$; žádný z nich nechť přitom neleží v průsečíku zvolených tečen; dá se dokázat, že tímto způsobem je parabola dána jednoznačně, jejím pátým určujícím elementem je nevlastní přímka roviny – tečna hledané paraboly v nekonečnu. . .



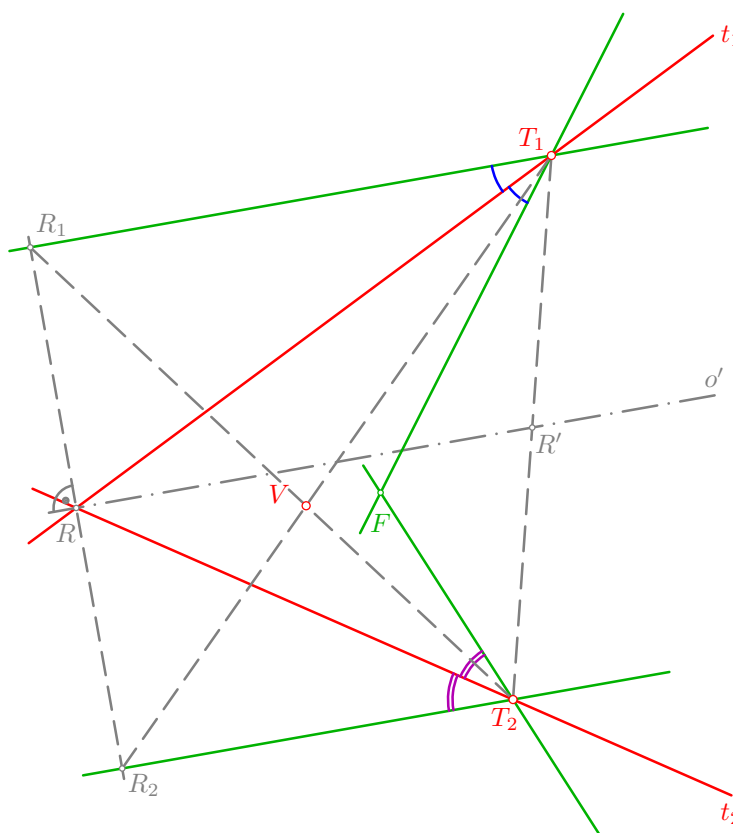
- dá se ukázat, že přímka $o' = RR'$, kde $R = t_1 \cap t_2$ a bod R' je střed úsečky T_1T_2 , udává směr osy o hledané paraboly p (vyplývá to z tzv. projektivních nebo polárních vlastností paraboly); jestliže navíc budou body T_1, T_2 ve stejné vzdálenosti od průsečíku $R = t_1 \cap t_2$, tj. bude-li platit $|T_1R| = |T_2R|$, potom přímka $o' = RR'$ bude přímo osou $o = o'$ hledané paraboly a střed úsečky RR' by podle **Věty 4** (na straně 237) o subtangentě udával její vrchol; pro tuto variantu zadání nechť si čtenář ve volném místě na stránce laskavě načrtne nebo narýsuje samostatný obrázek jako cvičení. . .



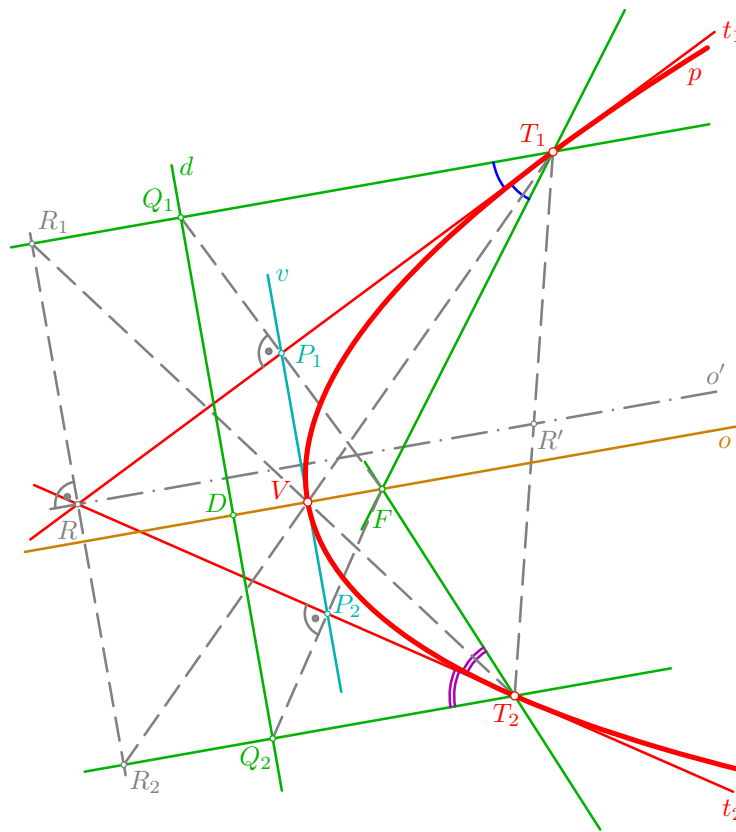
- jeden průvodič bodu T_1 je rovnoběžný s osou o a tedy také s přímkou o' , druhý je podle **Věty 1** (na straně 236) s prvním osově souměrný podle tečny t_1 ; analogicky můžeme sestavit také oba průvodiče bodu T_2 a určit ohnisko F jako průsečík těch průvodičů bodů T_1, T_2 , které nejsou rovnoběžné s přímkou o' ; poznamenejme ještě, že tato konstrukce je při ručním rýsování dosti nepřesná (zejména při přenášení úhlů) a navíc nefunguje v případě, kdy $t_1 \perp t_2$ (necht' si čtenář pro zajímavost tuto variantu opět raději narýsuje do volného místa): při takovém zadání totiž splynou souměrné průvodiče bodů T_1, T_2 s přímkou T_1T_2 a nelze tedy nalézt ohnisko F jako jejich průsečík; dá se ovšem dokázat, že v tomto případě je ohnisko F patou kolmice spuštěné z průsečíku $R = t_1 \cap t_2$ na přímkou T_1T_2



- známe-li ohnisko F paraboly, můžeme již doplnit osu o a pomocí **Vět 2,3** (na straně 236) také vrcholovou tečnu v a řídicí přímku d ; než to provedeme, ukažme ještě jiný alternativní způsob řešení zadané úlohy: označme R_1, R_2 průsečíky průvodičů bodů T_1, T_2 rovnoběžných se směrem o' a kolmice k přímce o' vedené bodem $R = t_1 \cap t_2$; pak se dá ukázat, že průsečík úhlopříček R_1T_2, R_2T_1 ve vzniklém pravoúhlém lichoběžníku $R_1R_2T_2T_1$ je vrcholem V hledané paraboly p (opět to vyplývá z projektivních vlastností paraboly); tento způsob řešení funguje bez omezení, tj. je lhostejno, zda jsou zadané tečny t_1, t_2 navzájem kolmé či nikoliv



- ať už máme ohnisko F nebo vrchol V , snadno sestrojíme osu $o \parallel o'$ hledané paraboly p ; dále můžeme z ohniska F vést kolmici k tečně t_1 , najít její patu P_1 , sestrojít bod Q_1 souměrně sdružený a vést jimi vrcholovou tečnu $v \perp o, P_1 \in v$, řídicí přímku $d \perp o, Q_1 \in d$, a následně doplnit vrchol V (totéž lze zřejmě provést vzhledem k druhé dané tečně t_2); nebo při alternativním způsobu řešení vyjdeme od sestrojeného vrcholu V , vedeme jím vrcholovou tečnu $v \perp o$, ta protne dané tečny t_1, t_2 v bodech P_1, P_2 , jimi vedené kolmice k příslušným tečnám se musí protnout na ose o v ohnisku F a body Q_1, Q_2 souměrně sdružené s ohniskem F podle tečen t_1, t_2 určí řídicí přímku d ; rovněž lze využít vlastností subtangenty nebo subnormály některého z bodů T_1, T_2 – prostě možností dořešení úlohy je zde několik...



□

Diskuze: úloha nemá žádné řešení, jsou-li tečny t_1, t_2 navzájem rovnoběžné, nebo některý z bodů T_1, T_2 dotyku splývá s průsečíkem přímek t_1, t_2 ; jinak má daná úloha vždy právě jedno řešení.

1.5. Řešené úlohy na ohniskové vlastnosti kuželoseček

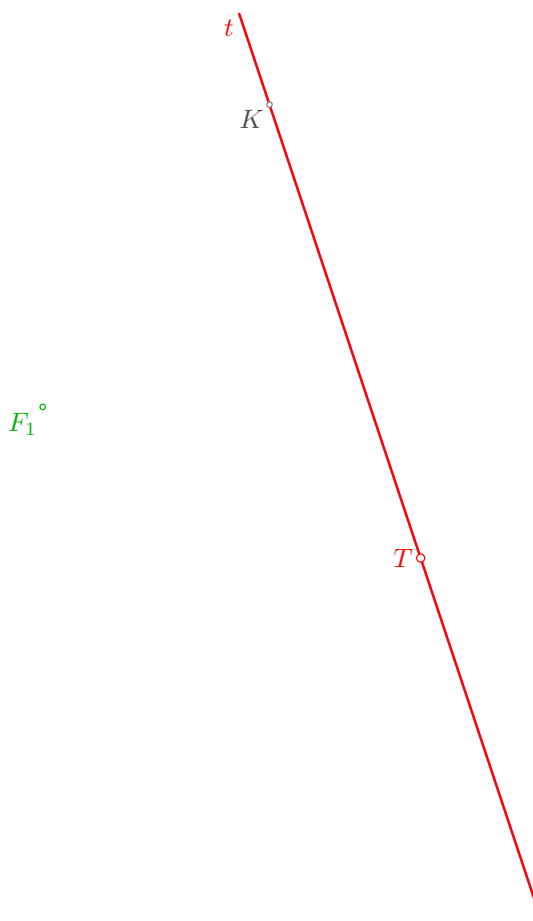
Řešené úlohy



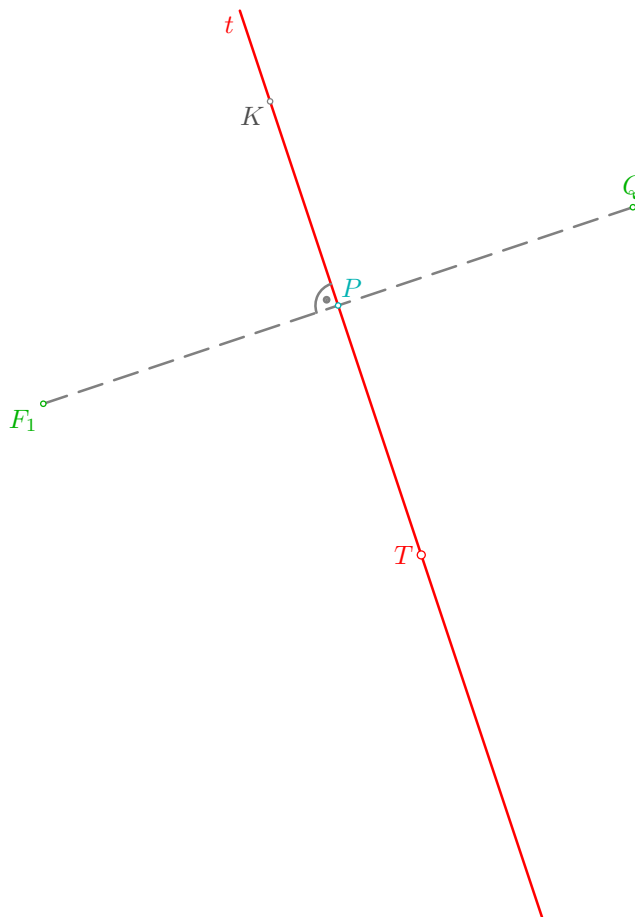
1.5.1. Konstrukce kuželosečky z daných podmínek

Příklad: Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečna $t = TK$ s bodem T dotyku a excentricita e ; $F_1[0; 0]$, $T[5; 2]$, $K[3; -4]$, $e = 3$.

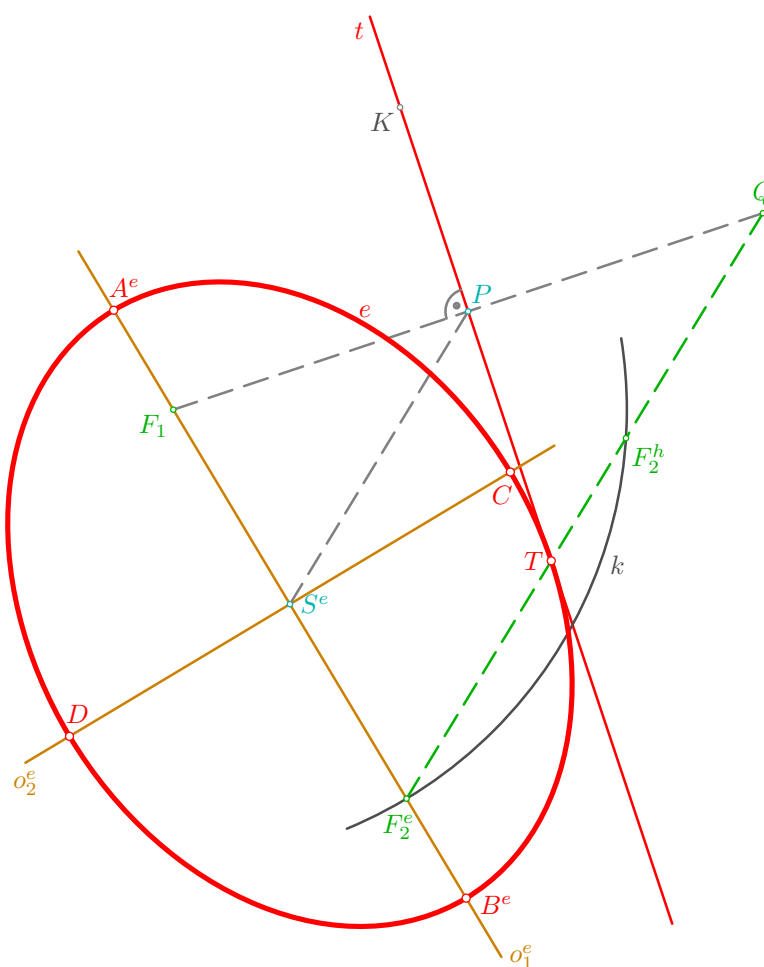
- podle zadání sestrojíme ohnisko F_1 a tečnu $t = TK$; v obrázku jsou pro větší přehlednost následujících konstrukcí vynechány souřadnicové osy; přitom předpokládáme osu x vodorovnou s kladným směrem zleva doprava a osu y svislou s kladným směrem shora dolů; nanese-li tedy od ohniska F_1 , které je v počátku, 5 jednotek vodorovně doprava a odtud 2 jednotky svisle dolů, dostaneme se do bodu $T[5; 2]$, analogicky pro bod K



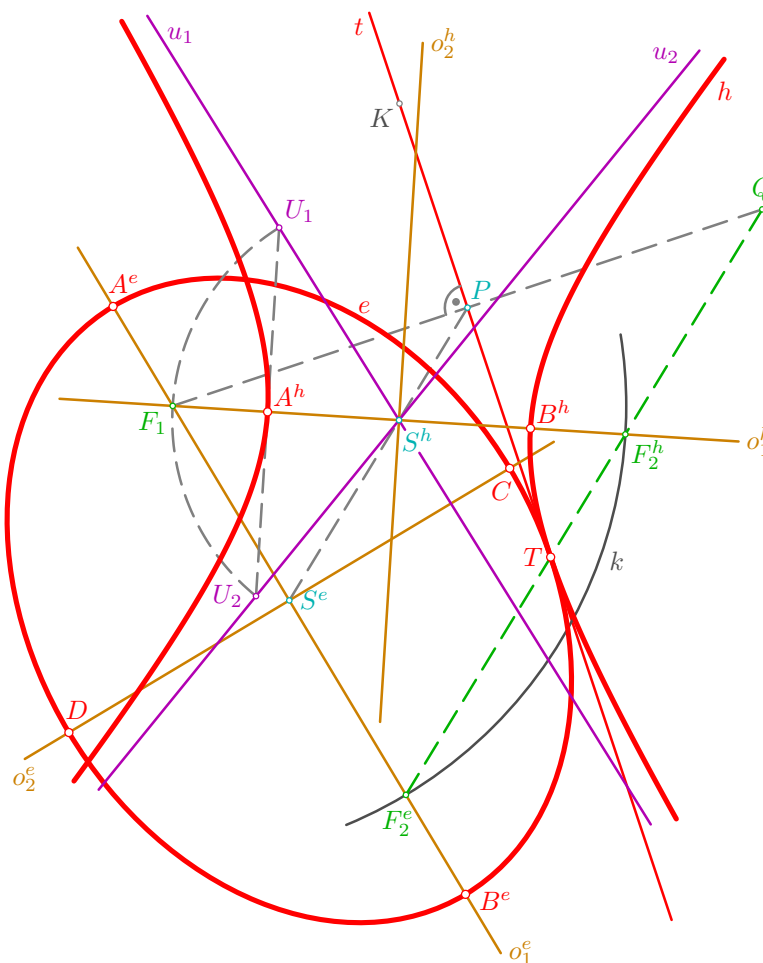
- ze zadání vyplývá, že hledaná kuželosečka je elipsa nebo hyperbola (parabola nemá excentricitu); pokusme se najít její druhé ohnisko F_2 ; nejprve veďme ohniskem F_1 kolmici na tečnu t , sestrojme její patu $P \in t$ a bod Q souměrně sdružený s ohniskem F_1 podle přímky t ; k čemu se nám budou body P, Q hodit, uvidíme v dalších krocích



- nejprve doplníme elipsu e : přímka $o_1^e = F_1F_2^e$ je její hlavní osa, střed S^e úsečky $F_1F_2^e$ je její střed, kterým prochází vedlejší osa $o_2^e \perp o_1^e$; pro délku hlavní poloosy a^e platí $a^e = \frac{|F_2^eQ|}{2} = |S^eP|$ a můžeme tak na hlavní ose o_1^e sestrojít hlavní vrcholy A^e, B^e , kde $|A^eS^e| = |B^eS^e| = a^e$; pro vedlejší vrcholy C, D ležící na vedlejší ose o_2^e pak platí $|CF_1| = |DF_1| = a^e$; na závěr je vhodné doplnit hyperoskulační kružnice ve vrcholech (v obrázku není provedeno) a vytáhnout výslednou elipsu e , která má jedno ohnisko v daném bodě F_1 , dotýká se dané přímky $t = TK$ v jejím daném bodě T a má danou excentricitu $e = 3$



- sestrojme druhé řešení – hyperbolu h : přímka $o_1^h = F_1F_2^h$ je její hlavní osa, střed S^h úsečky $F_1F_2^h$ je její střed, kterým prochází vedlejší osa $o_2^h \perp o_1^h$; pro délku hlavní poloosy a^h platí $a^h = \frac{|F_2^hQ|}{2} = |S^hP|$ a můžeme tak na hlavní ose o_1^h sestrojít vrcholy A^h, B^h , kde $|A^hS^h| = |B^hS^h| = a^h$; na závěr je vhodné doplnit asymptoty $u_1 = S^hU_1, u_2 = S^hU_2$ (konstrukce bodů U_1, U_2 je patrná z obrázku) a vytáhnout výslednou hyperbolu h , která má jedno ohnisko v daném bodě F_1 , dotýká se dané přímky $t = TK$ v jejím daném bodě T a má danou excentricitu $e = 3$

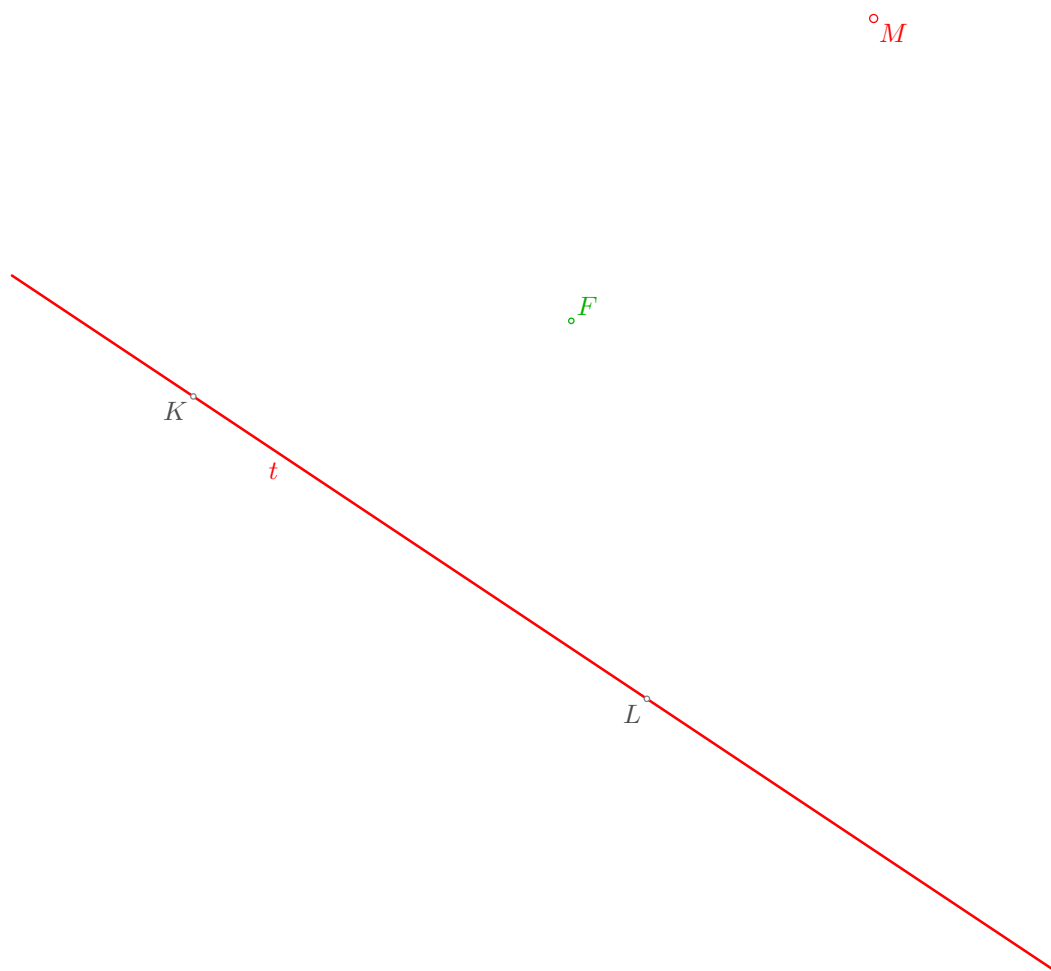


□

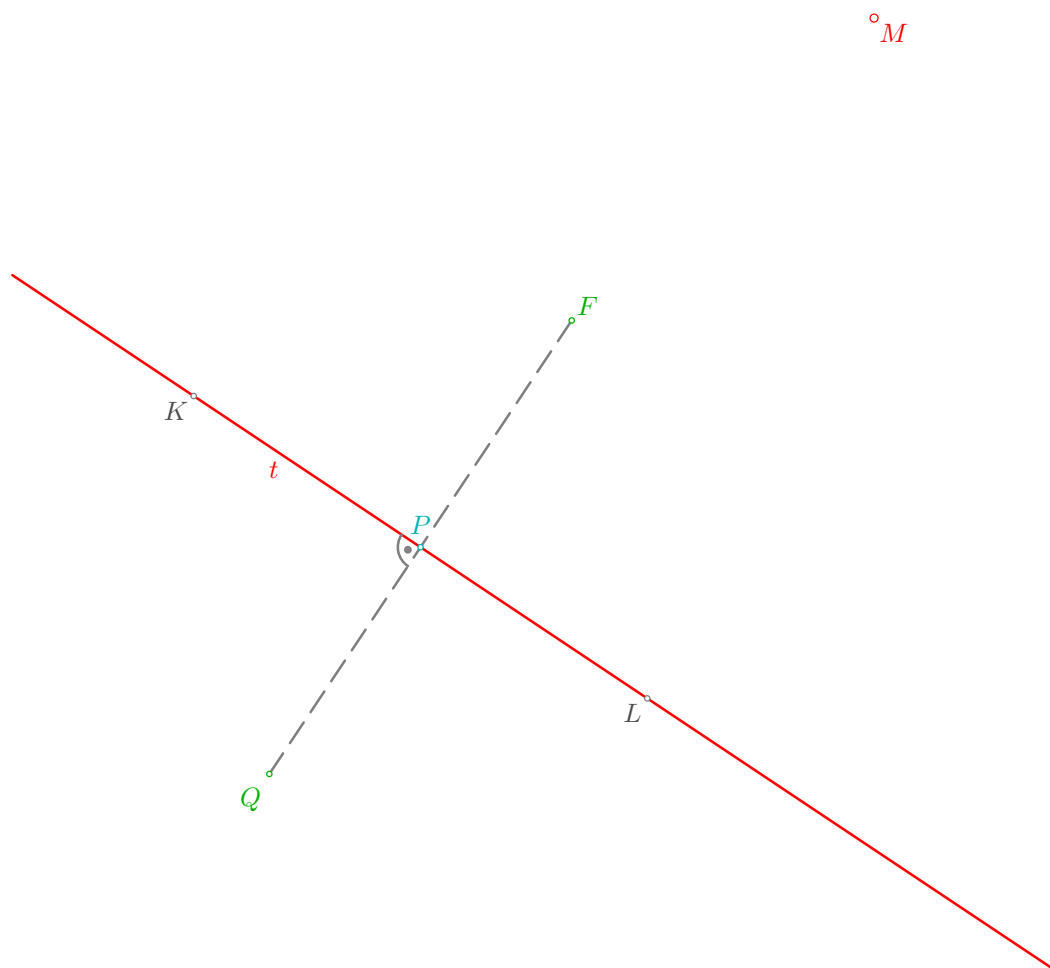
1.5.2. Konstrukce paraboly z daných podmínek

Příklad: Sestrojte parabolu, je-li dáno její ohnisko F , bod M a tečna $t = KL$; $F[0; 0]$, $M[4; -4]$, $K[-5; 1]$, $L[1; 5]$.

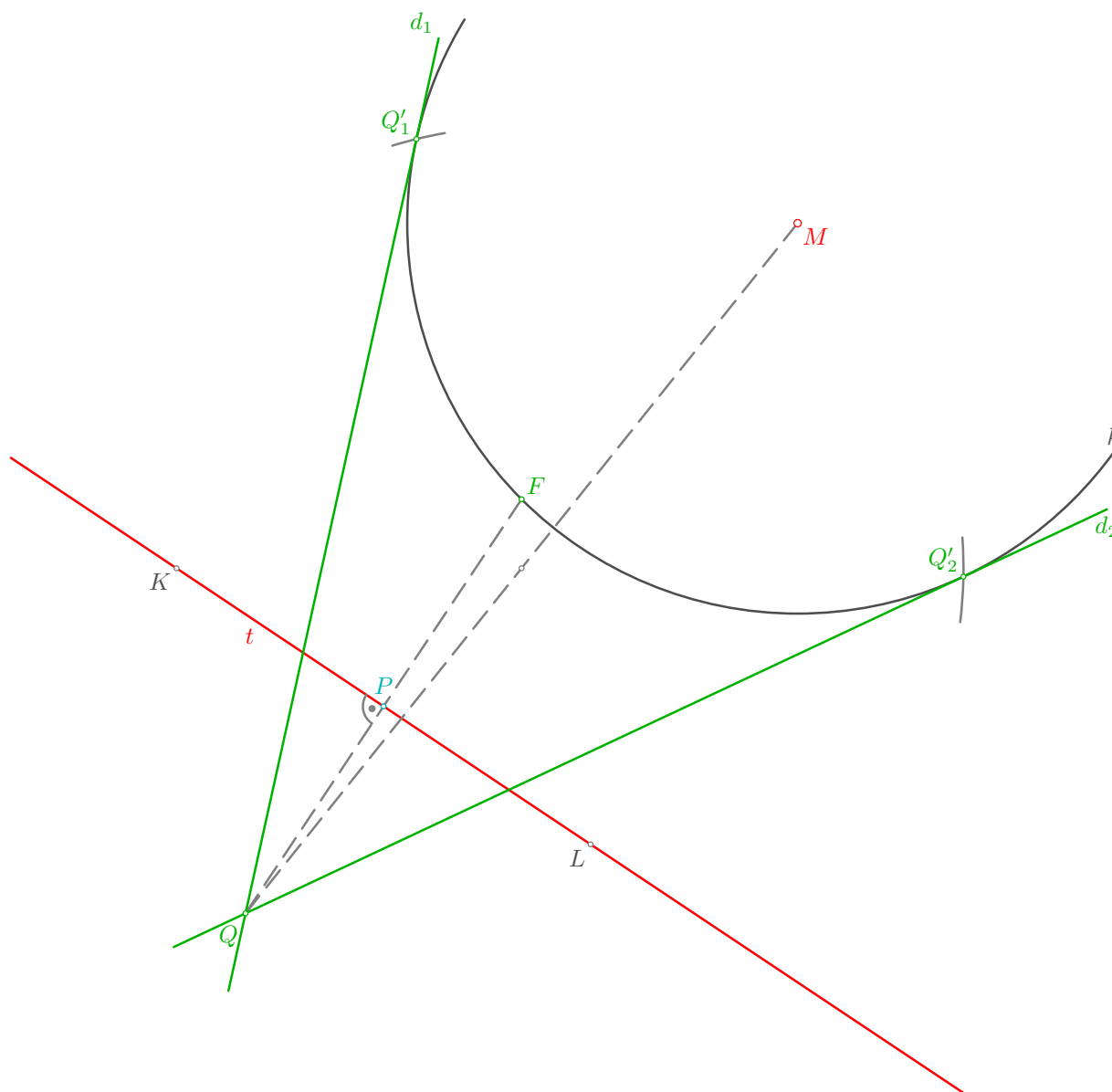
- podle zadání sestrojíme ohnisko F , bod M a tečnu $t = KL$; body jsou vyneseny podle zadaných souřadnic stejným způsobem jako v předchozím příkladě



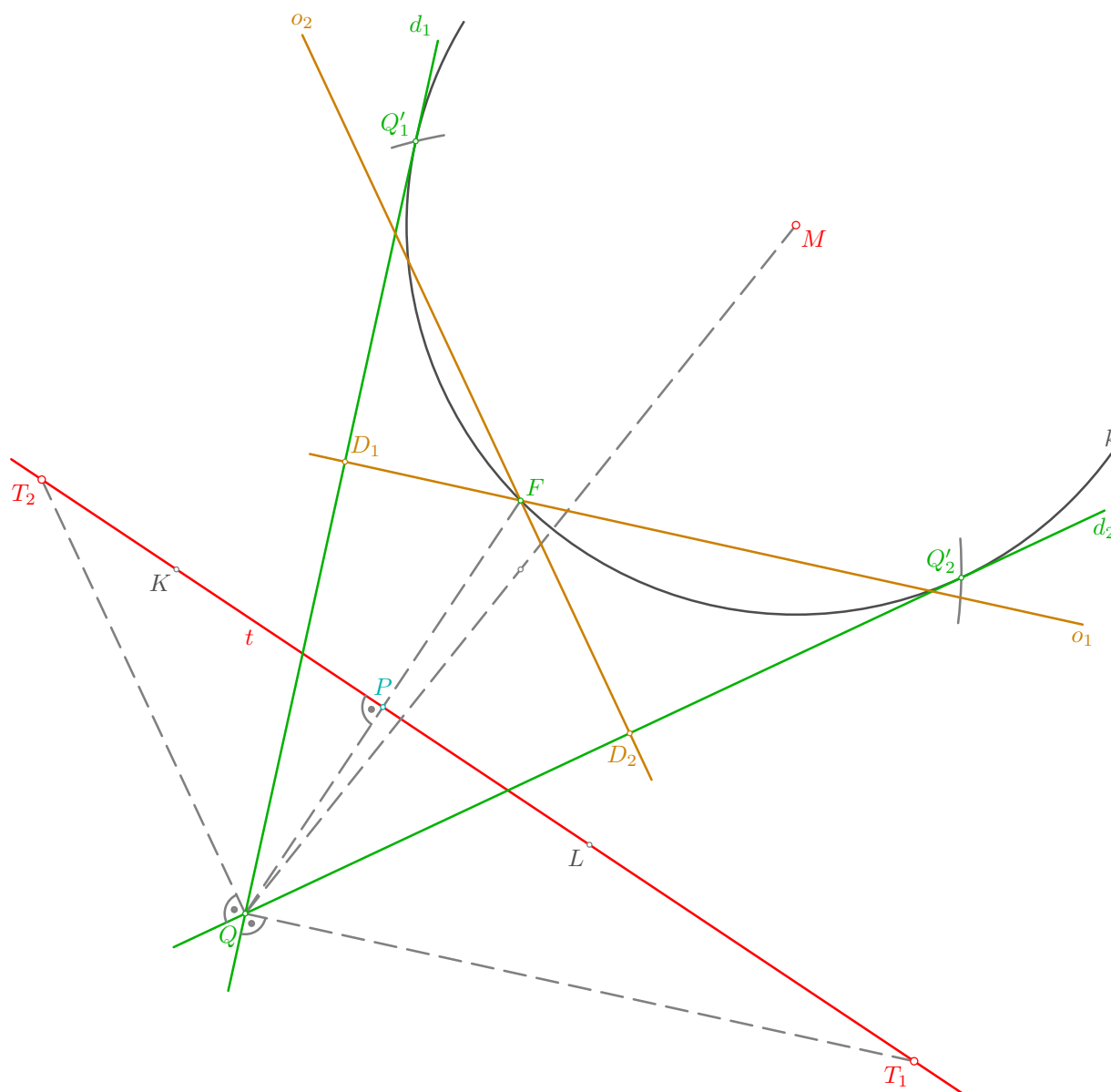
- nejprve veďme ohniskem F kolmici na tečnu t , sestrojme její patu $P \in t$ a bod Q souměrně sdružený s ohniskem F podle přímky t



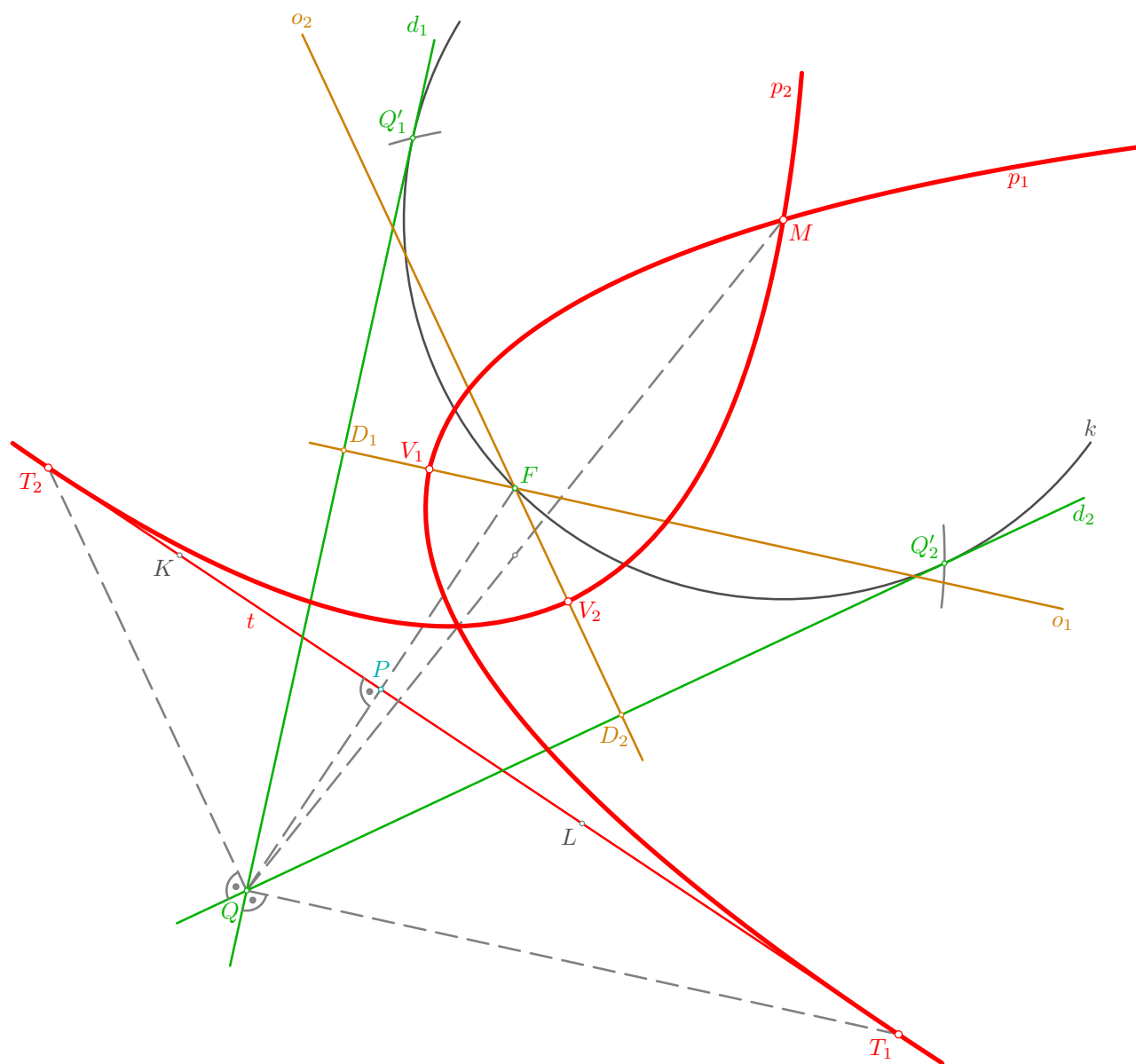
- podle **Věty 2** (na straně 236) o parabole musí řídicí přímka d hledané paraboly procházet bodem Q ; současně musí pro bod M podle definice paraboly platit $|FM| = |Md|$ a řídicí přímka d musí tedy být tečnou pomocné kružnice $k(M, |FM|)$; z bodu Q lze takové tečny ke kružnici k vést dvě, označme je d_1 a d_2 , příslušné body dotyku označme Q'_1 a Q'_2 (sestrojíme je pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem QM); úloha bude tedy při tomto zadání mít dvě řešení – paraboly p_1, p_2 dané společným ohniskem F a řídicími přímkami d_1, d_2



- ohniskem F vedeme osu $o_1 \perp d_1$ paraboly p_1 a označme její patu $D_1 = o_1 \cap d_1$; rovnoběžka s osou o_1 vedená bodem Q protíná tečnu t v bodě T_1 , který je bodem dotyku hledané paraboly p_1 s danou tečnou $t = KL$; přímka $QT_1 \perp d_1$ je vlastně jedním z průvodičů bodu T_1 ; analogicky pro parabolu p_2 : pro její osu o_2 je $o_2 \perp d_2$, $F \in o_2$ a bod T_2 dotyku s tečnou t leží na průvodiči vedeném bodem Q kolmo k řídicí přímce d_2 (tj. rovnoběžně s osou o_2)



- na závěr sestrojme vrcholy V_1, V_2 parabol p_1, p_2 jako středy úseček FD_1, FD_2 a vytáhněme paraboly p_1, p_2 , které mají společné ohnisko dané v bodě F , procházejí daným bodem M a dotýkají se dané přímky $t = KL$; pro zajímavost si může zvědavý čtenář doplnit vrcholové tečny obou řešení, které by se měly protnout v sestrojeném bodě P ...



□

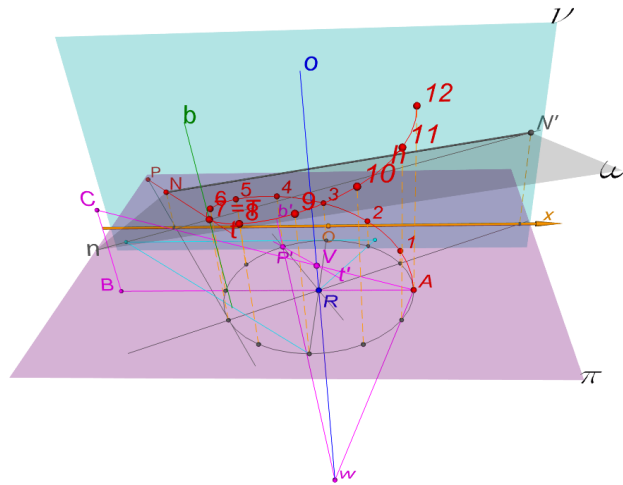
2. Šroubovice

Výklad



- šroubovice patří mezi významné technické křivky (prostorové)
- jeden její závit můžeme jednoduše vymodelovat srolováním pravoúhlého trojúhelníka do válce, jehož osa je rovnoběžná s jednou z odvěsen
- osa o , poloměr r a výška v takového válce je současně **osou**, **poloměrem** a tzv. **výškou závitů** sestrojené šroubovice, kterou vytváří stočená přepona použitého tzv. **charakteristického** trojúhelníka
- přitom lze stočení provést na dvě různé strany a vytvořit tak **pravotočivou** nebo **levotočivou** šroubovici
- pravotočivá se pozná například takto: jestliže na ni nasedneme, budeme mít při jízdě shora dolů osu po pravé ruce; je zajímavé, že toto pravidlo platí bez ohledu na to, který směr osy prohlásíme za směr shora dolů
- v zadání a při konstrukcích ještě narazíme na jeden pojem – tzv. **redukovanou výšku** v_0 **závitů**, pro niž platí: $v_0 = \frac{v}{2\pi}$
- v libovolném bodě šroubovice lze sestrojít tzv. **doprovodný trojhran**, který tvoří trojice po dvou navzájem kolmých přímk – **tečna**, **hlavní normála** a **binormála**
- tečna a hlavní normála určují tzv. **oskulační rovinu**, **normálová rovina** je určena hlavní normálou a binormálou, a konečně tečna spolu s binormálou určují tzv. **rektifikační rovinu** v daném bodě šroubovice
- tečnu můžeme získat zpětným rozvinutím smotaného trojúhelníka v konkrétním bodě, tj. její odchylka (a tím také spád) od libovolné roviny kolmé k ose je konstantní – proto také patří šroubovice mezi **křivky konstantního spádu**; hlavní normála je současně normálou válce, na který je šroubovice navinuta, tzn. že protíná osu šroubovice; a konečně binormála v každém bodě je kolmá k příslušné oskulační rovině

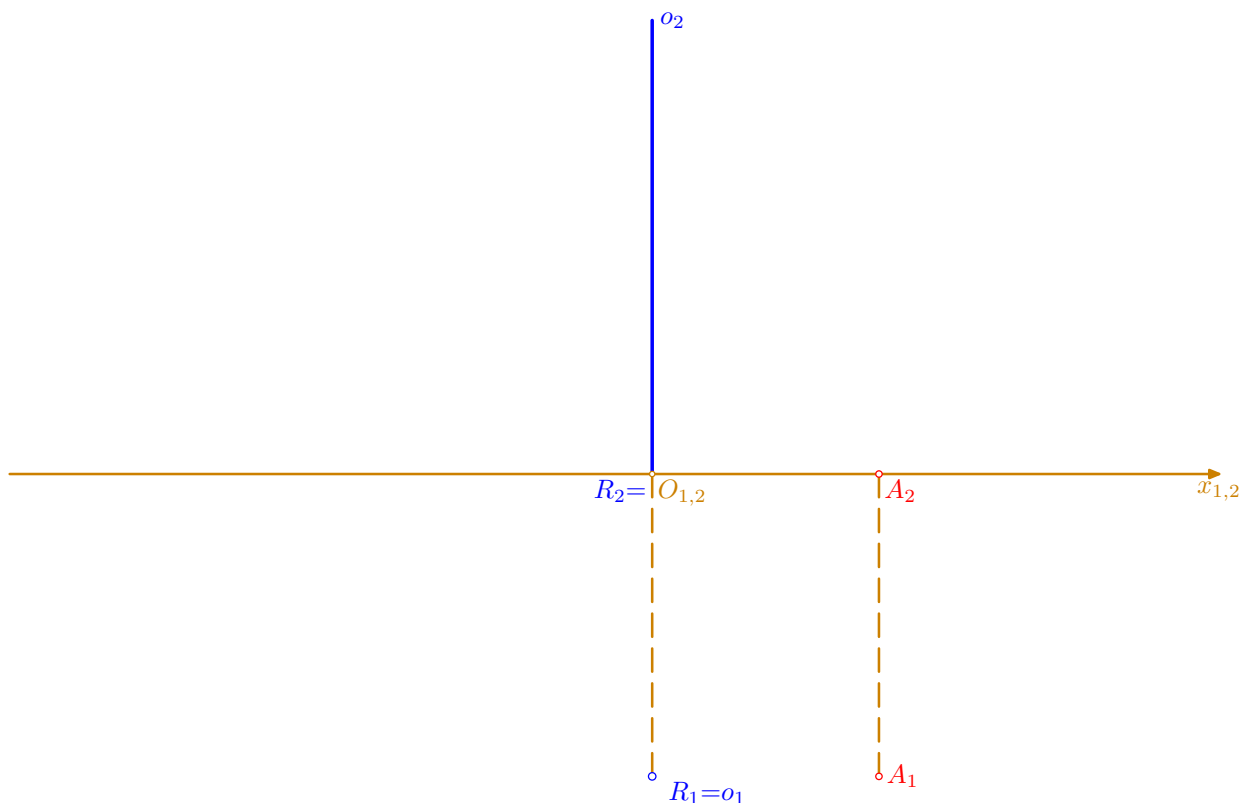
2.1. Šroubovice v Mongeově promítání



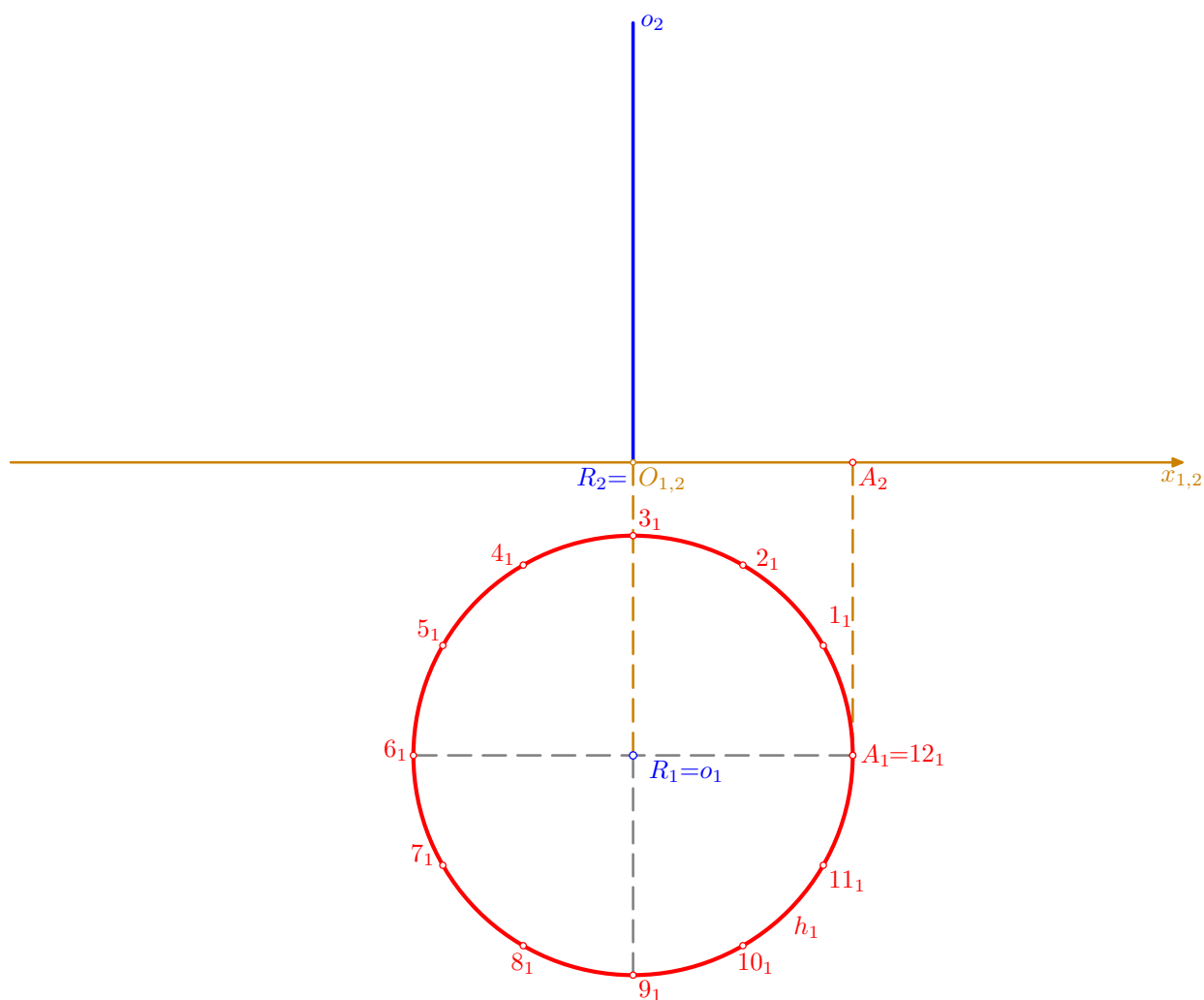
Řešené úlohy

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte jeden závit pravotočivé šroubovice h , která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, výšku v závitů a prochází bodem $A \in h$; v bodě T šroubovice doplňte doprovodný trojhran; $R[0; 4; 0]$, $v = 6$, $A[3; 4; 0]$, $T[?; ?; 3,5]$.

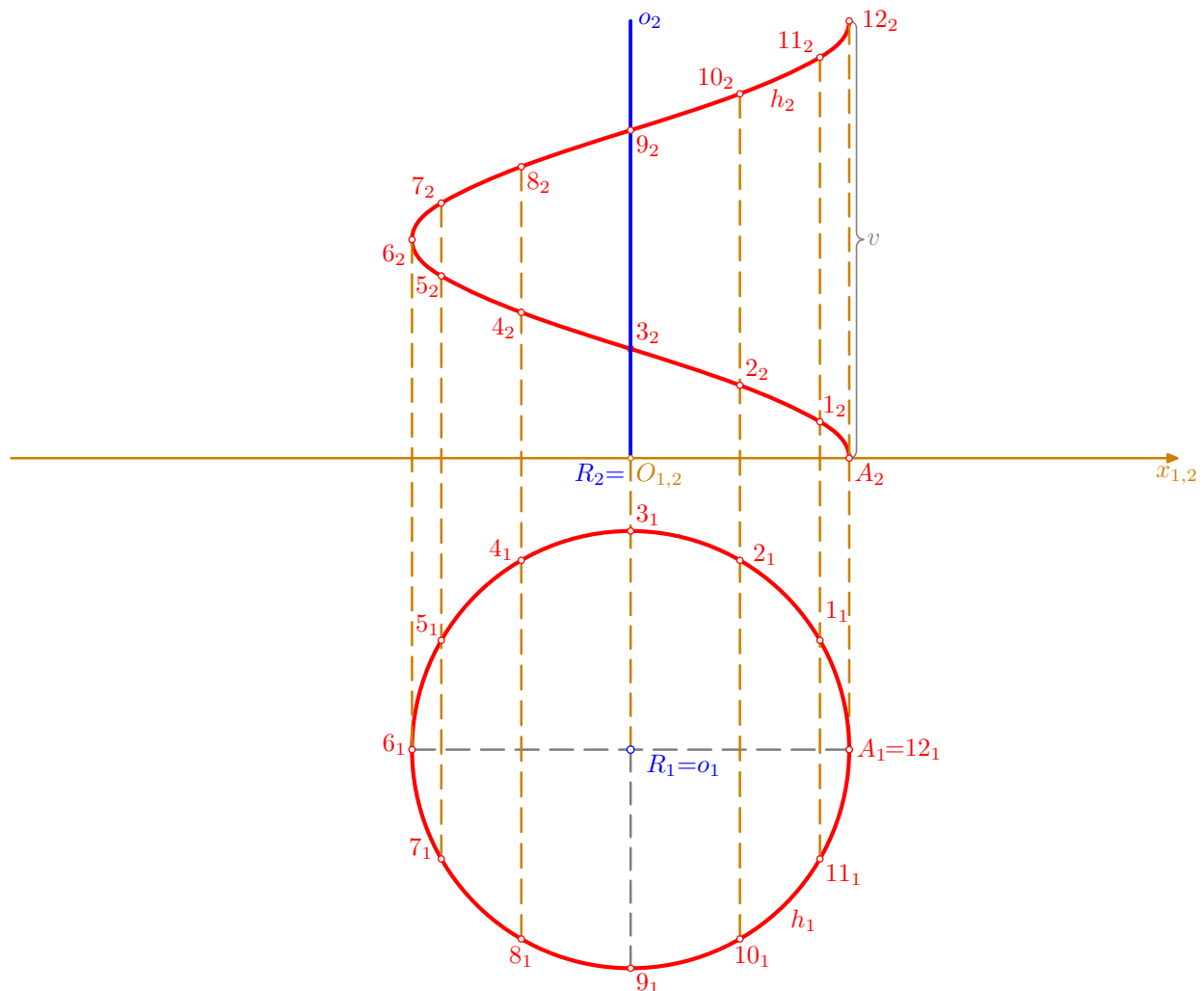
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1, A_2 a R_1, R_2 (kde $R_2 = O_{1,2}$) bodů A, R ; půdorysem osy $o \perp \pi$, $R \in o$, je bod $o_1 = R_1$, pro její narys o_2 platí $o_2 \perp x_{1,2}$ a $R_2 \in o_2$



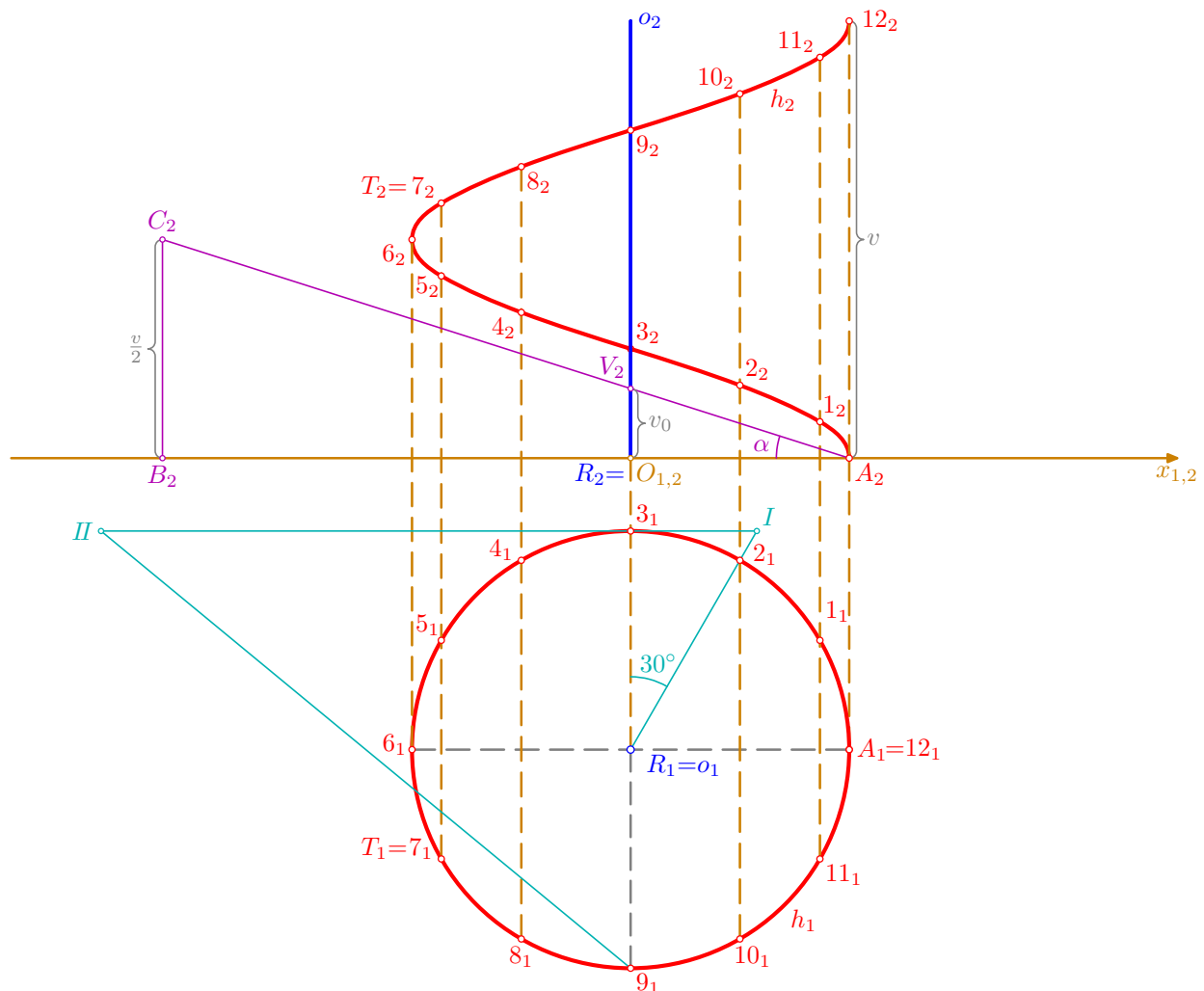
- půdorysem konstruované šroubovice h je kružnice $h_1(R_1, r = |R_1A_1| = 3)$; abychom mohli v dalším kroku sestrojit nárys h_2 , rozdělme kružnici h_1 od bodu A_1 na 12 stejných dílů, tj. po 30° , a jednotlivé dělicí body očísľujme $1_1, 2_1, \dots, 12_1$ (kde $12_1 = A_1$) v kladném smyslu, neboť podle zadání má být šroubovice h pravotočivá, a bude tedy stoupat proti směru hodinových ručiček; dělení provedeme nejlépe takto: nejprve sestrojíme kolmé průměry A_16_1 a 3_19_1 a poté postupně zapícheme kružítko do bodů $A_1, 3_1, 6_1, 9_1$ a kružnici h_1 protneme jejím poloměrem $r = |R_1A_1|$ vždy v dalších dvou dělicích bodech; tím sestrojíme všech dvanáct dělicích bodů



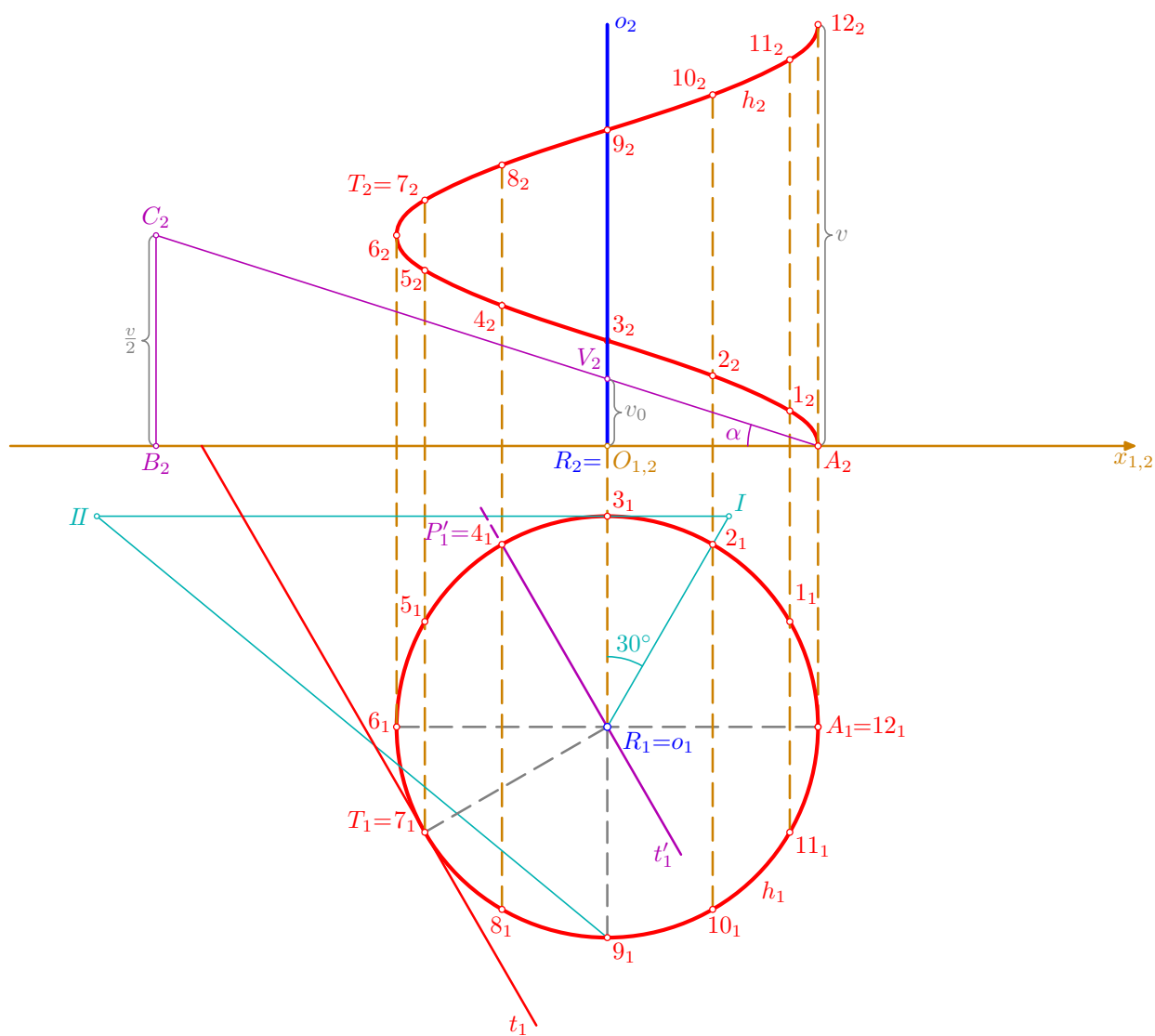
- bod 12 leží ve výšce $v = 6$ závitů nad bodem A a jeho nárys 12_2 sestrojíme na příslušné ordinále tak, aby bylo $|A_2 12_2| = v$; podobně doplníme nárysy dalších dělicích bodů šroubovice – na příslušných ordinálách a v příslušné dvanáctině výšky v závitů; zde je vidět smysl užitého číslování: bod 1 leží ve výšce $\frac{1v}{12} = 0,5$ nad půdorysnou π , bod 2 ve výšce $\frac{2v}{12} = 1$, atd., tytéž délky nanášíme v náryse od osy $x_{1,2}$; na závěr tohoto kroku spojíme sestrojené nárysy spojitou křivkou h_2 (jde o jednu periodu zobecněné sinusoidy); přitom můžeme v náryse alespoň naznačit viditelnost šroubovice h vzhledem k ose o : z půdorysu je vidět, že bod 3 leží vzadu za osou o a jeho nárys 3_2 proto není zvýrazněn, naopak pro bod 9 a jeho nárys 9_2 ...



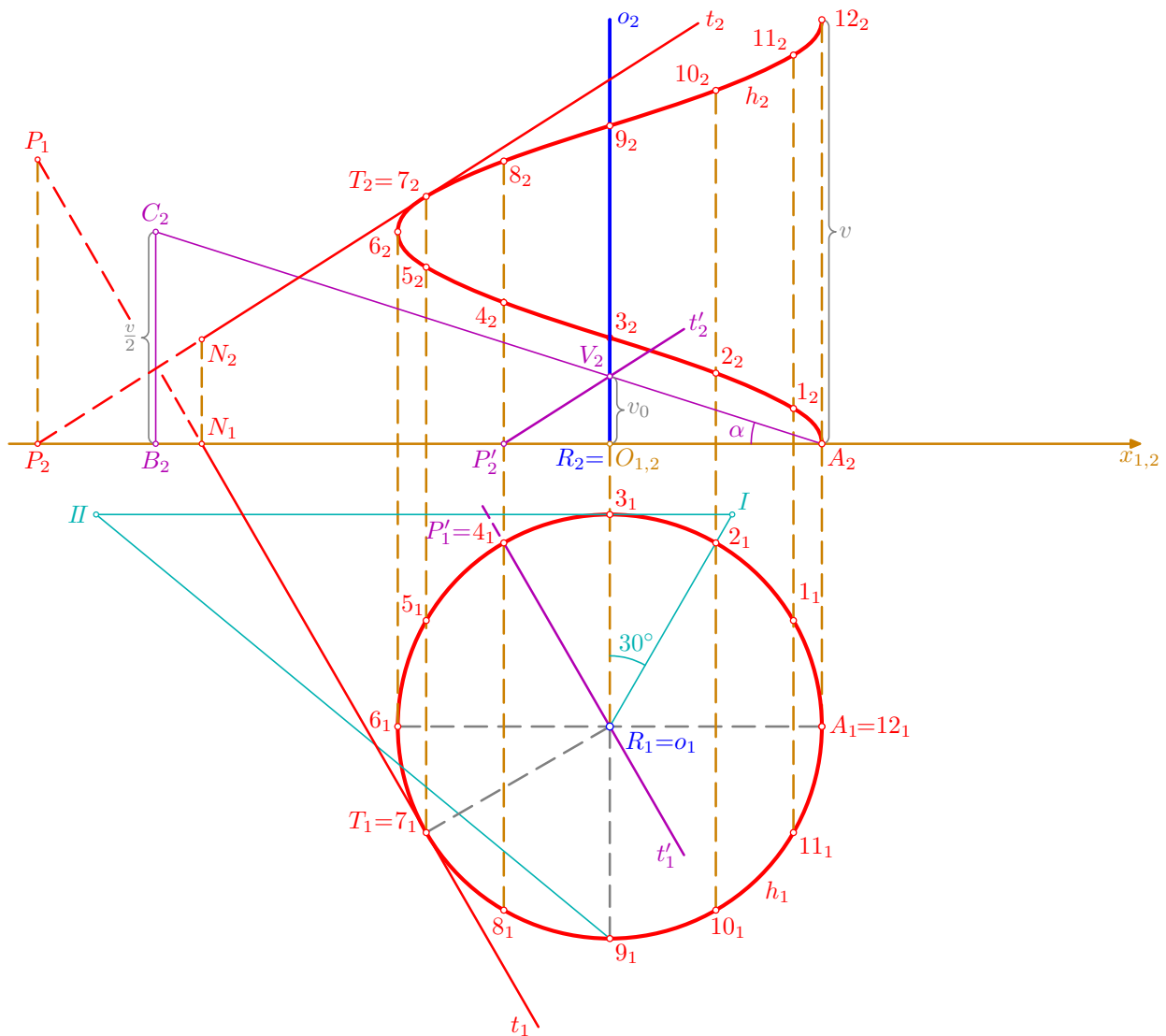
- v rovině určené osou o a bodem A sestrojme charakteristický trojúhelník ABC šroubovice h , který se v náryse zobrazí ve skutečné velikosti; na ose $x_{1,2}$ nanesme od bodu A_2 směrem doleva zjištěnou délku $|II9_1| \doteq \pi r$, koncový bod označme B_2 a od něj svisle nahoru sestrojme úsečku B_2C_2 délky $|B_2C_2| = \frac{v}{2} = 3$; tím získáme nárys $A_2B_2C_2$ zmíněného charakteristického trojúhelníka, jehož přepona AC (nebo její nárys A_2C_2) představuje polovinu závitu rozvinuté šroubovice h a sklon α této přepony je tedy také sklonem sestrojené šroubovice; dále jsme získali nárys $V_2 = o_2 \cap A_2C_2$ vrcholu V příslušné kuželové plochy tečen, který leží v tzv. redukované výšce $v_0 = |V_2R_2|$ závitu nad půdorysnou π



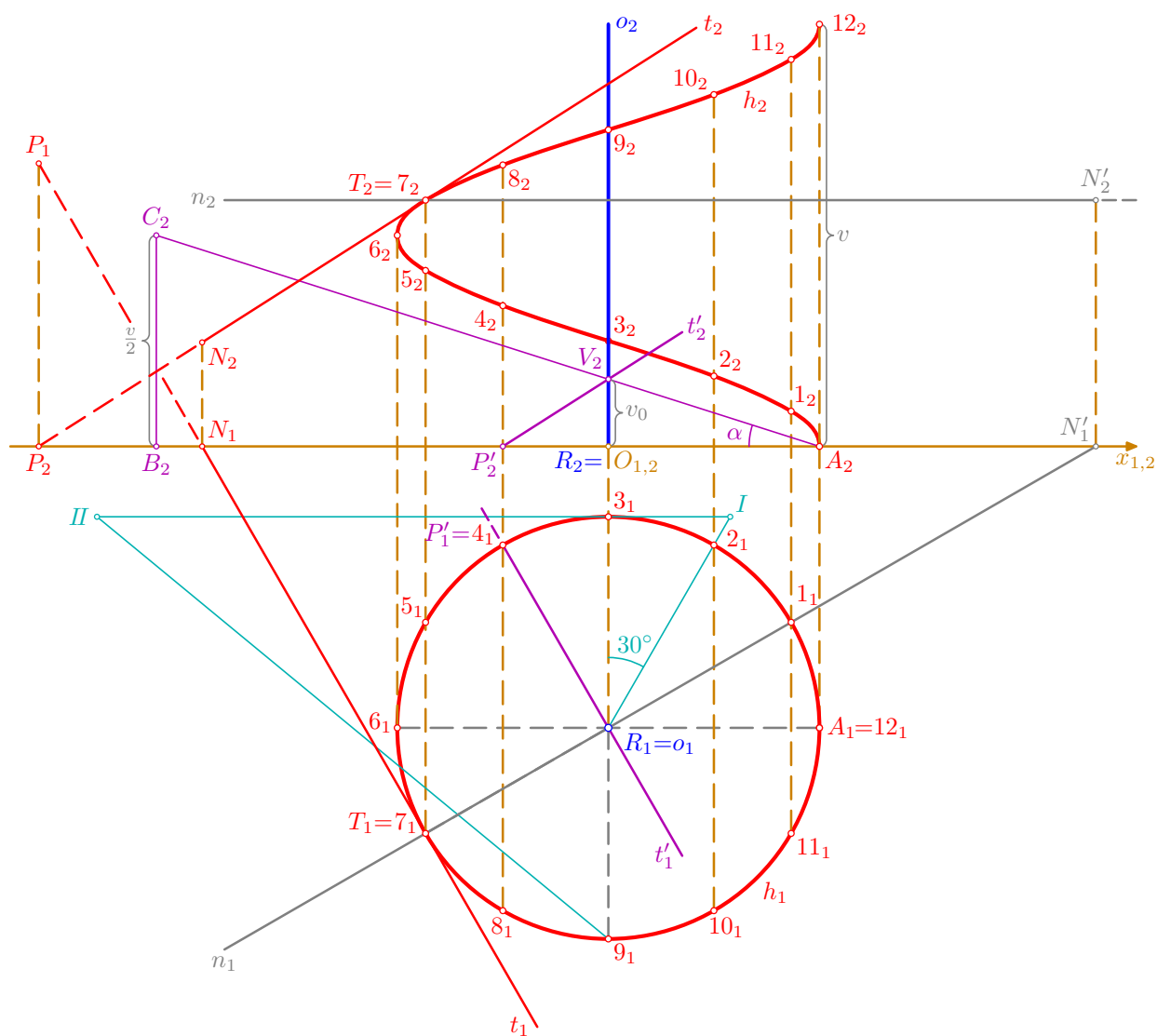
- nyní již můžeme přistoupit ke konstrukci tečny t v bodě T šroubovice h ; půdorys t_1 je tečna ke kružnici h_1 v bodě T_1 , tj. platí $T_1 \in t_1$ a $t_1 \perp T_1R_1$ nebo také $t_1 \parallel R_1A_1$; právě zmíněnou přímkou R_1A_1 označme t'_1 a považujme ji za půdorys přímky t' , která je rovnoběžná s hledanou tečnou t a leží na kuželové ploše tečen šroubovice h , tj. platí $t' \parallel t$ a $V \in t'$; půdorysný stopník P' přímky t' pak musí ležet na kružnici h_1 , dostaneme jej otočením bodu T_1 o 90° proti směru stoupání šroubovice h , tj. po směru hodinových ručiček, nebo si celou situaci dokážeme představit v prostoru, a pak přímo vidíme, že v půdoryse platí $P'_1 = A_1$



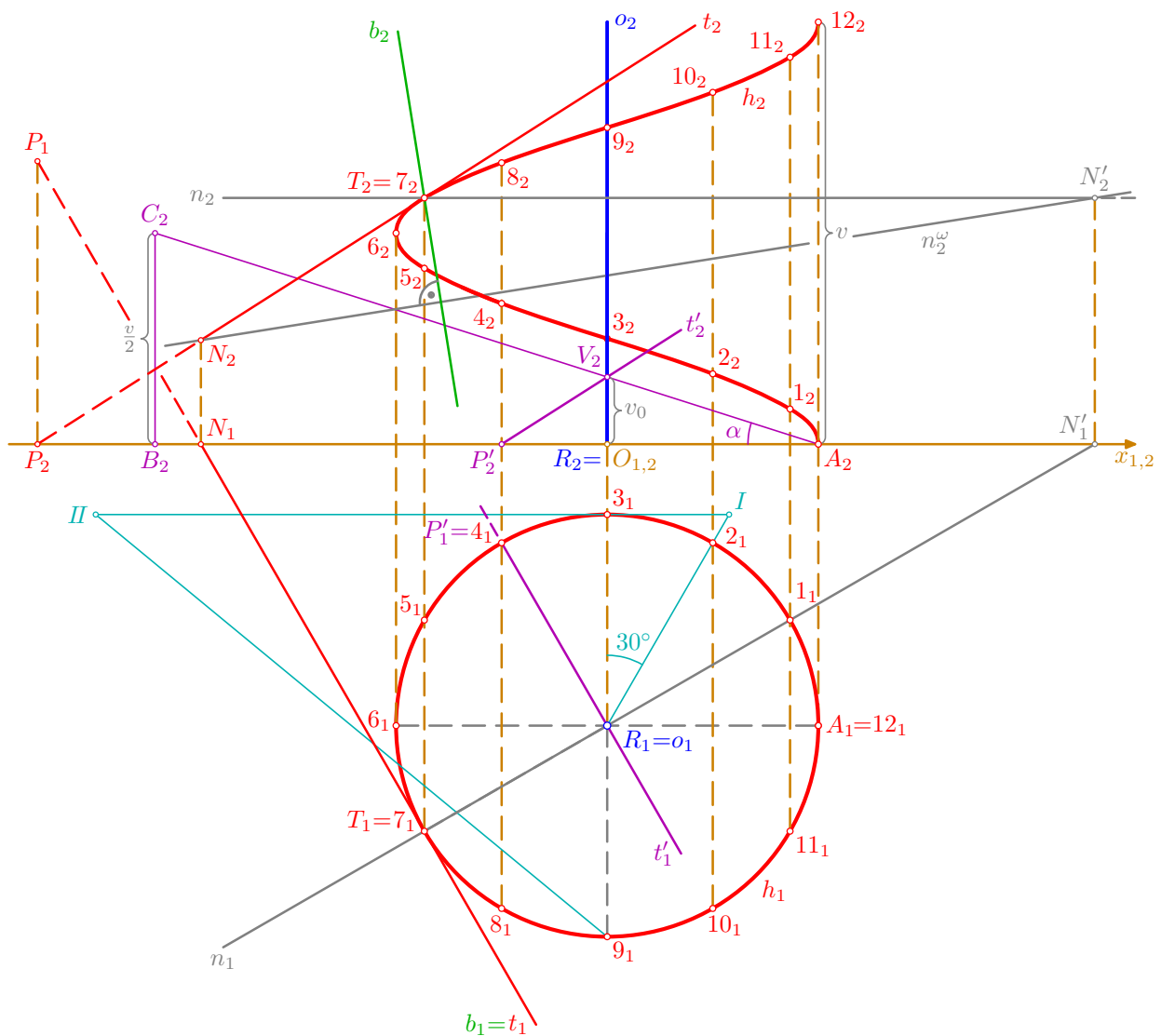
- nárys P'_2 bodu P' doplníme na ordinále a na ose $x_{1,2}$; nyní můžeme sestrojít nárys $t'_2 = P'_2V_2$ přímky t' a následně také nárys t_2 hledané tečny t , pro který je $t_2 \parallel t'_2, T_2 \in t_2$, a který se v bodě T_2 dotýká sestrojené křivky h_2 ; pro lepší představu jsou doplněny také sdružené průměty obou stopníků přímky t : půdorys N_1 nárysného stopníku N leží na t_1 a na ose $x_{1,2}$, nárys N_2 najdeme na ordinále a na přímce t_2 ; podobně je $P_2 = t_2 \cap x_{1,2}$ a půdorys P_1 leží na ordinále a na přímce t_1



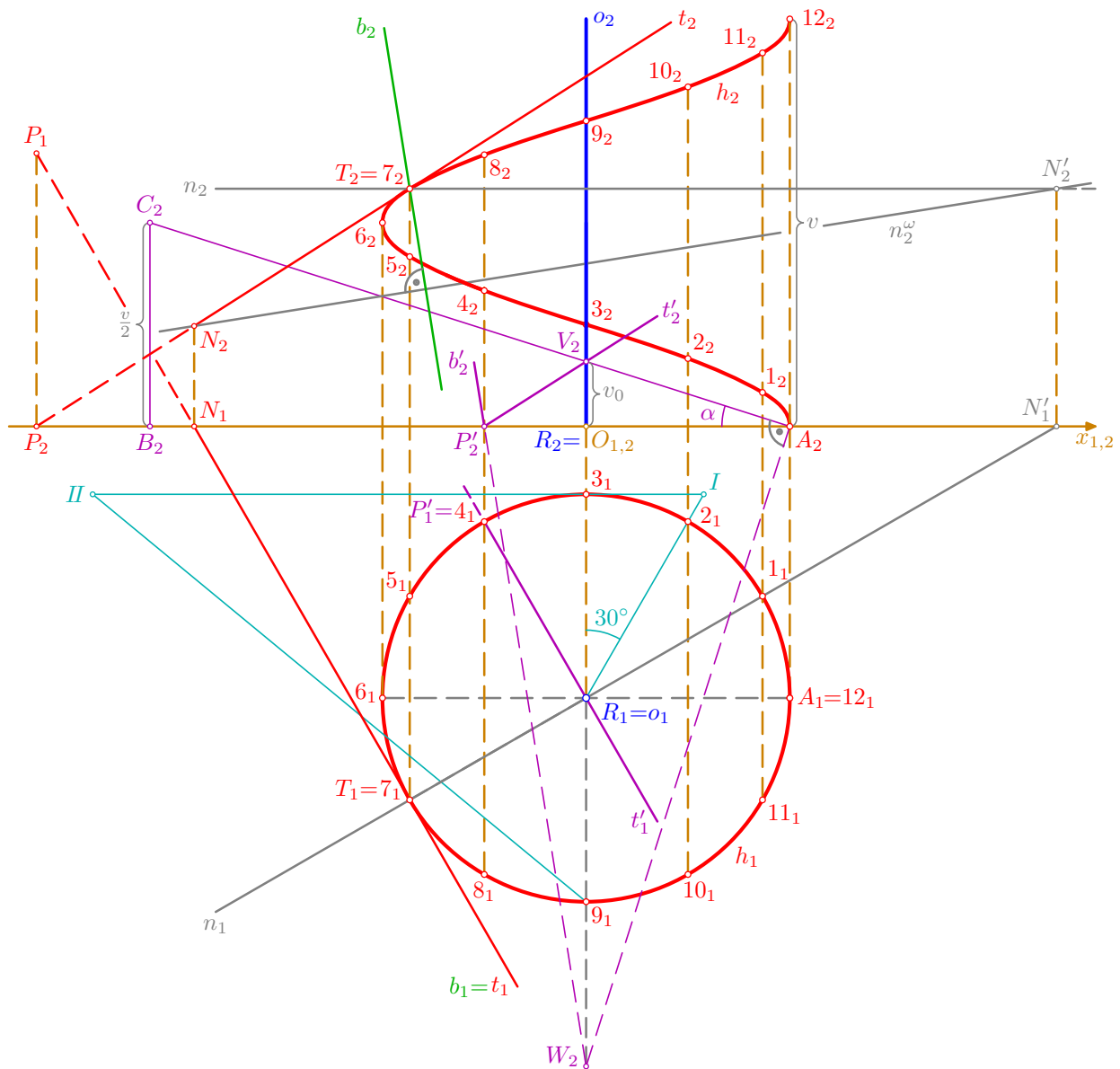
- hlavní normála n šroubovice h v bodě T je současně normálou válcové plochy, na níž je šroubovice navinuta; pro její půdorys je tedy $n_1 = T_1R_1$ a pro nárys platí $n_2 \parallel x_{1,2}$, $T_2 \in n_2$; podobně jako v předchozím kroku, doplníme i pro hlavní normálu n její nárysný stopník N' (je $n \parallel \pi$ a půdorysný stopník tedy přímka n nemá): v půdoryse je $N'_1 = n_1 \cap x_{1,2}$ a nárys N'_2 leží na příslušné ordinále a na přímce n_2



- binormála b šroubovice h v bodě T určuje spolu s tečnou t tzv. rektifikační rovinu $\rho = tb$, která je současně tečnou rovinou válcové plochy, na níž je šroubovice navinuta, podél přímky TT_1 ; z toho vyplývá, že půdorysy b_1, t_1 přímek b, t splývají, $b_1 = t_1$; nárys b_2 můžeme sestavit dvojím způsobem: binormála b je kolmá k tzv. oskulační rovině $\omega = tn$ šroubovice h v bodě T , a pro její nárys b_2 tudíž platí $b_2 \perp n_2^\omega, T_2 \in b_2$, kde $n_2^\omega = N_2N'_2$ je nárysnou stopou roviny ω (zde je tedy vidět pravý důvod užitečnosti konstrukce nárysných stopníků N, N' přímek t, n); druhý způsob konstrukce nárysu b_2 binormály b objasníme v následujícím kroku



- binormála b je rovnoběžná s přímkou $b' = P'W$, kde bod W je vrchol kuželové plochy binormál šroubovice h , pro který platí $W \in o$ a $WA \perp AC$; to vše se zachová v naryse, kde je tedy $W_2 \in o_2$ a $W_2A_2 \perp A_2C_2$, dále $b'_2 = P'_2W_2$ a konečně $b_2 \parallel b'_2, T_2 \in b_2$; tím je v bodě T šroubovice h sestrojen kompletní doprovodný trojhran, tvořený tečnou t , hlavní normálou n a binormálou b



□

3. Úlohy k samostatnému řešení

Kuželosečky

1. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečna $t = TK$ s bodem dotyku T a délka a hlavní poloosy.

$$F_1[0; 0], T[-3; 2], K[3; -1], a = 4$$

2. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečny $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$ a délka a hlavní poloosy.

$$F_1[-4; 0], K_1[4; 2], L_1[-1; -4], K_2[-5; 2], L_2[5; -4], a = 4$$

3. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečny $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$ a excentricita e .

$$F_1[0; 0], K_1[6; 2], L_1[3; -4], K_2[-1; 6], L_2[8; -2], e = 3$$

4. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 a tečny $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2, t_3 = K_3L_3$.

$$a) F_1[0; 2], K_1[8; 2], L_1[3; -4], K_2[-1; 6], L_2[9; -4], K_3[-4; -7], L_3[-5; 8]$$

$$b) F_1[0; 2], K_1[5; 2], L_1[3; -4], K_2[-2; 5], L_2[9; -4], K_3[-4; -7], L_3[5; 8]$$

5. Sestrojte kuželosečku, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečna $t_1 = T_1R$ s bodem dotyku T_1 a tečna $t_2 = KL$.

$$a) F_1[0; 0], T_1[4; 5], R[1; -4], K[-8; -3], L[-4; 2]$$

$$b) F_1[0; 0], T_1[4; 5], R[1; -4], K[-3; 2], L[9; -3]$$

6. Sestrojte hyperbolu, je-li dáno její ohnisko F_1 , tečna $t = KL$ a asymptota $u = XY$.

$$F_1[2; 0], K[-5; -2], L[3; 7], X[2; -8], Y[-4; 8]$$

7. Sestrojte kuželosečku, je-li dán její střed S , tečna $t = KL$, délka a hlavní poloosy a excentricita e .

$$a) S[0; 0], K[8; 2], L[3; -4], a = 6, e = 5$$

$$b) S[0; 0], K[8; 2], L[3; -4], a = 6, e = 7$$

8. Sestrojte kuželosečku, je-li dán její střed S , tečny $t_1 = K_1L_1, t_2 = K_2L_2$ a délka a hlavní poloosy.

$$a) S[0; 0], K_1[7; 0], L_1[-2; -7], K_2[-2; 7], L_2[8; -2], a = 5$$

$$b) S[0; 0], K_1[4; 1], L_1[-3; -3], K_2[-5; 6], L_2[5; -3], a = 3$$

9. Sestrojte parabolu, která má řídicí přímku $d = KL$, parametr p a prochází bodem M .

$$M[0; 0], p = 3, K[-6; -4], L[-5; 4]$$

10. Sestrojte parabolu, která má ohnisko F a prochází body M_1, M_2 .

$$F[0; 0], M_1[4; -3], M_2[1; 3]$$

Šroubovice

1. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit levotočivé šroubovice, která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, výšku v závitu a prochází bodem A . V bodě T doplňte oskulační rovinu.

$$A[-4; 5; 0], R[0; 5; 0], v = 12, T[?; ?; 7]$$

2. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit pravotočivé šroubovice, která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, redukovanou výšku v_0 závitu a prochází bodem A . V bodě A doplňte tečnu.

$$A[3; 7; 4], R[0; 6; 0], v_0 = 1,6$$

3. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit levotočivé šroubovice, která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, sklon α a prochází bodem A .

$$A[2; 6; 0], R[0; 4; 0], \alpha = 30^\circ$$

4. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, je-li dána její osa $o \perp \pi$, $R \in o$, a tečna $t = PN$. V bodě dotyku doplňte oskulační rovinu.

$$R[0; 5; 0], P[2; 10; 0], N[7; 0; 4]$$

5. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, a oskulační rovinu ω v bodě T . V bodě T doplňte binormálu.

$$R[0; 4; 0], \omega(8; 9; 4), T[2; ?; ?]$$

6. V Mongeově promítání sestrojte jeden závit šroubovice, která má osu $o \perp \pi$, $R \in o$, redukovanou výšku v_0 závitu a oskulačnickou rovinu ω .

$$R[-4; 4; 0], \omega(8; 9; 4), v_0 = 1,5$$

Plochy

Tematický obsah

- Šroubové plochy
 - Schodová plocha v Mongeově promítání
 - Vývrtková plocha v Mongeově promítání
 - Rozvinutelná šroubová plocha v Mongeově promítání
- Rotační plochy
 - Anuloid v Mongeově promítání
 - Rotační kvadriky
 - * Rotační paraboloid v kolmém promítání na nárysnu, Rotační jednodílný (zborcený) hyperboloid v Mongeově promítání
- Průniky ploch a těles
 - Rovinné řezy ploch a těles
 - * Řez kosého čtyřbokého hranolu, Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu, Řez rotačního válce (vše v pravoúhlé axonometrii)
 - * Řez zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání
 - Průnik přímky s plochou či tělesem
 - * Průnik přímky s kosým kruhovým kuzelem, Průnik přímky s kosým kruhovým válcem (vše v pravoúhlé axonometrii)
 - Průniky rotačních ploch
 - * Průnik vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta s rovnoběžnými osami – metoda rovnoběžných rovin)
 - * Průnik vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta s různoběžnými osami – metoda soustředných kulových ploch)
- Úlohy k samostatnému řešení

1. Šroubové plochy



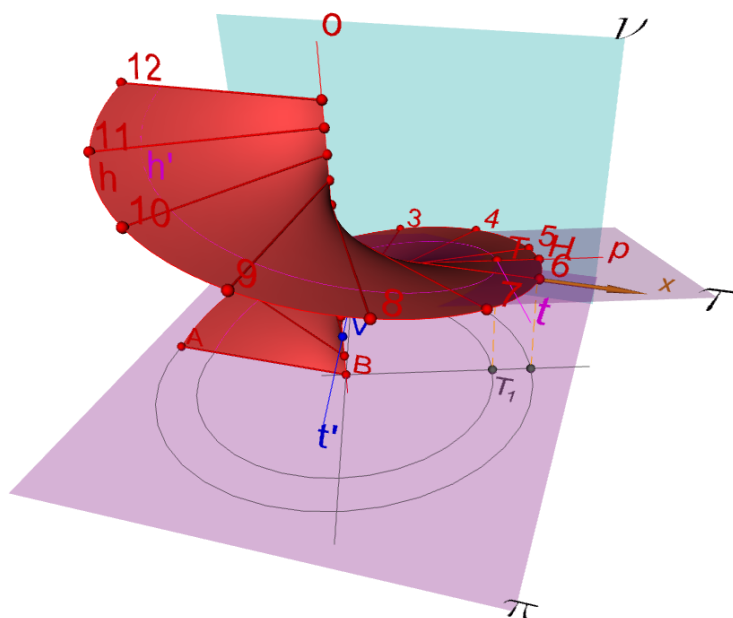
Výklad

- **šroubová plocha** vznikne **šroubovým pohybem** nějaké tzv. tvořící **křivky** (rovinné nebo prostorové)
- **šroubovým pohybem** rozumíme složení rotace kolem pevné osy o a posunu ve směru této osy, přičemž oba pohyby jsou na sobě přímo úměrně (jinak řečeno lineárně) závislé; tj. např. dvojnásobnému otočení odpovídá dvojnásobné posunutí apod.
- šroubovým pohybem **bodů** vznikne **šroubovice**
- pro zadání šroubového pohybu budeme obvykle potřebovat tyto tři údaje: osu o šroubového pohybu, jeho orientaci (pravotočivou nebo levotočivou) a výšku v jednoho závitu, případně alternativně redukovanou výšku v_0 závitu
- šroubováním libovolného bodu dané tvořící křivky vzniká tzv. **rovnoběžková šroubovice** příslušné šroubové plochy
- tečná rovina v obecném bodě M šroubové plochy je určena podle obecného principu tečnami ke dvěma křivkám, které leží na dané ploše a procházejí daným bodem M ; u šroubové plochy je jednou z těchto křivek obvykle daná tvořící křivka vyšroubovaná tak, aby procházela bodem M , a druhou je příslušná rovnoběžková šroubovice jdoucí bodem M
- rovina kolmá k ose šroubového pohybu protíná danou šroubovou plochu v tzv. **normálovém řezu**
- protíná-li šroubovaná křivka osu šroubového pohybu, pak se vzniklá plocha nazývá **uzavřená**, v opačném případě je **otevřená**
- v praxi se nejčastěji vyskytují **přímkové** šroubové plochy, které vznikají šroubováním přímky nebo její části, a **cyklické** šroubové plochy, u nichž je šroubovanou křivkou kružnice nebo její část

1.1. Schodová plocha v Mongeově promítání

Výklad

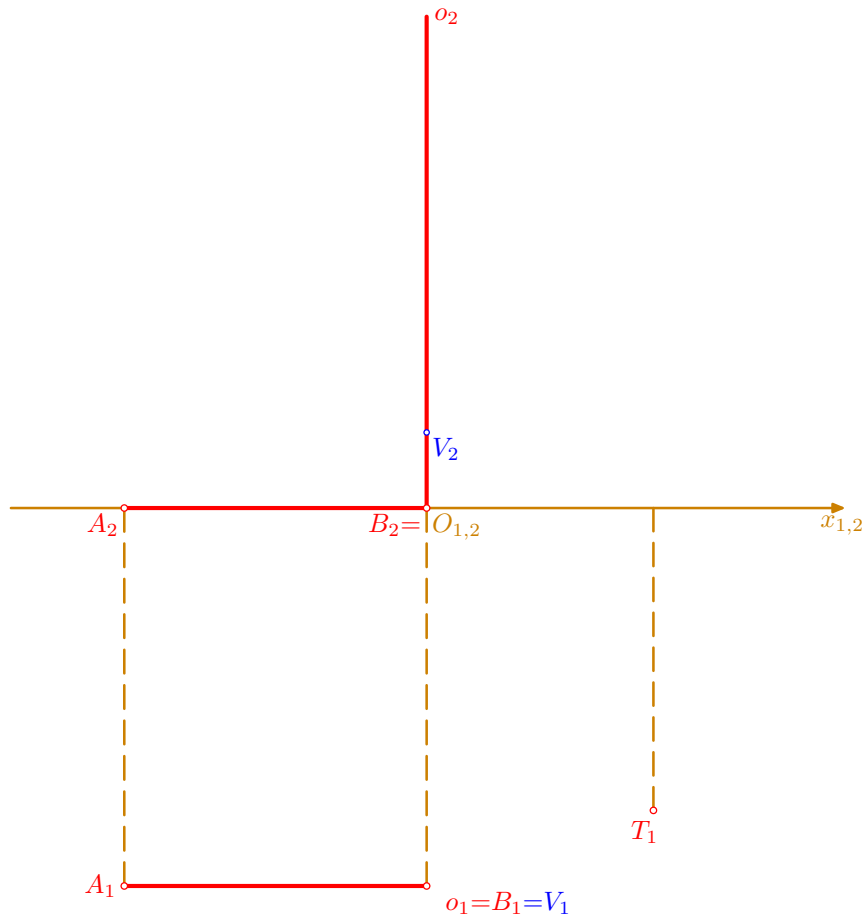
- schodová plocha vznikne šroubováním přímky (nebo její části), která je kolmá k ose šroubového pohybu a protíná ji, proto ji lze nazvat také **pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha**
- tato plocha patří také mezi tzv. zborčené plochy, a můžeme ji najít i pod názvem **přímý šroubový konoid** nebo zkráceně **helikoid**
- různé varianty schodové plochy nacházejí uplatnění především ve stavebnictví (spodní strana točitých schodišť), v architektuře i ve strojírní praxi (různé druhy šroubů apod.)



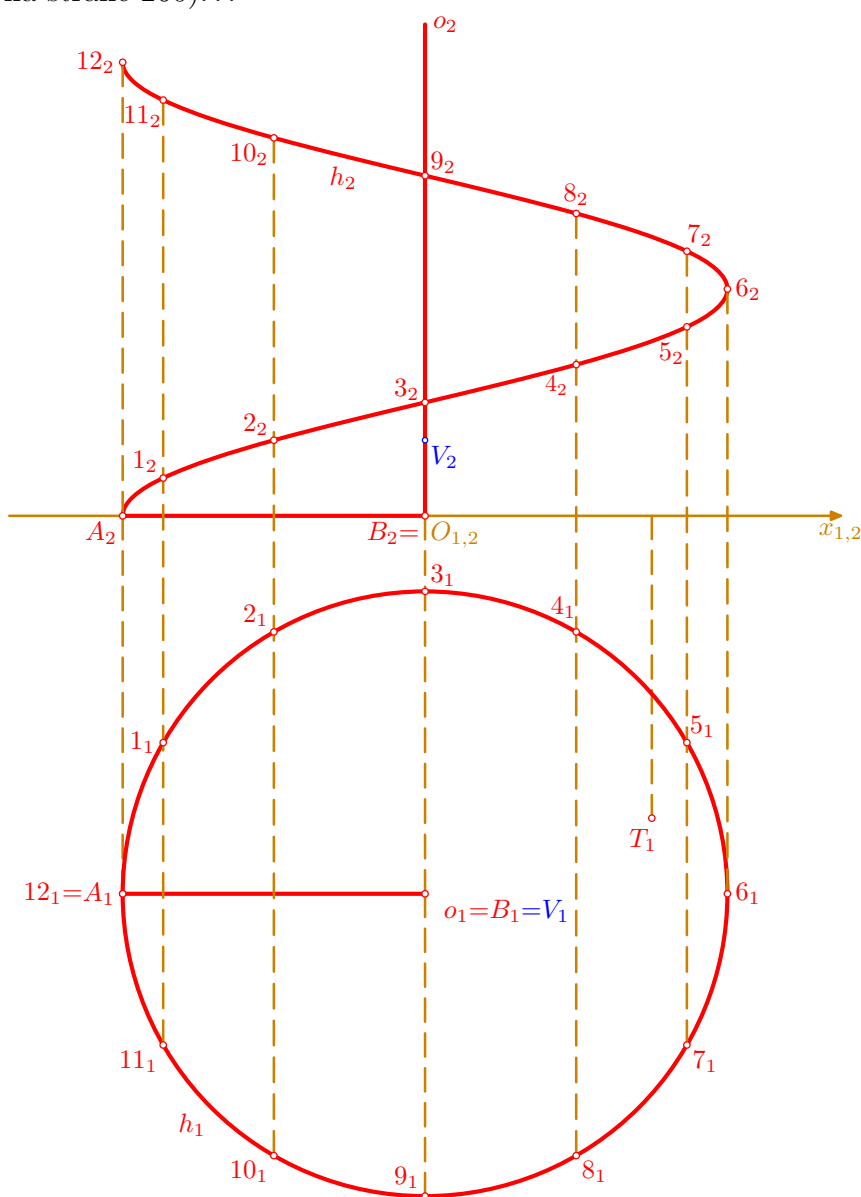
Řešené úlohy

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte jeden závit schodové plochy, která vznikne šroubováním úsečky AB ve šroubovém pohybu, jenž má osu $o \perp \pi$, $B \in o$, redukovanou výšku v_0 závitů a levotočivou orientaci; v bodě T plochy doplňte tečnou rovinu τ ; $A[-4; 5; 0]$, $B[0; 5; 0]$, $v_0 = 1$, $T[3; 4; ?]$.

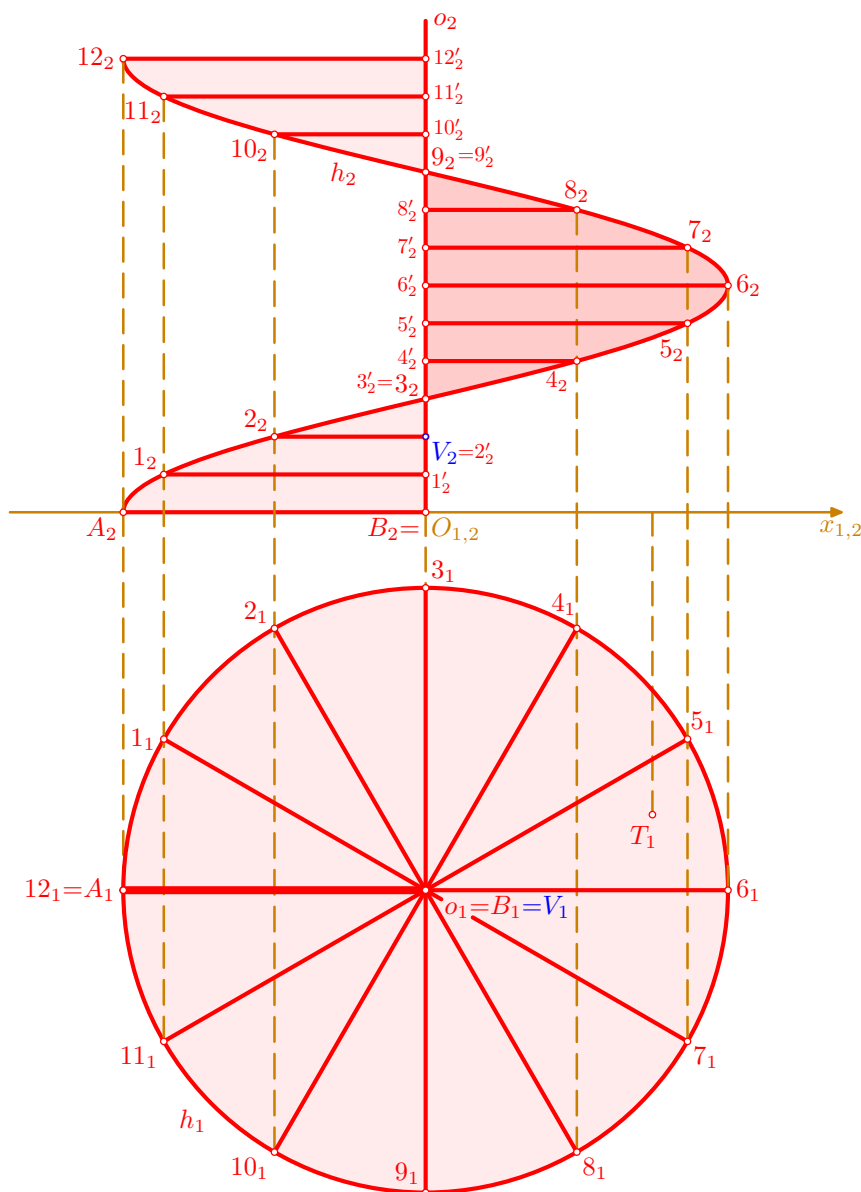
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1, A_2 a B_1, B_2 (kde $B_2 = O_{1,2}$) krajních bodů úsečky AB , vytáhněme silněji její půdorys A_1B_1 i nárys A_2B_2 ; půdorysem osy $o \perp \pi, B \in o$, je bod $o_1 = B_1$, pro její nárys o_2 platí $o_2 \perp x_{1,2}$ a $B_2 \in o_2$; dále doplníme sdružené průměty V_1, V_2 vrcholu $V \in o, |V\pi| = v_0$, kuželové plochy tečen daného šroubového pohybu, pro jehož půdorys platí $V_1 = B_1 = o_1$ a pro nárys je $V_2 \in o_2, |V_2x_{1,2}| = v_0 = 1$; nakonec k zadání patří ještě půdorys T_1 bodu T



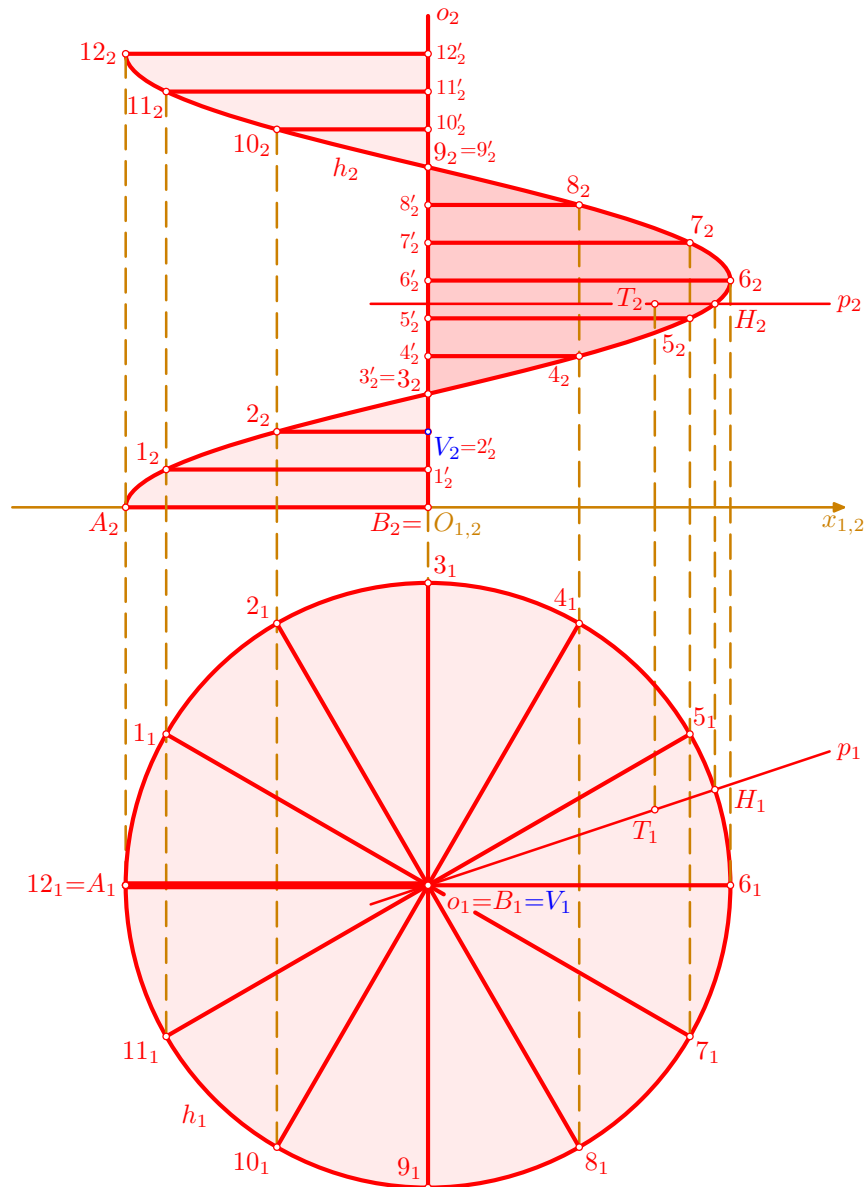
- nejprve sestrojme sdružené průměty h_1, h_2 levotočivé šroubovice h , která vznikne šroubováním bodu A v daném šroubovém pohybu; půdorysem této šroubovice h je kružnice $h_1(B_1, r = |B_1A_1|)$, nárys h_2 sestrojíme pomocí nárysů $1_2, 2_2, \dots, 12_2$ dělicích bodů $1, 2, \dots, 12$ šroubovice h ležících v příslušných dvanáctinách výšky v závitu; tuto výšku v určíme pouze přibližně ze vztahu $v = 2\pi v_0$ dosti hrubým zaokrouhlením $\pi \doteq 3$, a tedy $v \doteq 6v_0 = 6$; dopustíme se tím jistě nepřesnosti, což se ale na výsledku znatelně neprojeví; jinak bychom mohli výšku v závitu sestrojít z charakteristického trojúhelníka šroubovice h , analogicky, jako je to provedeno v příkladě **Šroubovice v Mongeově promítání** (viz na straně 260)...



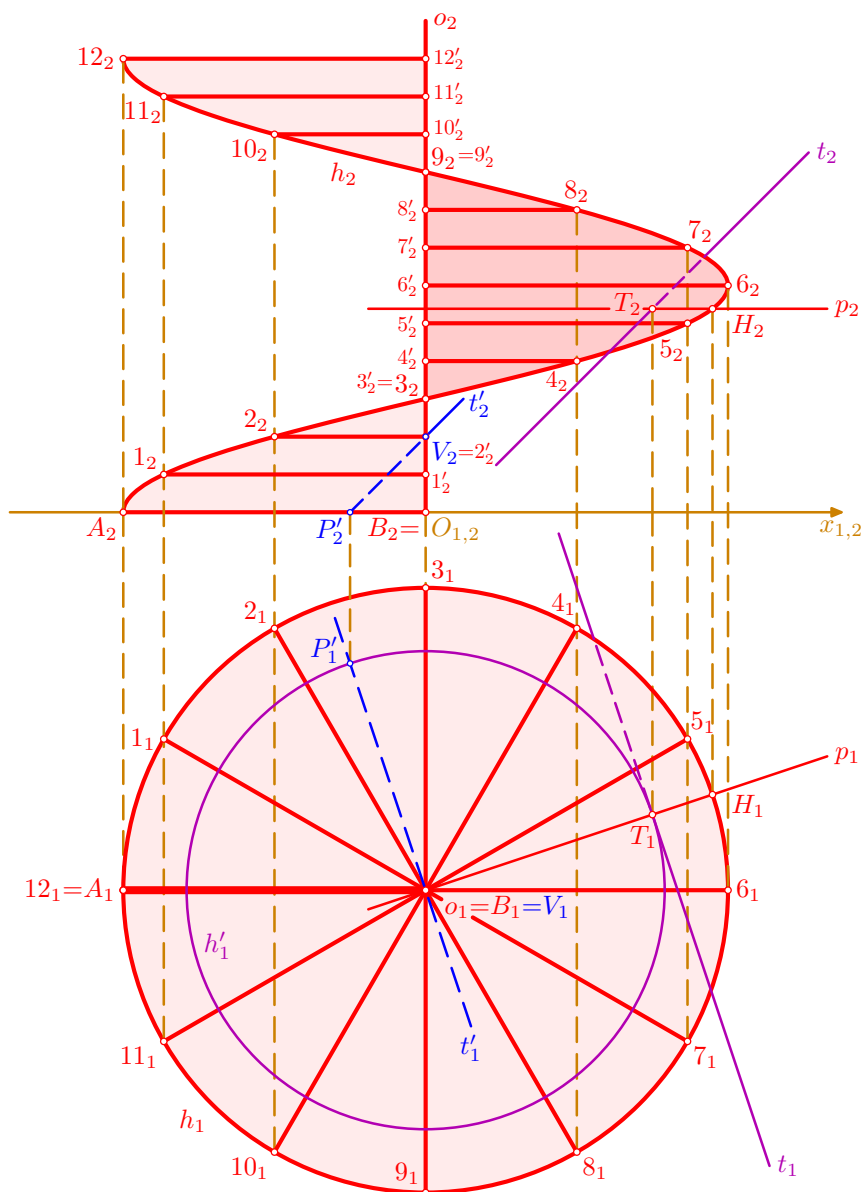
- protože bod B leží na ose o , redukuje se jeho šroubování pouze na posun ve svislém směru; sestrojme tedy na přímce o_2 nárysy $1'_2, 2'_2, \dots, 12'_2$ bodů $1', 2', \dots, 12' \in o$ (jejich půdorysy splývají s bodem o_1 a v obrázku nejsou popsány), které leží v odpovídajících výškách jako body $1, 2, \dots, 12$ šroubovice h ; tím dostáváme sdružené průměty dalších dvanácti poloh $11', 22', \dots, 12 12'$ vyšroubované dané úsečky AB ; v půdoryse jsou to jednotlivé poloměry kružnice h_1 , v náryse pak rovnoběžky s osou $x_{1,2}$, ovšem s výjimkou nárysů úseček $33', 99'$ – ty jsou kolmé k nárysně ν a zobrazí se jako body $3_2 = 3'_2, 9_2 = 9'_2$; světlejším odstínem výplně je naznačena viditelnost horní strany plochy, tmavší odstín vyplňuje tu část nárysu, kde je vidět spodní strana plochy



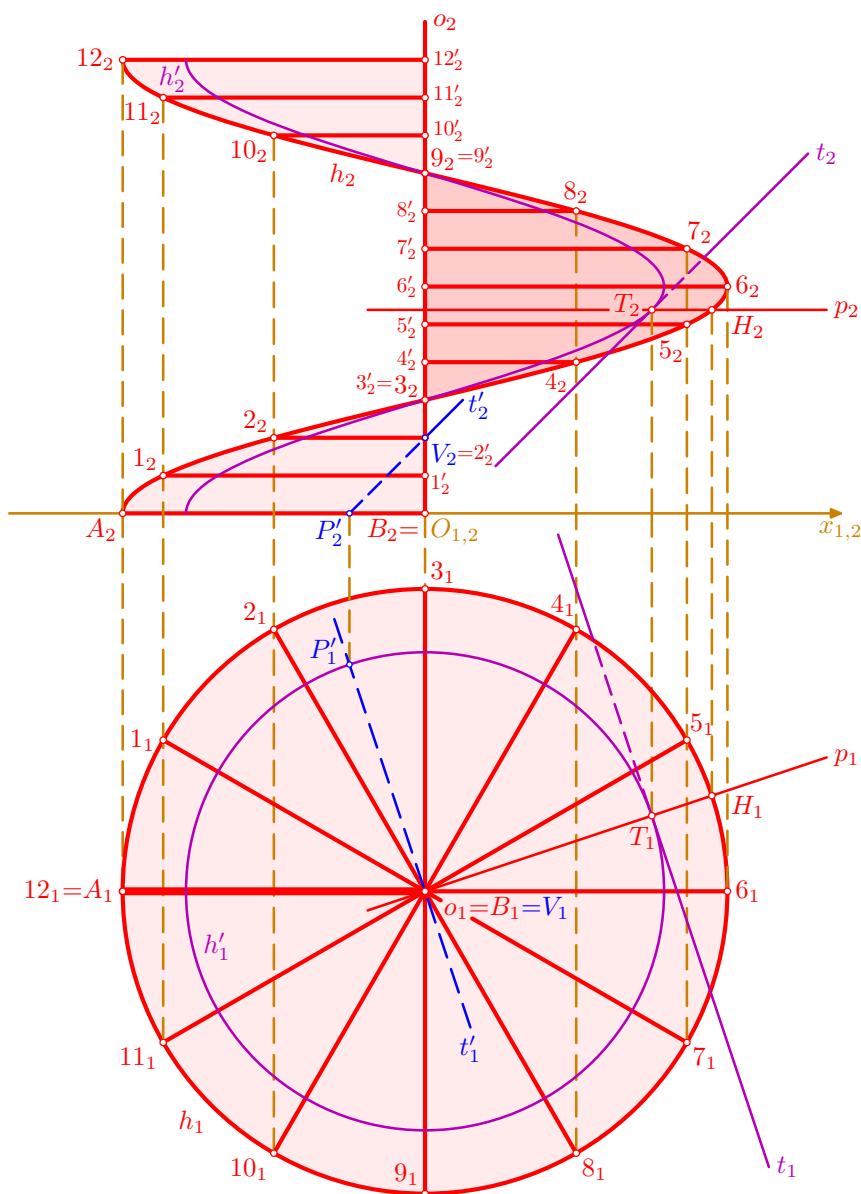
- určíme bod T na ploše, tj. sestrojme jeho nárys T_2 : přímka $p_1 = B_1T_1$ je půdorysem tvořící přímky p , která leží na uvažované schodové ploše; polopřímka B_1T_1 protíná kružnici h_1 v bodě H_1 , jenž je půdorysem bodu H ležícího na sestrojené šroubovici h ; příslušný nárys H_2 najdeme na ordinále a na zobecněné sinusoidě h_2 (mezi 5_2 a 6_2 , což odečteme z půdorysu); nyní již můžeme doplnit nárys $p_2 \parallel x_{1,2}, H_2 \in p_2$, přímky p a na něm pomocí příslušné ordinály nárys $T_2 \in p_2$ bodu $T \in p$



- tečná rovina τ v bodě T plochy musí procházet přímkou p a dourčíme ji pomocí tečny t sestrojené v bodě T ke šroubovici h' , která vznikne šroubováním bodu T v daném šroubovém pohybu: půdorysem této šroubovice h' je kružnice $h'_1(B_1, r' = |B_1T_1|)$, půdorysem tečny t je tečna t_1 ke kružnici h'_1 v bodě T_1 ; otočíme bod T_1 po kružnici h'_1 o 90° proti směru stoupání daného šroubového pohybu do bodu P'_1 a sestrojíme půdorys $t'_1 = P'_1V_1$ přímky $t' = P'V$, která leží na příslušné kuželové ploše tečen a je tedy rovnoběžná s hledanou přímkou t ; nárys P'_2 najdeme na ordinále a na ose $x_{1,2}$, sestrojíme přímku $t'_2 = P'_2V_2$ a následně nárys t_2 tečny t , kde $t_2 \parallel t'_2, T_2 \in t_2$; takto je tečná rovina $\tau = pt$ jednoznačně určena, její stopy nebudeme sestrojovat



- na závěr můžeme doplnit nárys h'_2 šroubovice h' (pro samotné řešení úlohy to ovšem není nezbytně nutné): konstrukci provedeme snadno pomocí ordinál vedených z průsečíků úseček $A_1B_1, 1_1B_1, 2_1B_1, \dots, 12_1B_1$ s kružnicí h'_1 na příslušné úsečky $A_2B_2, 1_21'_2, 2_22'_2, \dots, 12_212'_2$ v náryse – pro větší přehlednost nejsou tyto ordinály v obrázku narýsovány, čtenář si je může zkusit doplnit sám; poznamenejme ještě, že sestrojená tvořící přímka $p = HT$ schodové plochy je současně hlavní normálou šroubovice h' v jejím bodě T a tečná rovina $\tau = pt$ je tedy oskulační rovinou zmíněné šroubovice h' v tomto bodě



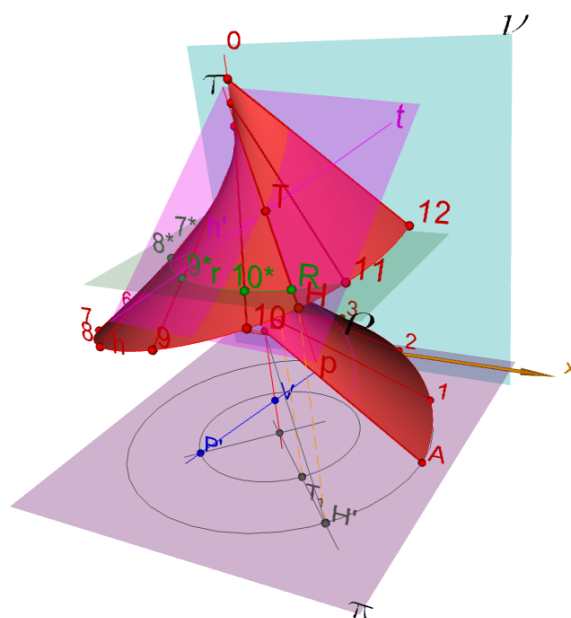
□

1.2. Vývrtková plocha v Mongeově promítání



Výklad

- vývrtková plocha vznikne šroubováním přímky (nebo její části), která protíná osu šroubového pohybu a není k ní kolmá, proto ji lze nazvat také **kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha**
- různé varianty vývrtkové plochy nacházejí uplatnění ve strojní praxi (různé druhy šroubů apod.), ve stavebnictví i v architektuře

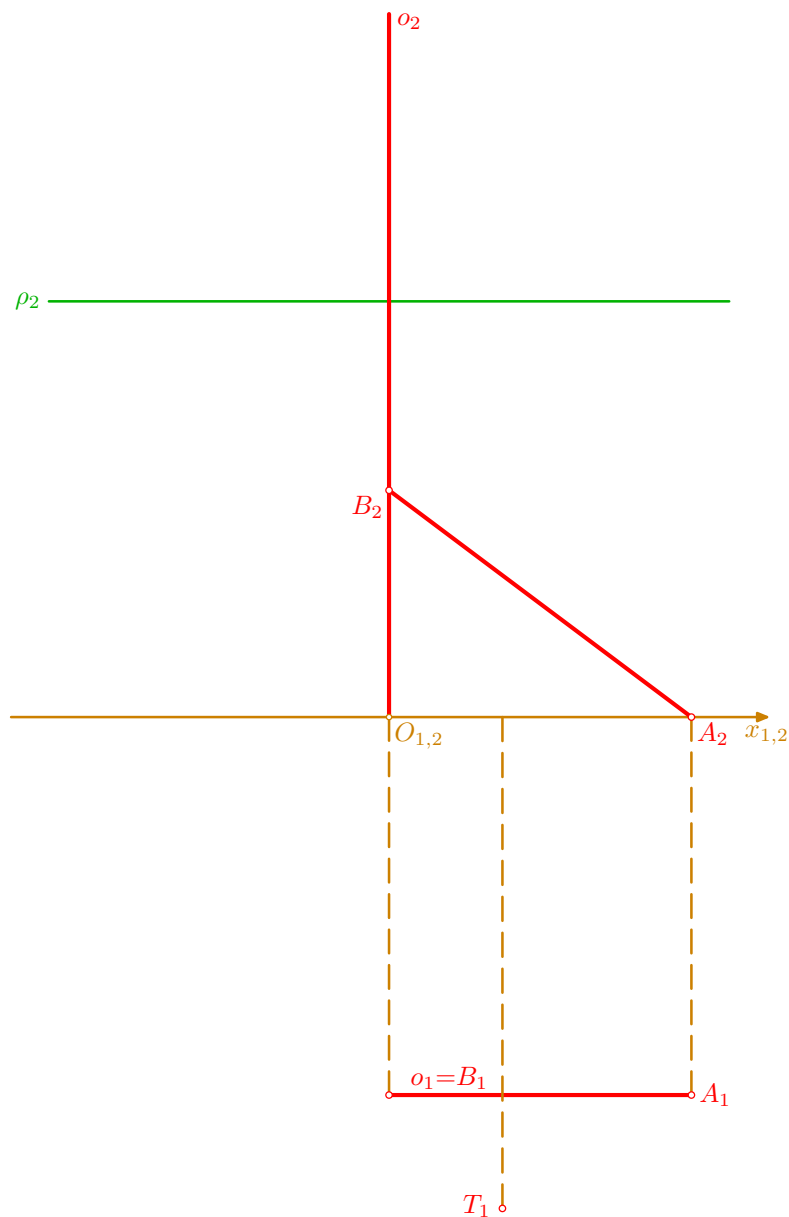


Řešené úlohy

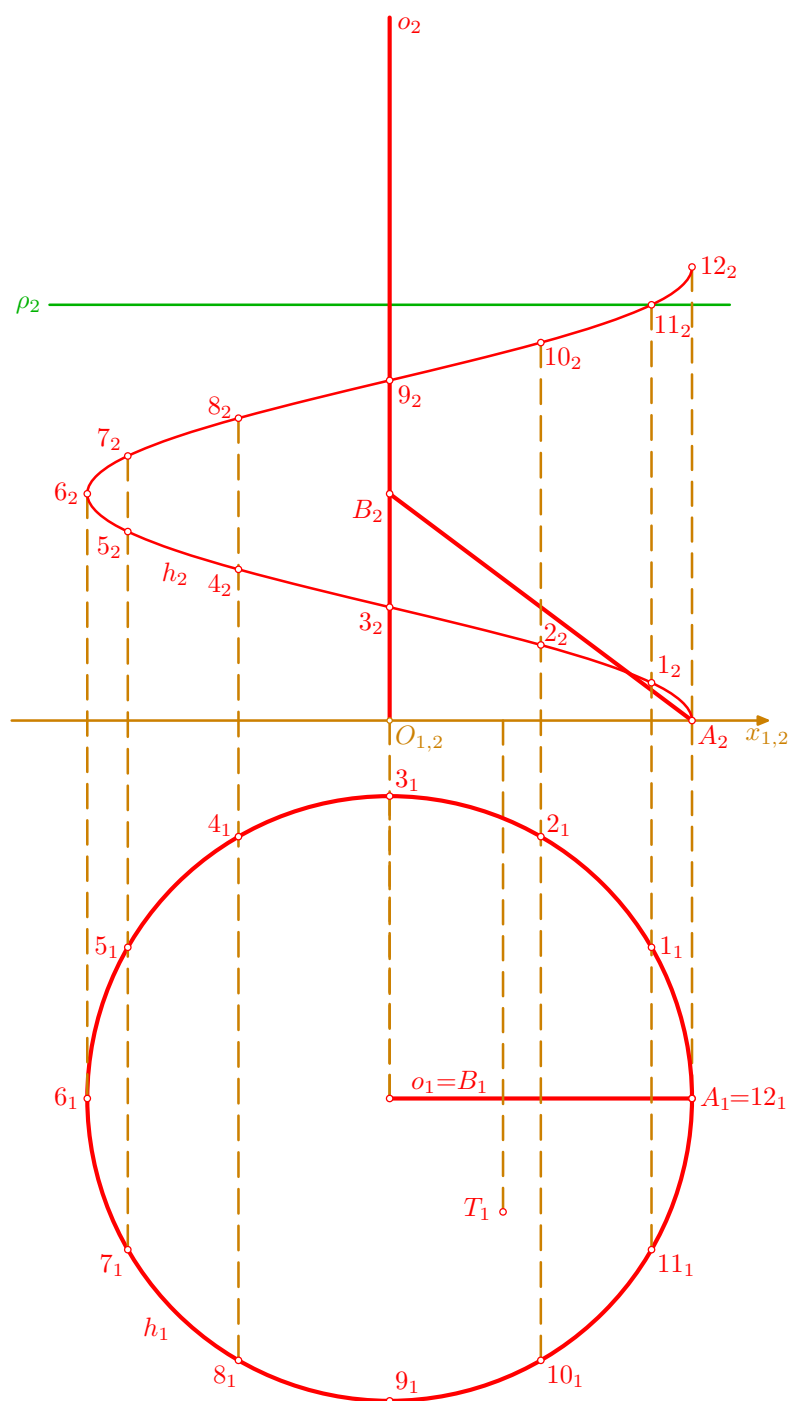
Příklad: V Mongeově promítání zobrazte jeden závit vývrtkové plochy, která vznikne šroubováním úsečky AB ve šroubovém pohybu, jenž má osu $o \perp \pi$, $B \in o$, výšku v závitu a pravotočivou orientaci; v bodě T plochy doplňte tečnou rovinu τ a sestrojte normálový řez plochy rovinou ρ ; $A[4; 5; 0]$, $B[0; 5; 3]$, $v = 6$, $T[1; 5; 6; 5; ?]$, $\rho(\infty; \infty; 5; 5)$.

Řada konstrukčních kroků je v tomto příkladě stejných nebo velmi podobných jako v předchozích příkladech **Šchodová plocha v Mongeově promítání** (viz stranu 275) a **Šroubovice v Mongeově promítání** (viz stranu 260), kde jsou tyto podrobně popsány; díky tomu (a také z důvodu úspory místa) jsou následující konstrukce vysvětleny poněkud stručněji. . .

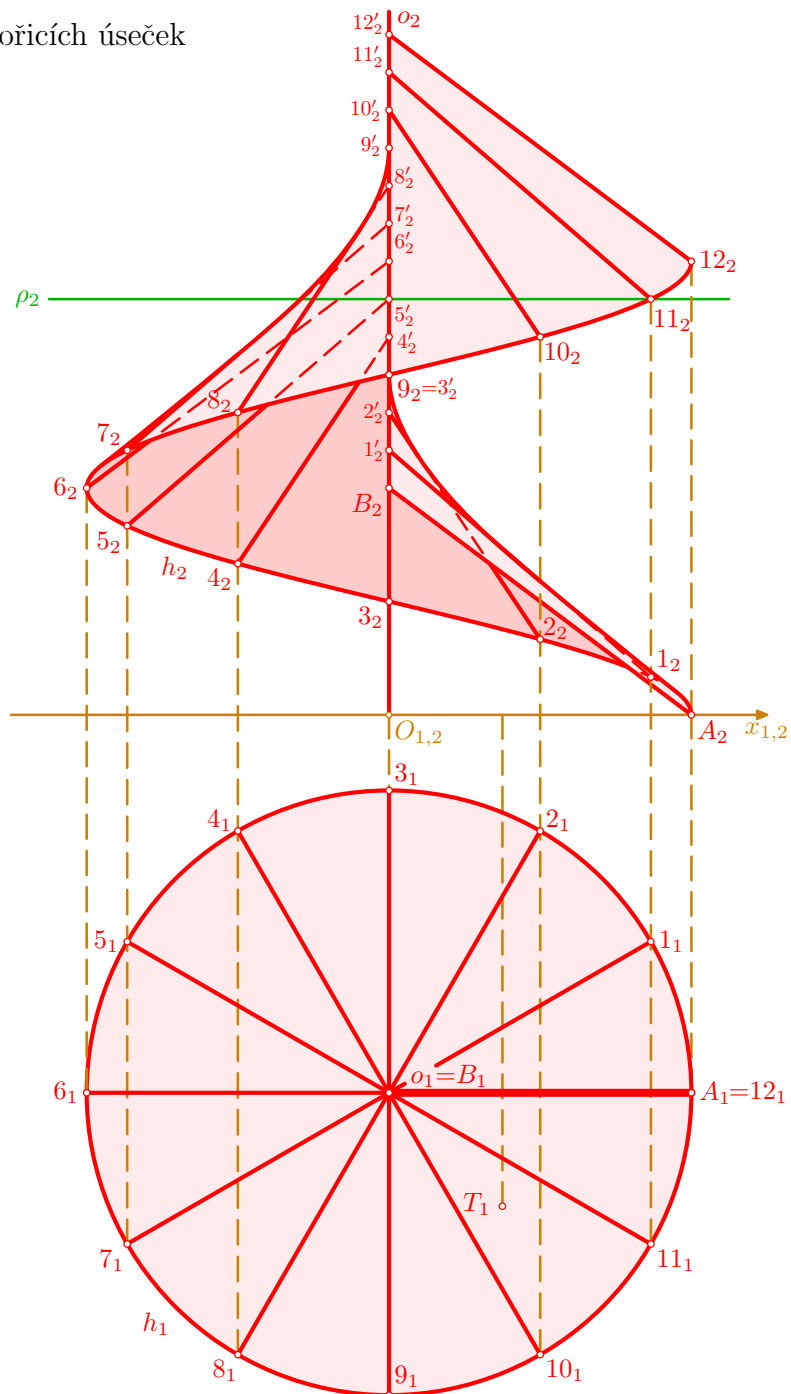
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1B_1 a A_2B_2 úsečky AB ; půdorysem osy $o \perp \pi, B \in o$, je bod $o_1 = B_1$, pro její nárys o_2 platí $o_2 \perp x_{1,2}$ a $B_2 \in o_2$; dále doplníme půdorys T_1 bodu T a nárys $\rho_2 \parallel x_{1,2}$ roviny ρ normálového řezu sestrojované vývrtkové plochy



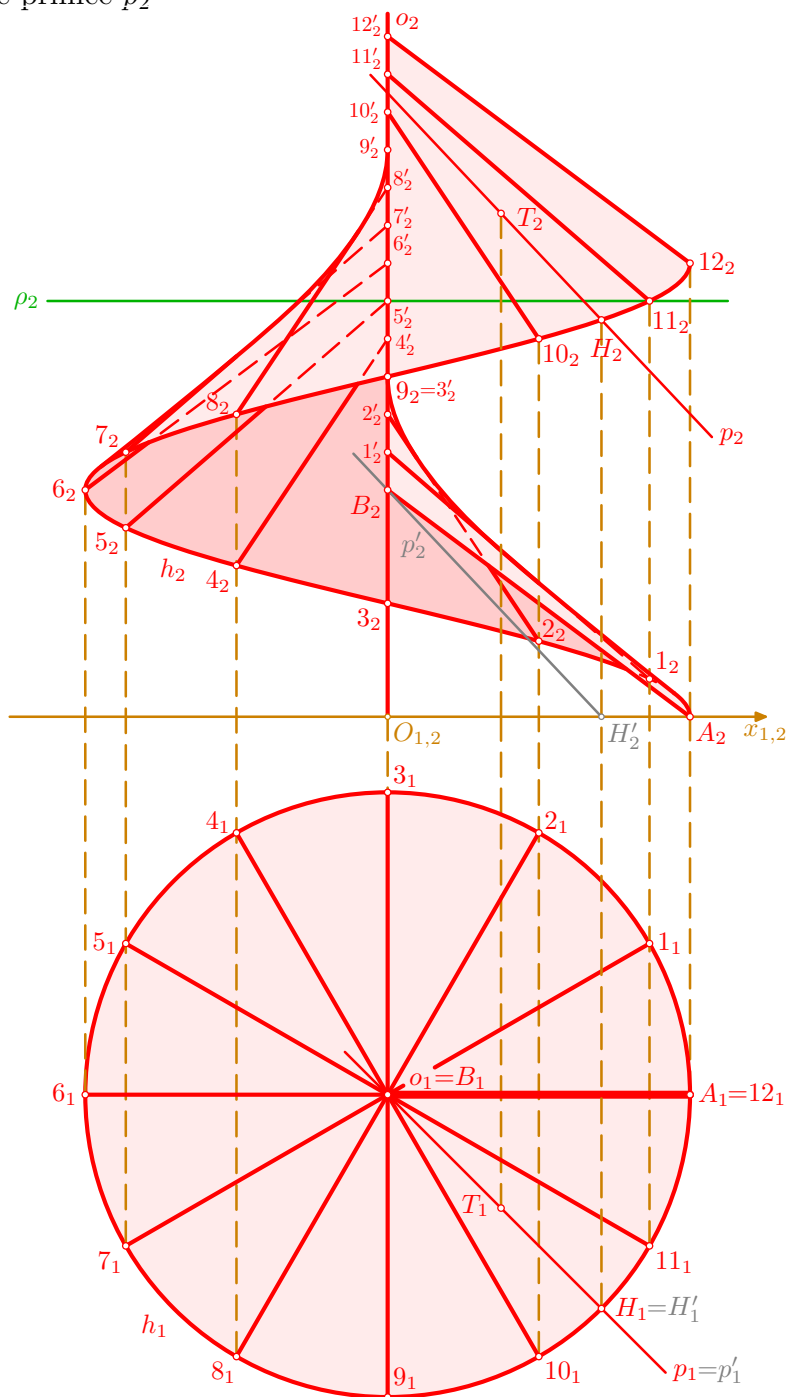
- nejprve sestrojme sdružené průměty h_1, h_2 pravotočivé šroubovice h , která vznikne šroubováním bodu A v daném šroubovém pohybu; půdorysem této šroubovice h je kružnice $h_1(B_1, r = |B_1A_1|)$, nárys h_2 (vytažen jen slabě kvůli viditelnosti v dalších krocích) sestrojíme pomocí nárysů $1_2, 2_2, \dots, 12_2$ dělicích bodů $1, 2, \dots, 12$ šroubovice h ležících v příslušných dvanáctinách výšky v závitu



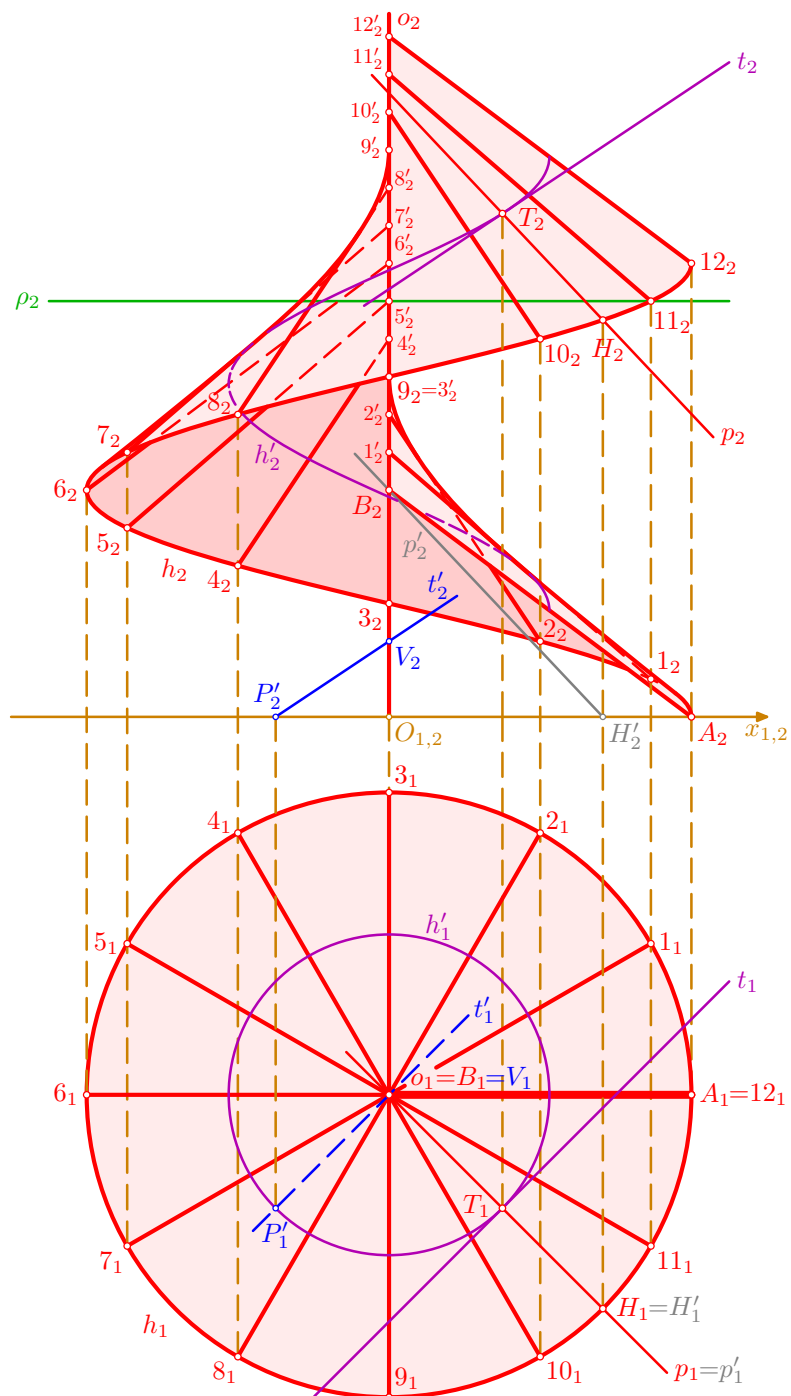
- šroubování bodu B se redukuje pouze na posun ve svislém směru, sestrojme nárysy $1'_2, 2'_2, \dots, 12'_2$ bodů $1', 2', \dots, 12' \in o$, z nichž každý další je o $\frac{v}{12} = 0,5$ výše než-li předchozí; tím dostáváme sdružené průměty dalších dvanácti poloh $11'_2, 22'_2, \dots, 12_2 12'_2$ vyšroubované dané úsečky AB ; v náryse zkusme doplnit obrys: na pravé straně vychází z bodu $3'_2$, dotýká se úseček $2_2 2'_2, 1_2 1'_2$ a hladce se napojuje na křivku h_2 někde mezi body $1_2, A_2$, analogicky zleva; vzhledem k těmto křivkám je pak v náryse vytažena viditelnost příslušných tvořicích úseček



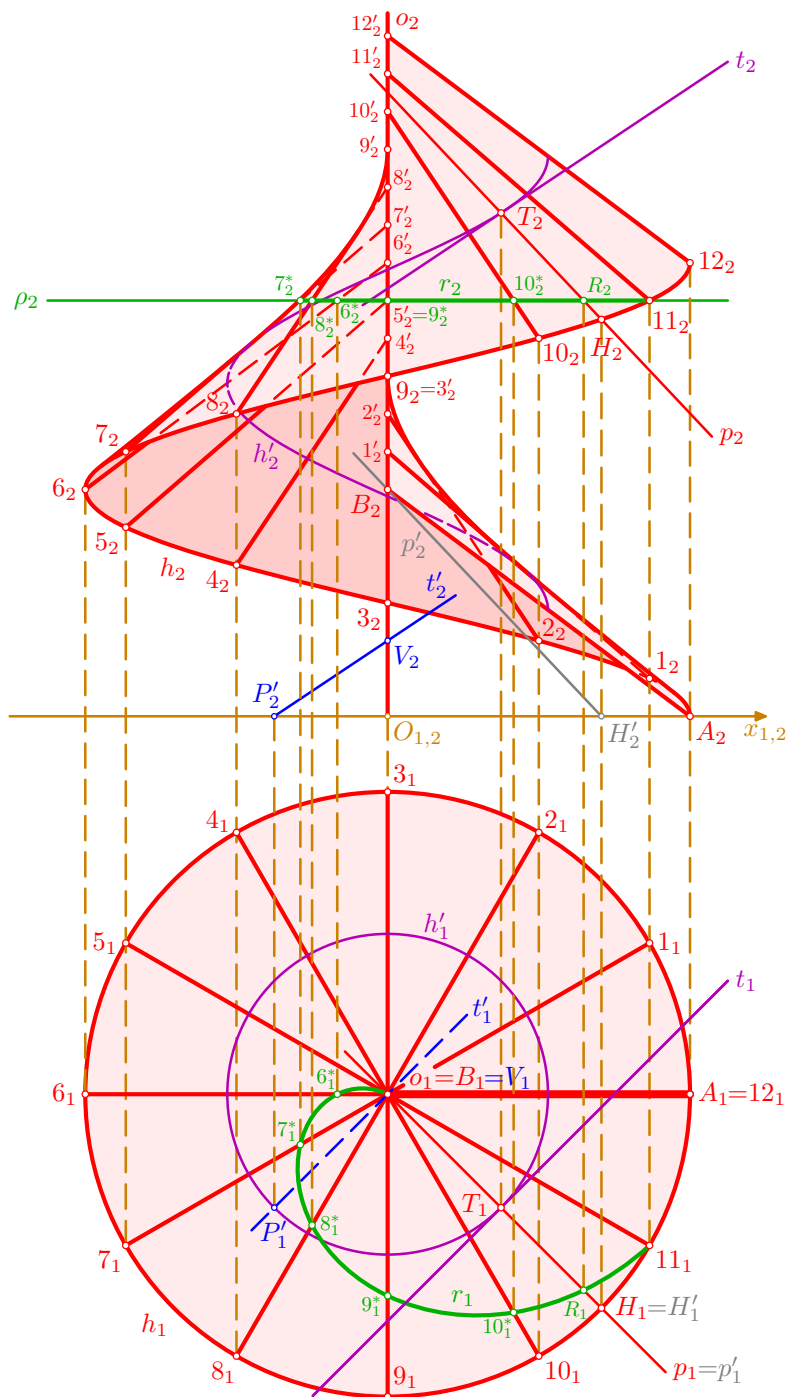
- přímka $p_1 = B_1T_1$ je půdorysem tvořící přímky p , na níž bod T leží; polopřímka B_1T_1 protíná kružnici h_1 v bodě H_1 , příslušný nárys H_2 najdeme na ordinále a na křivce h_2 (mezi body $10_2, 11_2$); pro přímku p pak platí $H \in p$ a $p \parallel p'$, kde $p' = H'B$ ($H' = H_1$), odtud v náryse $H_2 \in p_2$ a $p_2 \parallel p'_2$, kde $p'_2 = H'_2B_2$; nárys T_2 bodu T doplníme na ordinále a na sestrojené přímce p_2



- tečná rovina τ v bodě T plochy musí procházet přímkou p a dourčíme ji pomocí tečny t sestrojené v bodě T šroubovice h' , která vznikne šroubováním bodu T v daném šroubovém pohybu; tečnu t sestrojíme standardně pomocí přímky $t' = P'V$, kde bod V leží na ose o v redukované výšce v_0 závitů nad půdorysnou (pro konstrukci použijeme zaokrouhlenou hodnotu $v_0 = \frac{v}{2\pi} \doteq \frac{v}{6} = 1$) a bod P' dostaneme otočením bodu T_1 po kružnici h'_1 o 90° proti směru stoupání daného šroubového pohybu



- na závěr sestrojíme bodově křivku r normálového řezu plochy danou rovinou ρ ; tvořící přímka p protíná rovinu ρ v bodě R : v náryse je $R_2 = p_2 \cap \rho_2$, půdorys $R_1 \in p_1$ doplníme na ordinále; analogicky sestrojíme sdružené průměty průsečíků $6^*, 7^*, 8^*, 9^*, 10^*$ dalších tvořících úseček $66', 77', 88', 99', 10 10'$ s rovinou ρ ; dá se ukázat, že řezná křivka r , jejímž jedním krajním bodem je průsečík $5' = o \cap \rho$ a druhým bod $11 \in h$, je tzv. **Archimedova spirála**

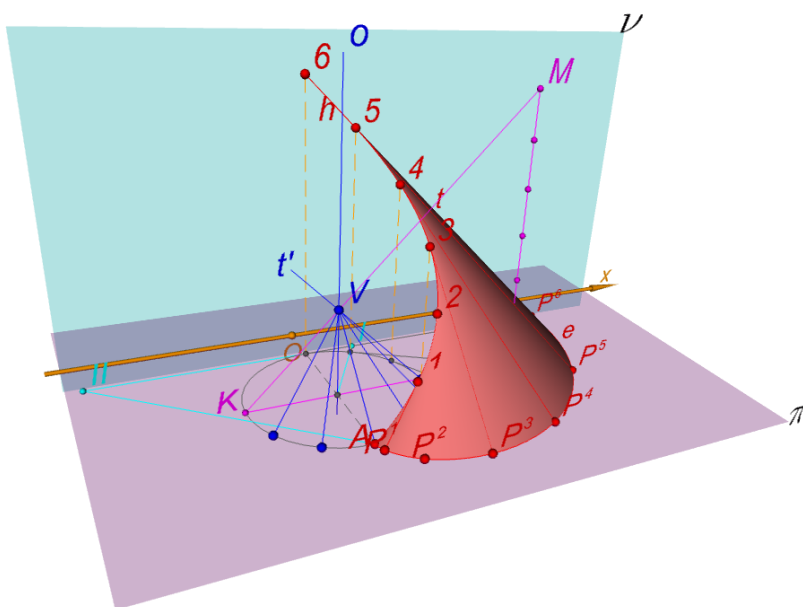


□

1.3. Rozvinutelná šroubová plocha v Mongeově promítání

Výklad

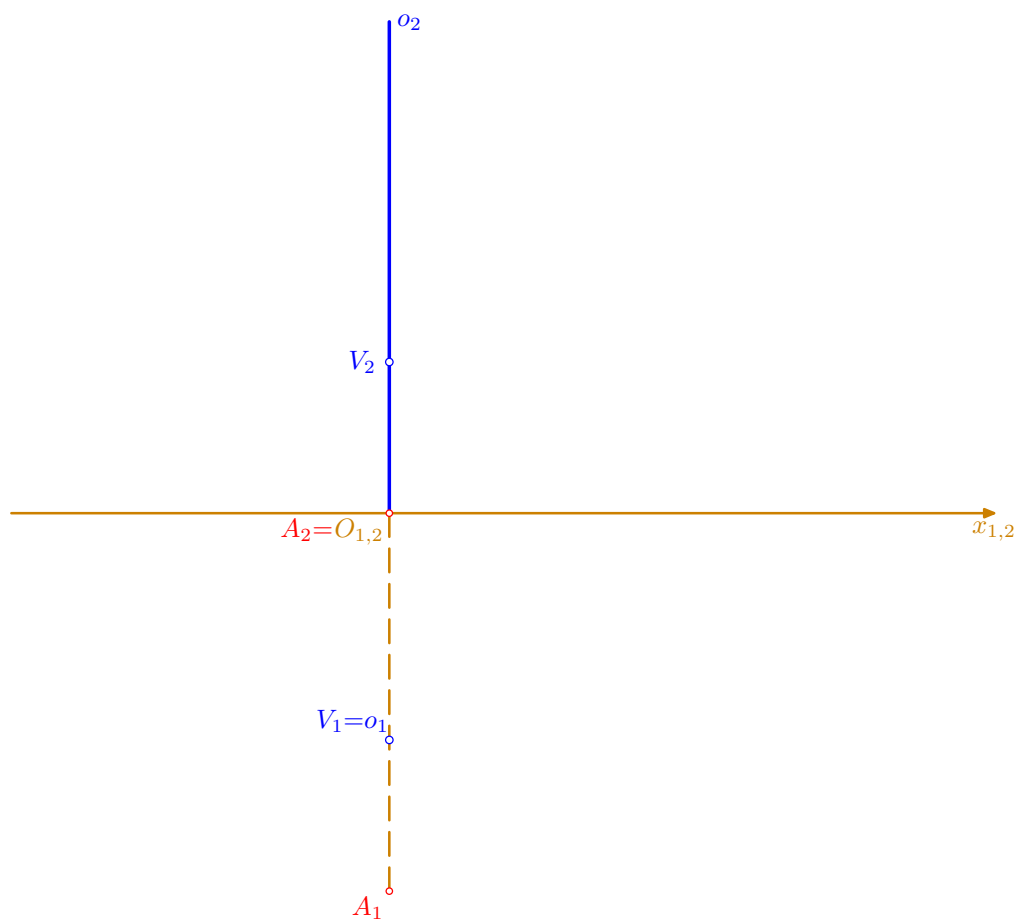
- rozvinutelná šroubová plocha je tvořena tečnami nějaké dané šroubovice, odtud také její alternativní název – **plocha tečen šroubovice**
- daná šroubovice se pak nazývá **hranou vratu** rozvinutelné šroubové plochy
- jak už název napovídá, dá se ukázat, že tuto **plochu lze rozvinout do roviny**, podobně jako např. válcovou nebo kuželovou plochu



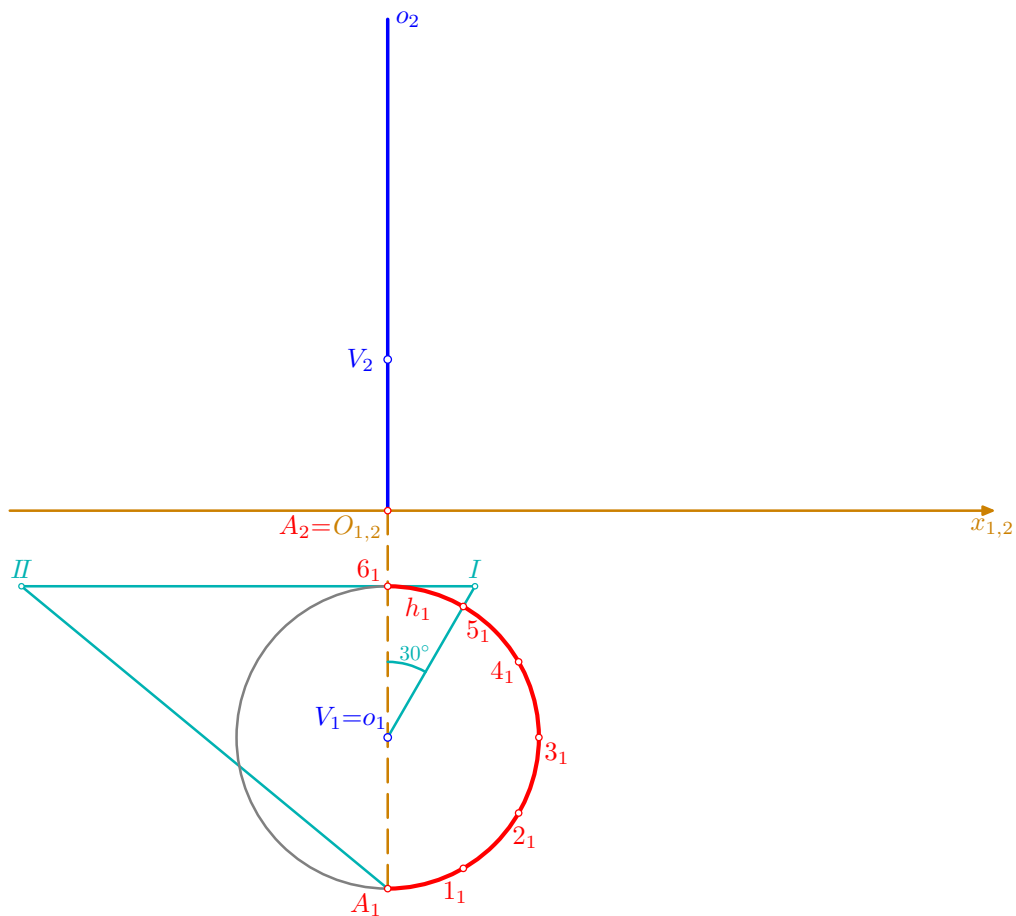
Řešené úlohy

Příklad: V Mongeově promítání zobrazte půl závitu rozvinutelné šroubové plochy, jejíž hranou vratu je pravotočivá šroubovice, která prochází bodem A , má vrchol V kuželové plochy tečen a osu $o \perp \pi$, $V \in o$; plochu omezte hranou vratu a půdorysnou a proveďte rozvinutí této její části do roviny; $A[0; 5; 0]$, $V[0; 3; 2]$.

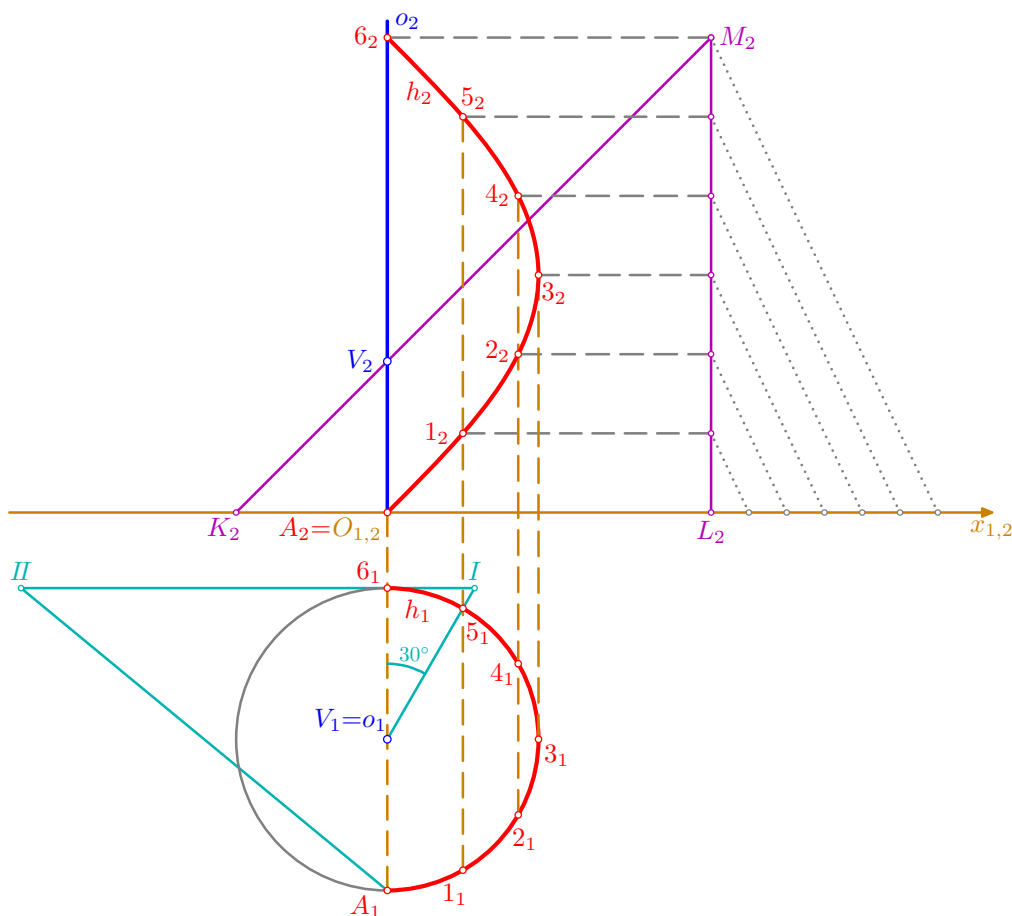
- podle zadání sestrojme sdružené průměty A_1, A_2 (kde $A_2 = O_{1,2}$) a V_1, V_2 daných bodů A, V ; půdorysem osy $o \perp \pi, V \in o$, je bod $o_1 = V_1$, jejím nárysem je přímka $o_2 = A_2V_2$



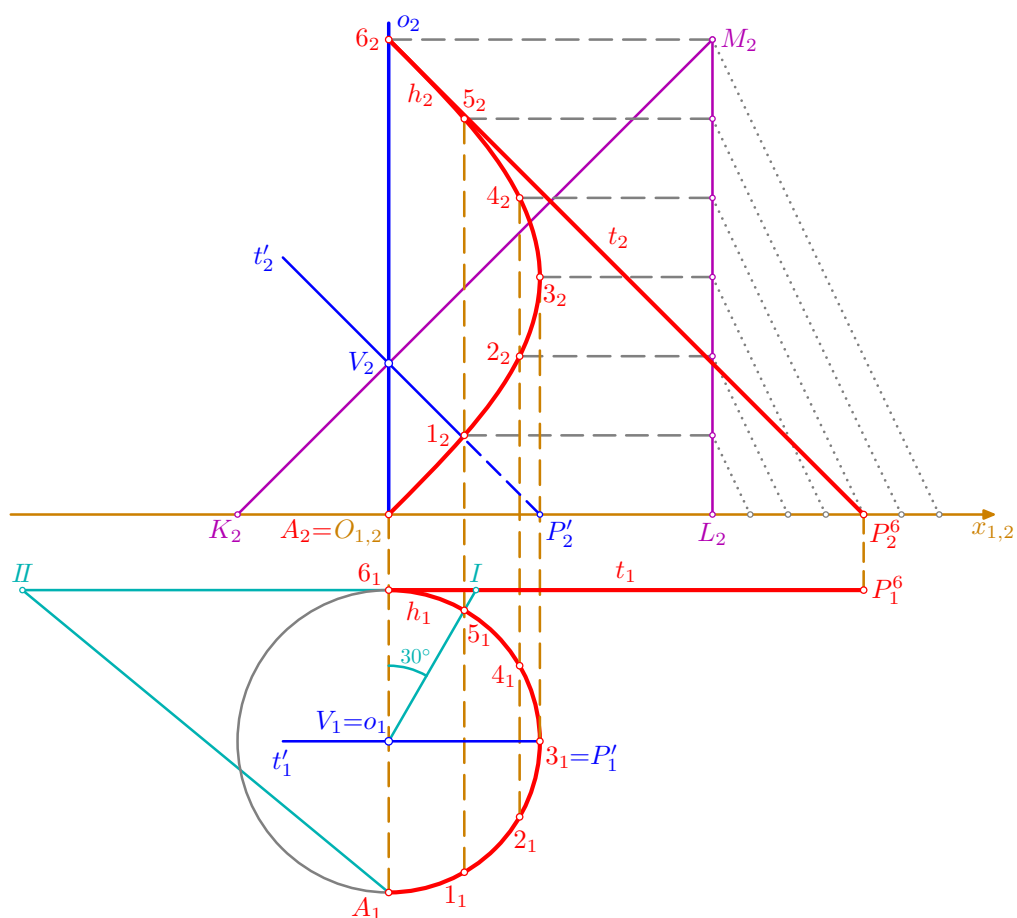
- hranou vratu plochy je pravotočivá šroubovice h , která vznikne šroubováním bodu A kolem osy o při redukované výšce $v_0 = z_V = 2$ závitů; půdorysem šroubovice h je kružnice $h_1(V_1, r = |V_1A_1|)$, na níž můžeme sestrojít půdorysy $1_1, 2_1, \dots, 6_1$ (od bodu A_1 po 30° proti směru hodinových ručiček) dalších šesti bodů $1, 2, \dots, 6$, které leží na konstruované polovině závitů šroubovice h ; abychom mohli v následujícím kroku zjistit délku poloviny výšky v závitů, nachystejme si ještě v půdoryse délku poloviny kružnice h_1 : podle Kochaňského rektifikace sestrojme na tečně kružnice h_1 v bodě 6_1 pomocné body I, II , kde $|III| = 3r$, a získáme tak, s malou chybou, hledanou délku $\pi r \doteq |IIA_1|$



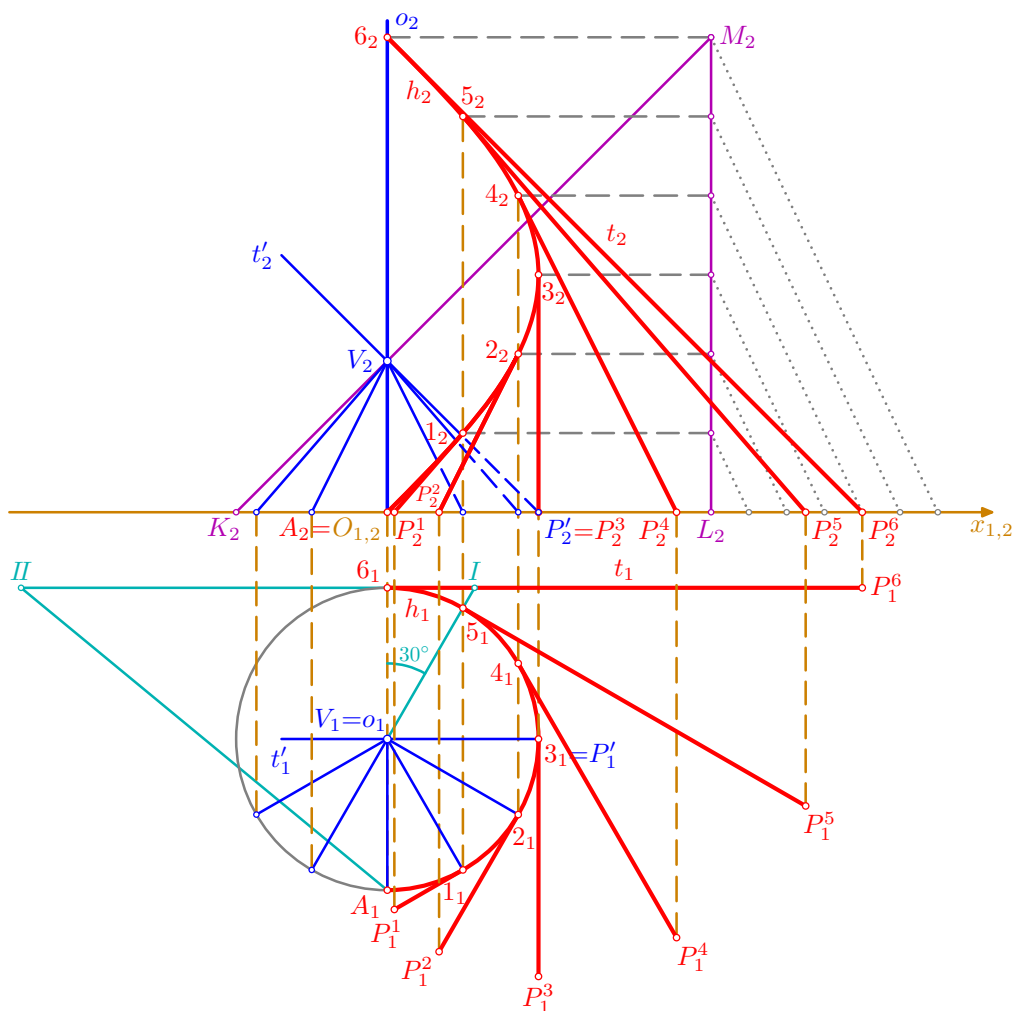
- nejprve určíme polovinu a následně dvanáctinu výšky v závitu, a to pomocí charakteristického trojúhelníka KLM šroubovice h ; na ose $x_{1,2}$ nanese délku $r = |V_1A_1| = 2$ doleva od bodu A_2 a takto získaný koncový bod označme K_2 ; od něj směrem doprava (opět na ose $x_{1,2}$) nanese délku $|IIA_1| \doteq \pi r$ (zjištěnou v předchozím kroku) a krajní bod označme L_2 ; třetí vrchol M_2 nárysu trojúhelníka KLM pak musí ležet na přeponě K_2V_2 a na kolmici k ose $x_{1,2}$ vedené bodem L_2 ; délka odvěsny L_2M_2 udává polovinu výšky v závitu, tj. $\frac{v}{2} = |L_2M_2|$; tuto délku rozdělme na šest stejných dílů a získáme tak výšky bodů $1, 2, \dots, 6$ šroubovice h , jejichž příslušné nárysy doplníme snadno pomocí ordinál (příslušné konstrukce jsou zřejmé z obrázku); tím máme sestrojeny sdružené průměty h_1, h_2 poloviny závitu šroubovice h – hrany vratu dané rozvinutelné šroubové plochy



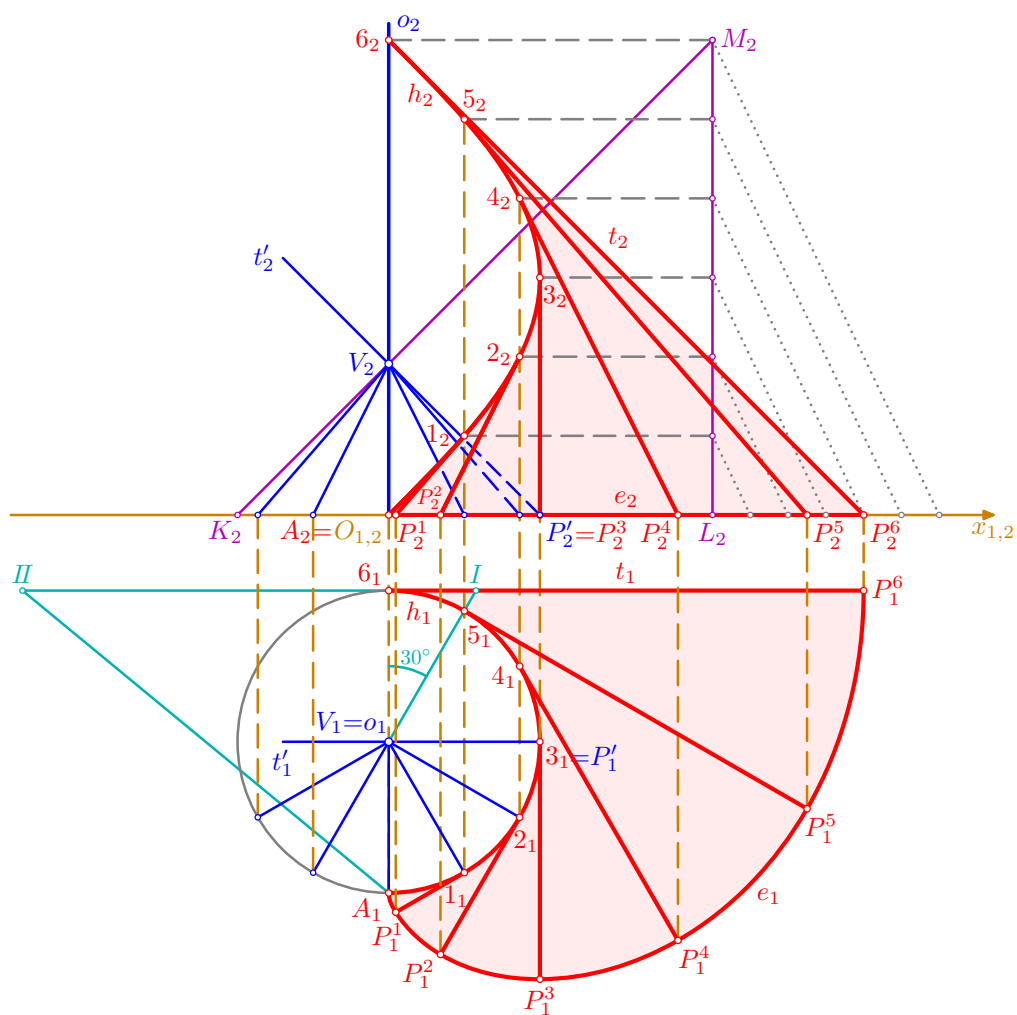
- dále budeme v bodech $1, 2, \dots, 6$ sestrojovat tečny ke šroubovici h , postup popíšeme podrobněji pro konstrukci tečny t v bodě 6: půdorys t_1 je tečna ke kružnici h_1 v bodě 6_1 ; přímka $t'_1 = P'_1V_1$, kde bod $P'_1 = 3_1$ dostaneme otočením bodu 6_1 po kružnici h_1 o 90° proti směru stoupání šroubovice h , je půdorysem přímky $t' = P'V$, která leží na příslušné kuželové ploše tečen a je rovnoběžná s hledanou tečnou t ; nárys P'_2 leží na ordinále a na ose $x_{1,2}$ a dále platí $t_2 \parallel t'_2, 6_2 \in t_2$, přičemž $t'_2 = P'_2V_2$ (pro zajímavost poznamenejme, že v blízkosti průsečíku přímky t_2 s úsečkou L_2M_2 vzniká zajímavý optický klam „nalomení“ přímky t_2 , způsobený pěti tečkovanými rovnoběžkami, které sloužily k rozdělení úsečky L_2M_2 na šest stejných dílů); doplníme ještě půdorysný stopník $P^6 = t \cap \pi$ sestrojované tečny t : v náryse je $P_2^6 = t_2 \cap x_{1,2}$ a půdorys P_1^6 leží na ordinále a na přímce t_1



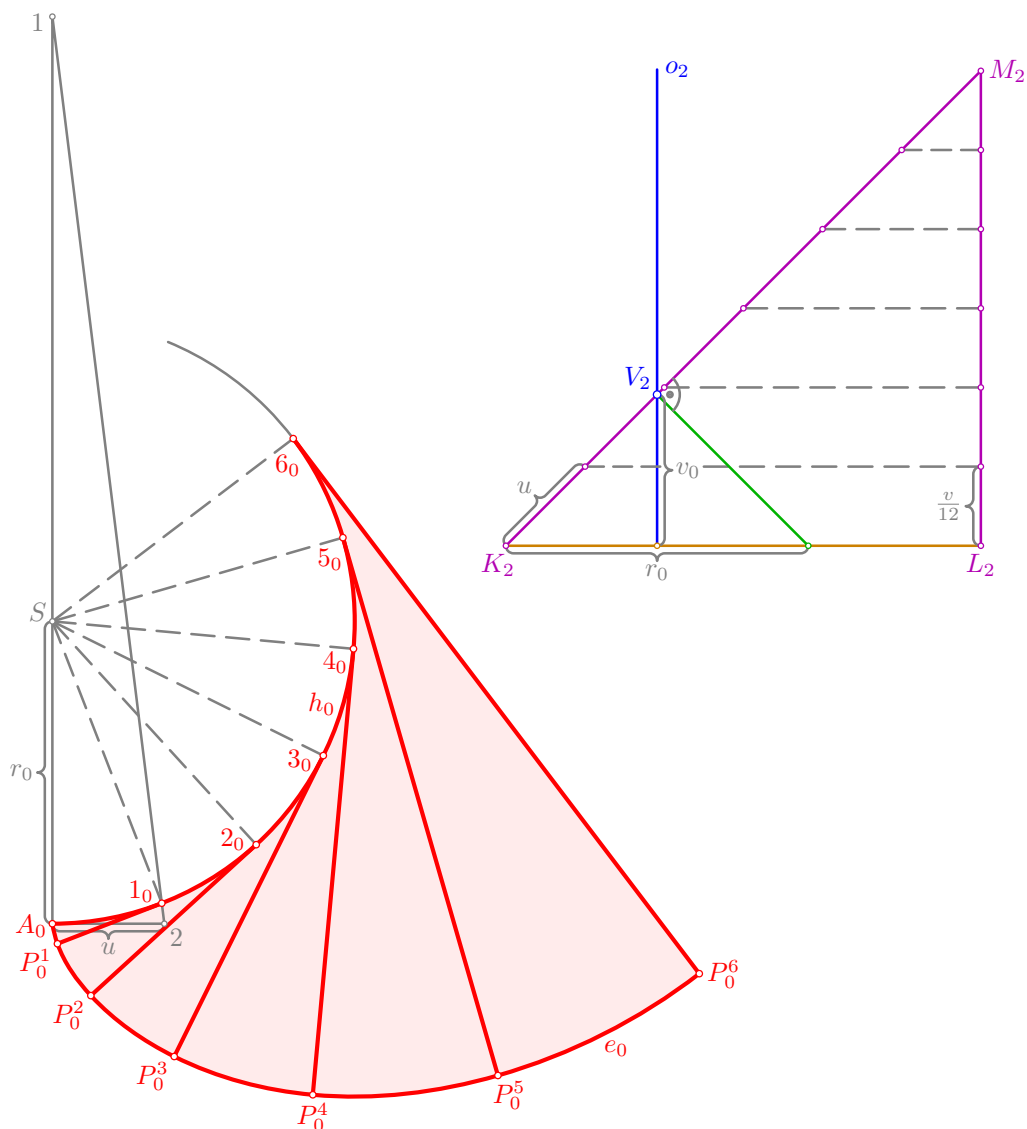
- stejným způsobem jako v předchozím kroku sestrojme sdružené průměty tečen šroubovice h i v jejích zbývajících bodech $1, 2, \dots, 5$ a opět doplníme nárysy a následně na ordinálách půdorysy příslušných půdorysných stopníků P^1, P^2, P^3, P^4, P^5 ; půdorys P_1^3 stopníku P^3 ovšem nenajdeme tak snadno, neboť body $3_2, P_2^3, 3_1$ leží na stejné ordinále; ze zadání vyplývá, že šroubovice h má sklon $\varphi = 45^\circ$ (je totiž $r = v_0$) a tentýž sklon vzhledem k půdorysně má tedy také každá její tečna; odtud již snadno odvodíme $|P_1^3 3_1| = |P_2^3 3_2|$; při jiném zadání bychom mohli využít např. sklopení půdorysně promítací roviny tečny v bodě 3 do půdorysny, nebo bychom vzdálenost $|P_1^3 3_1|$ mohli určit pomocí nárysu $K_2 L_2 M_2$ charakteristického trojúhelníka šroubovice h (zkuste si to promyslet jako cvičení...)



- dá se dokázat, že pro délky kruhových oblouků na kružnici h_1 platí $|\widehat{A_1 1_1}| = |1_1 P_1^1|$, $|\widehat{A_1 2_1}| = |2_1 P_1^2|, \dots, |\widehat{A_1 6_1}| = |6_1 P_1^6|$, z čehož vyplývá, že půdorysné stopníky P^1, P^2, \dots, P^6 sestrojených tečen leží na tzv. **evolventě** e kružnice h_1 ; ta leží v půdorysně, a tudíž splývá se svým půdorysem e_1 , jejím nárysem je úsečka $e_2 = A_2 P_2^6$ na ose $x_{1,2}$; tím je úloha v průmětech vyřešena



- pro rozvinutí sestrojené (a v předchozích krocích zobrazené) části plochy je užitečné překreslit si nárys $K_2L_2M_2$ charakteristického trojúhelníka šroubovice h a označit v něm několik užitečných údajů: především si uvědomme, že délka přepony K_2M_2 je současně délkou poloviny závitu šroubovice h , a tudíž platí $u = \frac{1}{6}|K_2M_2| = |\widehat{A1}| = |\widehat{12}| = \dots = |\widehat{56}|$, kde $\widehat{A1}, \widehat{12}, \dots, \widehat{56}$ jsou jednotlivé oblouky šroubovice h mezi jejími sousedními dělicími body; dále se dá ukázat, že šroubovice h má v každém bodě stejný tzv. **poloměr r_0 křivosti**, pro který platí $r_0 = \frac{r^2+v_0^2}{r}$, kde $r = |K_2O_2| = 2$ je poloměr šroubovice h a $v_0 = z_V = 2$ je její redukovaná výška závitu; délku r_0 lze také snadno sestrojít v trojúhelníku $K_2L_2M_2$, stačí vést bodem V_2 kolmici k přeponě K_2M_2 , určit její průsečík s osou $x_{1,2}$ a odměřit jeho vzdálenost od bodu K_2 (z Pythagorovy věty je $|K_2V_2| = \sqrt{r^2 + v_0^2}$ a podle Eukleidovy věty o odvěsně má tedy vskutku sestrojená přepona délku $r_0 = \frac{r^2+v_0^2}{r}$, při našem zadání vychází $r_0 = 4$, což je vidět z obrázku nebo to lze snadno spočítat); nyní již můžeme přistoupit k závěrečnému rozvinutí: v něm šroubovice h přejde do kružnice $h_0(S, r_0)$ (její střed S zvolme libovolně); na kružnici h_0 zvolme bod A_0 a od něj na ni nanese délku u – to provedeme pomocí Sobotkovy rektifikační metody: na polopřímce A_0S sestrojme bod 1, kde $|1A_0| = 3r_0$ (nebo $|1S| = 2r_0$), na tečně ke kružnici h_0 v bodě A_0 sestrojme bod 2 tak, aby bylo $|A_02| = u$; pak úsečka 12 protne kružnici h_0 v bodě 1_0 , pro který je $|\widehat{A_01_0}| \doteq u$; nyní již snadno doplníme další body $2_0, 3_0, \dots, 6_0$ rozvinuté šroubovice h ; na závěr stačí v každém z těchto bodů sestrojít tečnu ke kružnici h_0 , nanést na ni (v příslušném směru) odpovídající násobek délky u , tj. sestrojít body $P_0^1, P_0^2, \dots, P_0^6$, kde $|1_0P_0^1| = u, |2_0P_0^2| = 2u, \dots, |6_0P_0^6| = 6u$ (tyto délky můžeme odměřit na přeponě K_2M_2), a spojit tyto koncové body evolventou e_0 kružnice h_0 , do níž se rozvine evolventa $e = e_1$ kružnice h_1 z předchozího obrázku; tím je rozvinutí plochy do roviny provedeno, určitě si zkuste výsledek vystříhnout z papíru a „postavit“ nad sestrojený půdorys...



2. Rotační plochy

Výklad

- rotační plocha vznikne rotací nějaké tzv. tvořící **křivky** (rovinné nebo prostorové) kolem dané osy o rotace; je to vlastně speciální případ šroubové plochy s nulovou výškou závitů
- kružnice, kterou vytvoří libovolný bod dané tvořící křivky při rotaci kolem dané osy, se nazývá **rovnoběžka** (nebo **rovnoběžková kružnice**) plochy

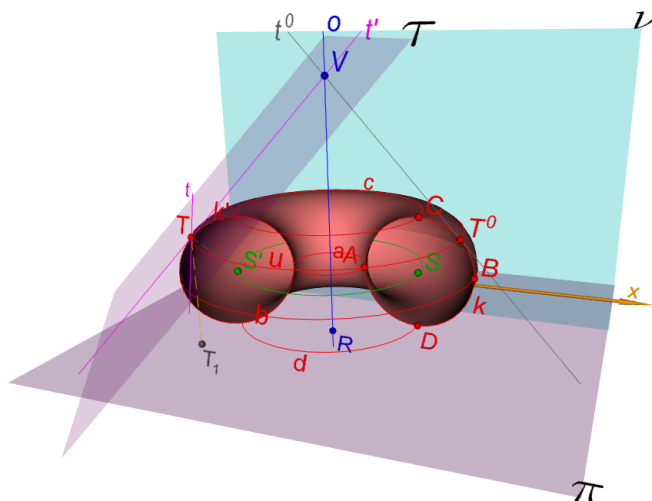
- každá rovina, která prochází osou rotace, protíná danou rotační plochu v tzv. **meridiánu** (někdy se mu říká i **poledník**); polovina meridiánu, ležící v jedné polorovině určené osou rotace, se nazývá **polomeridián**
- rotací libovolného meridiánu nebo polomeridiánu dané rotační plochy vznikne táž plocha
- meridián, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, se nazývá **hlavní meridián**
- rotací krajních bodů dané tvořící křivky, existují-li, dostaneme tzv. **hraniční rovnoběžky**; rotací bodu dané tvořící křivky, který je ve svém okolí minimálně, resp. maximálně, vzdálen od osy rotace, vznikne **hrdelní**, resp. **rovníková**, rovnoběžka plochy, zkráceně **hrdlo**, resp. **rovník**; a konečně bod, v němž je neasymptotická tečna dané tvořící křivky kolmá k ose rotace, vytváří tzv. **kráterovou rovnoběžku**, zkráceně **kráter**
- tečná rovina v bodě M rotační plochy je určena tečnami k rovnoběžce a k meridiánu, které procházejí bodem M

2.1. Anuloid v Mongeově promítání



Výklad

- rotační plocha zvaná **anuloid** (nebo také **torus** či **kruhový prstenec**) vznikne rotací kružnice $k(S, r)$, jejíž rovina prochází osou o rotace a současně $S \notin o$; tvořící kružnice k je tedy polomeridiánem anuloidu

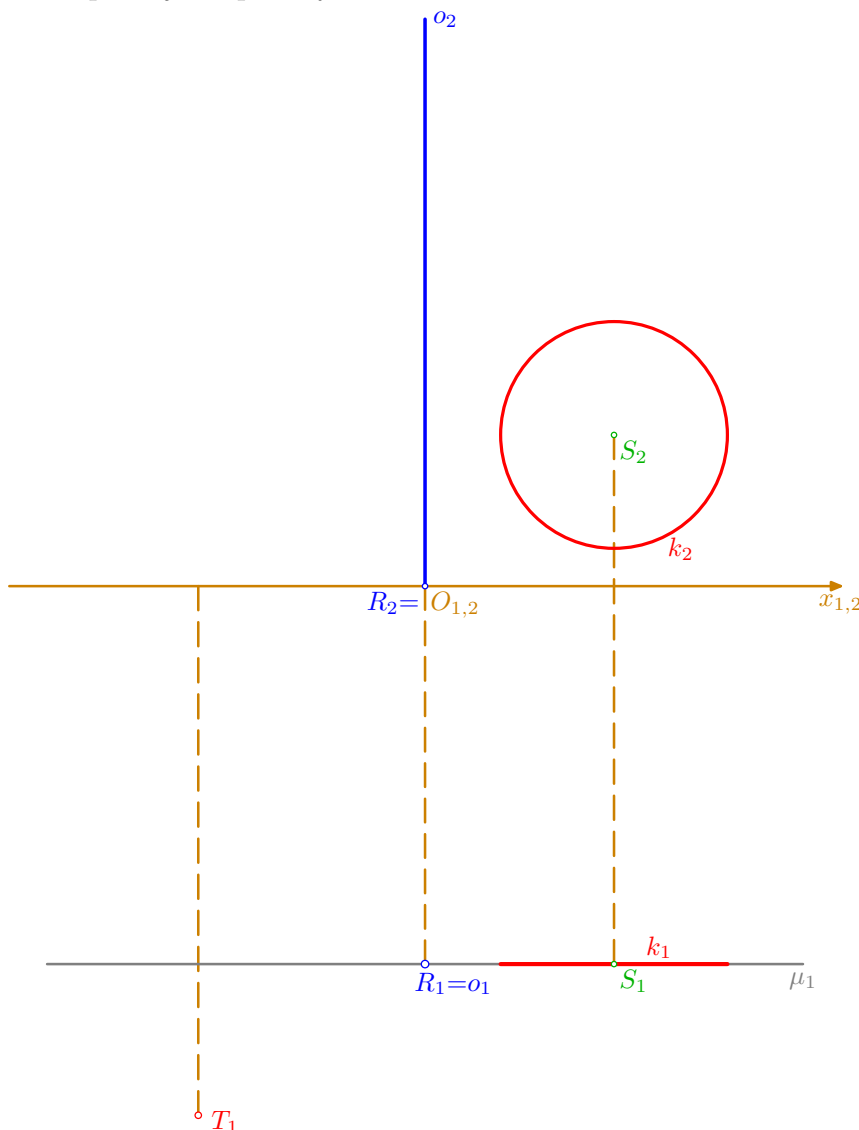




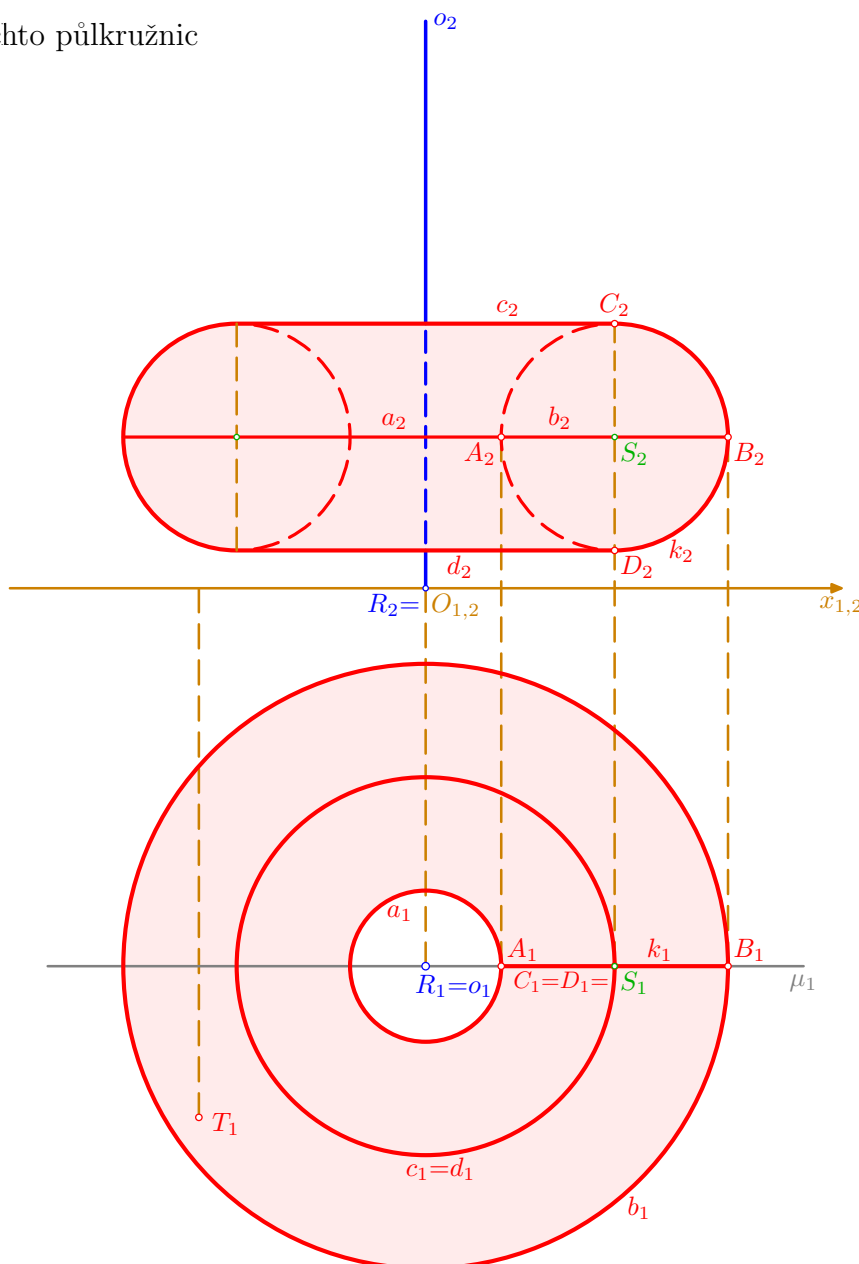
Řešené úlohy

Příklad: V Mongeově promítání sestrojte tečnou rovinu τ v bodě T anuloidu, který má osu $o \perp \pi, R \in o$, a jehož polomeridiánem je kružnice $k(S; r); R[0; 5; 0], S[2; 5; 5; 2], r = 1,5; T[-3; 7; z_T > z_S]$.

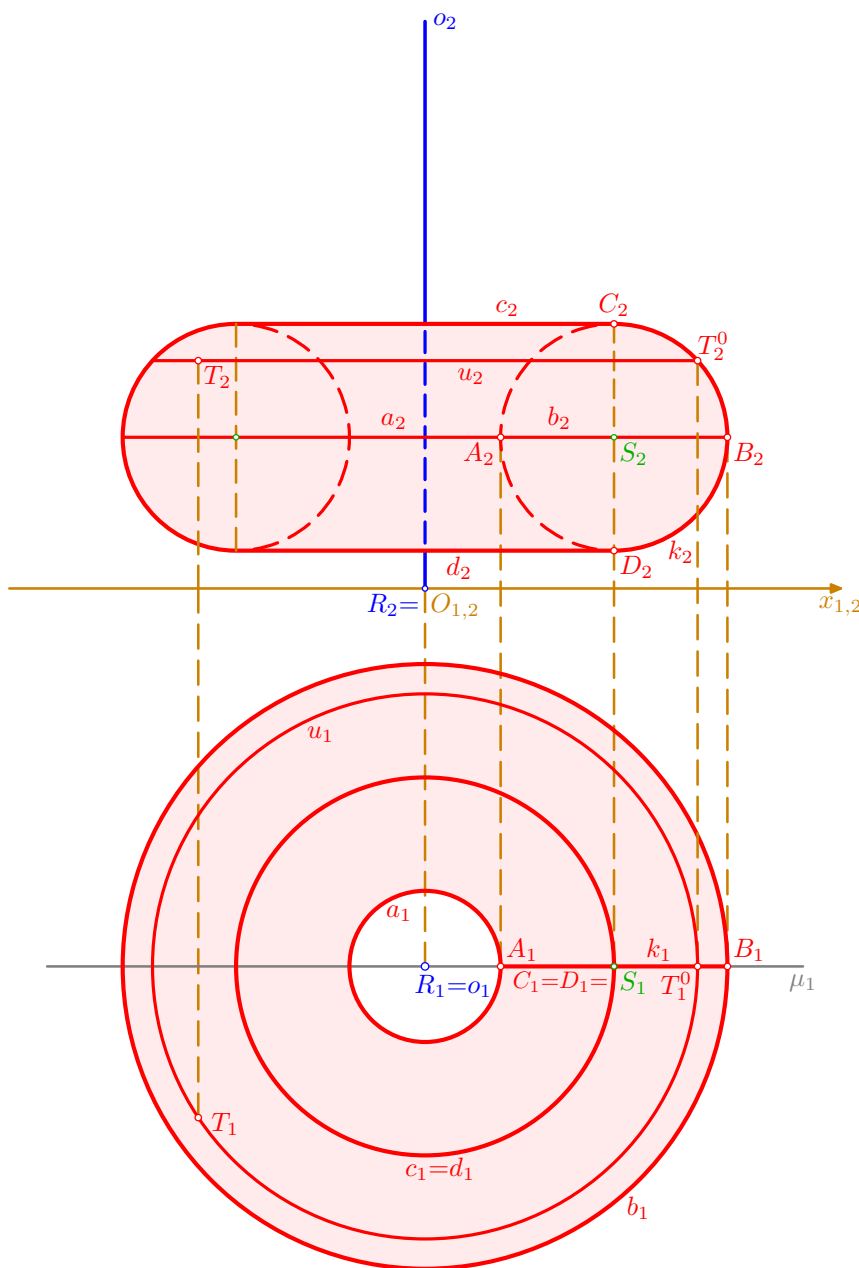
- podle zadání sestrojme sdružené průměty S_1, S_2 a R_1, R_2 (kde $R_2 = O_{1,2}$) daných bodů S, R ; půdorysem osy $o \perp \pi, R \in o$, je bod $o_1 = R_1$, pro její nárýs o_2 platí $o_2 \perp x_{1,2}$ a $R_2 \in o_2$; přímka $\mu_1 \parallel x_{1,2}, R_1 \in \mu_1$, je půdorysem roviny $\mu = oS$ hlavního meridiánu, v níž leží zadaná kružnice $k(S, r)$; půdorysem této kružnice je tedy úsečka k_1 , která leží na přímce μ_1 , má střed S_1 a délku $2r = 3$; nárýsem je pak kružnice $k_2(S_2, r = 3)$; nakonec k zadání patří ještě půdorys T_1 bodu T



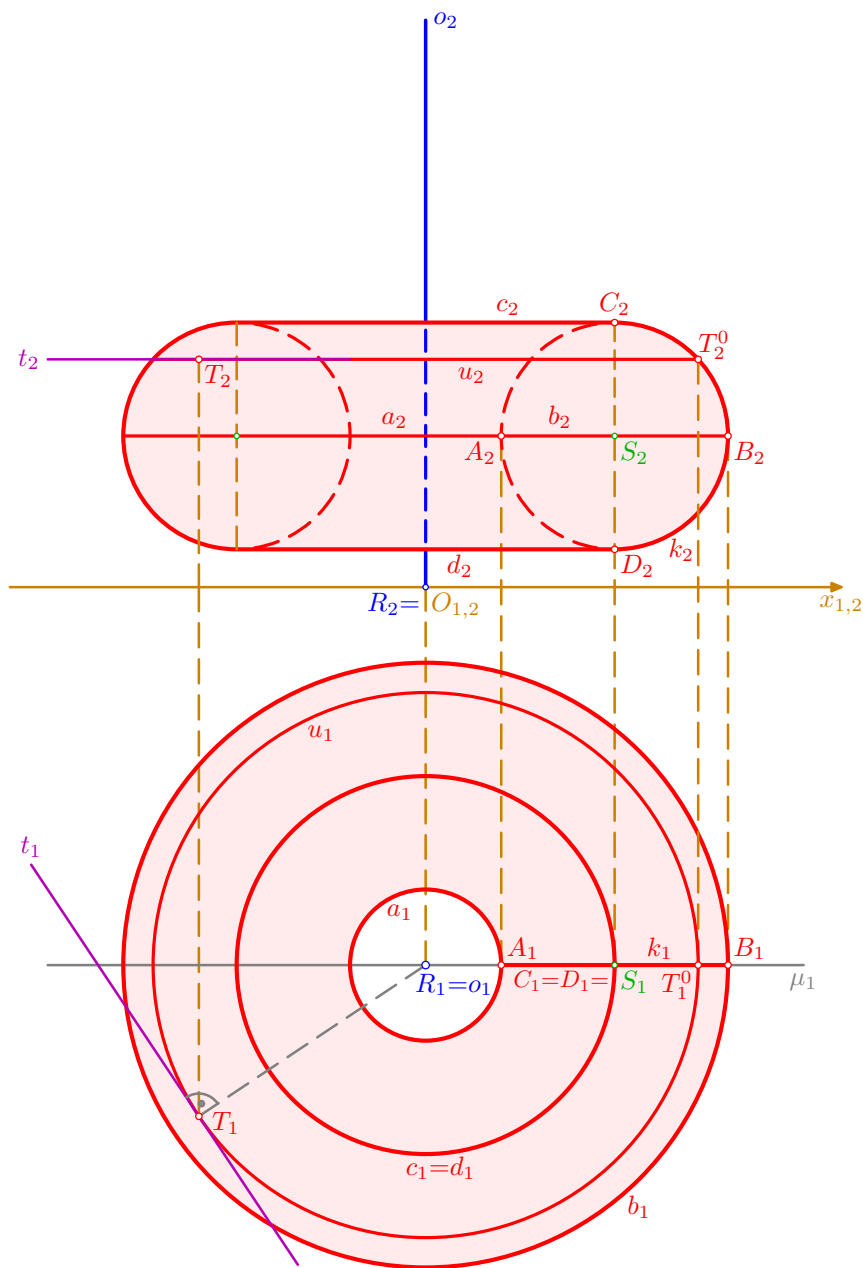
- na kružnici k zvolme dva kolmé průměry AB, CD , kde $AB \parallel \pi$ a $CD \perp \pi$; bod A , resp. bod B , má ve svém okolí nejmenší, resp. největší, vzdálenost od osy o , a jeho rotací tudíž vznikne **hrdelní rovnoběžka** (hrdlo) a , resp. **rovníková rovnoběžka** (rovník) b ; v bodech C, D jsou tečny kružnice k kolmé k ose o , a rotací těchto bodů tedy vznikají tzv. **kráterové rovnoběžky** c, d ; v půdoryse se rovnoběžky a, b, c, d zobrazí jako soustředné kružnice $a_1, b_1, c_1 = d_1$, jejich nárysy jsou úsečky a_2, b_2, c_2, d_2 , které jsou souměrné podle příčky o_2 ; půdorysem plochy je mezikruží ohraničené kružnicemi a_1, b_1 , nárys plochy ohraničují dvě souměrné půlkružnice a úsečky c_2, d_2 , které jsou společnými tečnami těchto půlkružnic



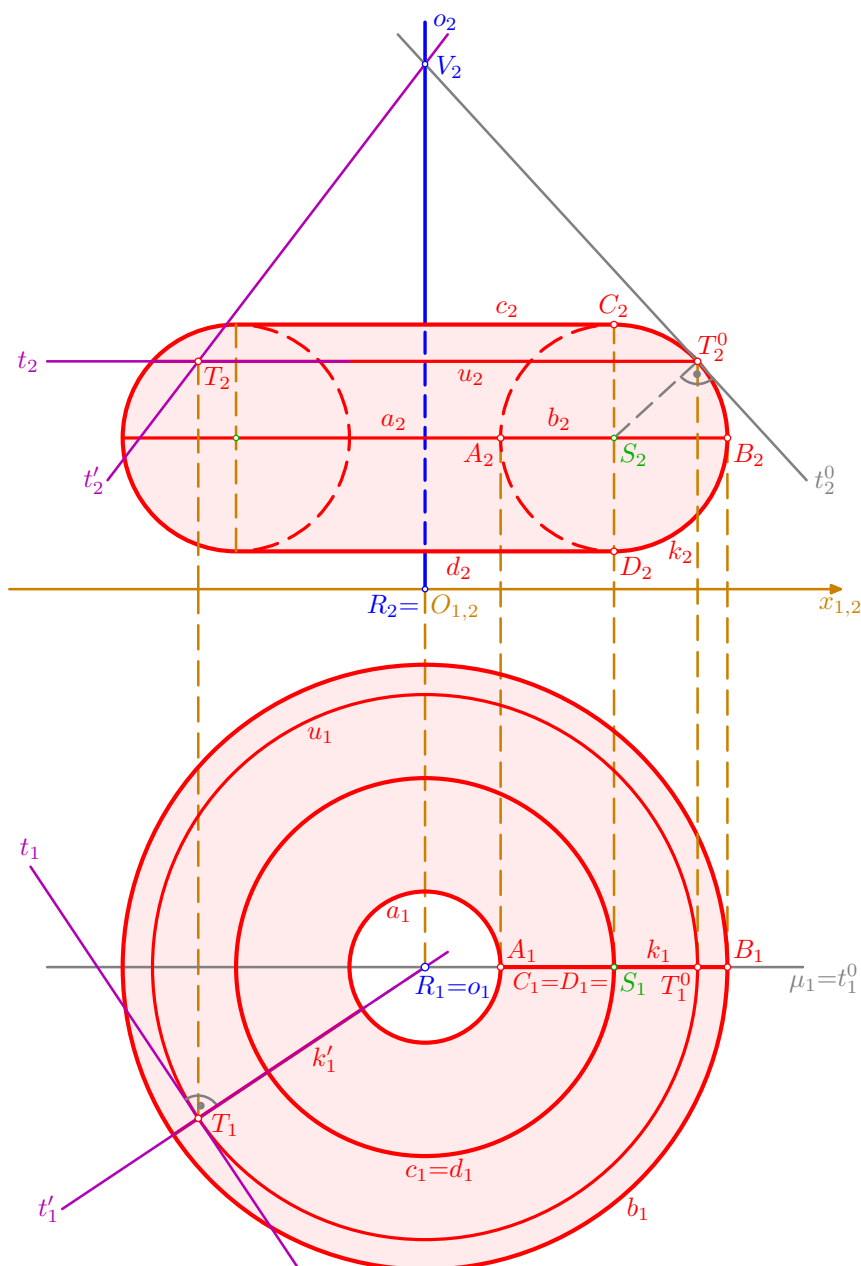
- abychom našli bod T na ploše, použijeme typickou konstrukci – otočení kolem osy o do roviny μ hlavního meridiánu: rotací bodu T vznikne rovnoběžková kružnice u plochy, která se v půdoryse jeví jako kružnice $u_1(R_1, |R_1T_1|)$; rovnoběžka u protíná danou polomeridiánovou kružnici k v bodě T^0 , pro jehož půdorys je $T_1^0 = u_1 \cap k_1$ a nárys T_2^0 najdeme na ordinále a na kružnici k_2 (podle zadání volíme tu ze dvou možností, pro kterou je $z_{T^0} = z_T > z_S$); můžeme tak doplnit úsečku u_2 , která je nárysem kružnice u , a na příslušné ordinále konečně také nárys $T_2 \in u_2$ bodu T



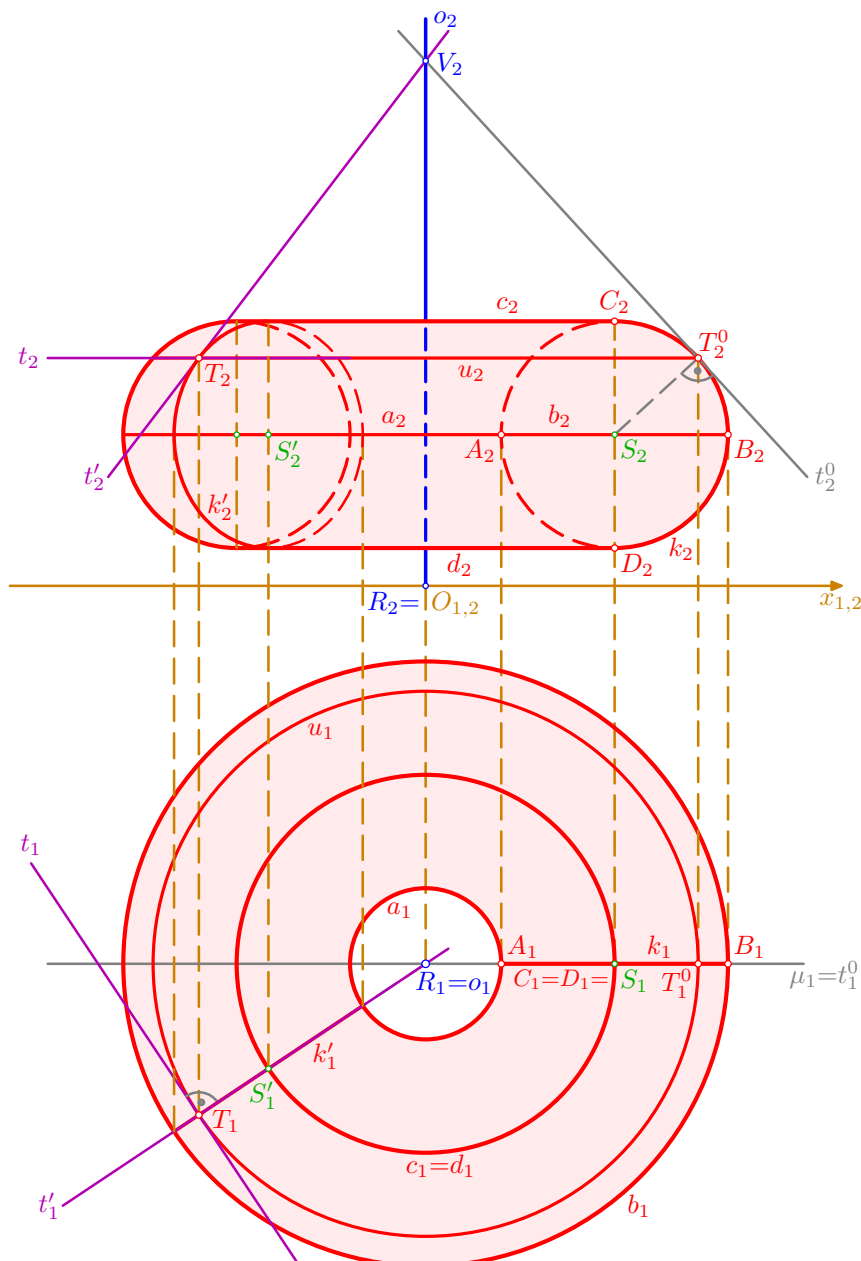
- tečnou rovinu τ v bodě T plochy určíme podle obecného principu – pomocí dvou tečen vedených bodem T ke dvěma křivkám, které leží na daném anuloidu; jako první křivku zvolme přirozeně rovnoběžkovou kružnici u a v bodě T k ní sestrojme tečnu t : pro její půdorys t_1 zřejmě platí $t_1 \perp T_1 R_1, T_1 \in t_1$, v náryse je $t_2 \parallel x_{1,2}, T_2 \in t_2$



- polorovina určená osou o a bodem T protíná plochu v polomeridiánové kružnici k' ; sestrojíme sdužené průměty tečny t' v bodě T uvažované kružnice k' : půdorysem kružnice k' , resp. tečny t' , je úsečka k'_1 , resp. přímka $t'_1 = T_1R_1$; pro sestrojení nárysu t'_2 využijeme opět otočení kolem osy o do roviny μ hlavního meridiánu – kružnice k' s bodem T se otočí do kružnice k s bodem T^0 ; v bodě T^0 sestrojíme tečnu t^0 ke kružnici k , v půdoryse je $t^0_1 = \mu_1$, v náryse se zachová $t^0_2 \perp S_2T_2, T_2 \in t^0_2$; dále využijeme průsečík $V = t^0 \cap o$, v půdoryse není označen (platí zde $V_1 = R_1 = o_1$), v náryse je $V_2 = t^0_2 \cap o_2$; bod V zůstává při rotaci na místě a hledaná tečna je tedy přímka $t' = TV$, tj. v náryse platí $t'_2 = T_2V_2$



- sestrojenými tečnami t, t' ke křivkám u, k' je určena hledaná tečná rovina τ v bodě T anuloidu; na závěr můžeme pro zajímavost doplnit nárys kružnice $k'(S', r)$, pro samotné řešení úlohy to ovšem není nezbytně nutné; kružnice k' se v náryse zobrazí jako elipsa k'_2 , která má střed v bodě S'_2 , hlavní vrcholy leží na ordinále bodu S' a na úsečkách c_2 a d_2 , vedlejší vrcholy odvodíme z půdorysu pomocí ordinál na úsečku b_2 – konstrukce je patrná z obrázku; elipsa k'_2 se navíc musí v bodě T_2 dotknout přímky t'_2



□

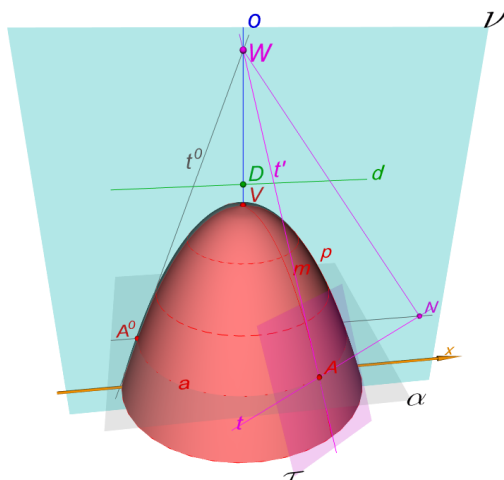
2.2. Rotační kvadriky

Výklad

- **rotační kvadrika** vznikne rotací kuželosečky kolem její osy souměrnosti
- vezmeme-li v úvahu pouze regulární kuželosečky, získáme tak šest typů ploch
 - **kulová plocha** vznikne rotací kružnice kolem kterékoliv její osy souměrnosti
 - **vejčitý (protáhlý) rotační elipsoid** vznikne rotací elipsy kolem její hlavní osy
 - **zploštělý rotační elipsoid** vznikne rotací elipsy kolem její vedlejší osy
 - **dvojdílný rotační hyperboloid** vznikne rotací hyperboly kolem její hlavní osy
 - **jednodílný (zborcený) rotační hyperboloid** vznikne rotací hyperboly kolem její vedlejší osy (může ovšem vzniknout i jinak – viz druhý příklad v této části)
 - **rotační paraboloid** vznikne rotací paraboly kolem její jediné osy souměrnosti

2.2.1. Rotační paraboloid v kolmém promítání na nárysnu

Kolmé (pravouhlé) promítání na nárysnu je téměř totéž jako Mongeovo promítání bez půdorysu; pro každý bod X v prostoru je tedy sestaven pouze jeho nárys X_2 a pro jeho jednoznačné určení je připojena do závorky tzv. **kóta**, což je orientovaná vzdálenost bodu X od náryсны, nebo, jinak řečeno, je to jeho y -ová souřadnice; kótovaný nárys bodu X je tedy označen $X_2(y_X)$; body ležící v nárysne mají nulovou kótu, a tu budeme při označení v průmětu vynechávat.

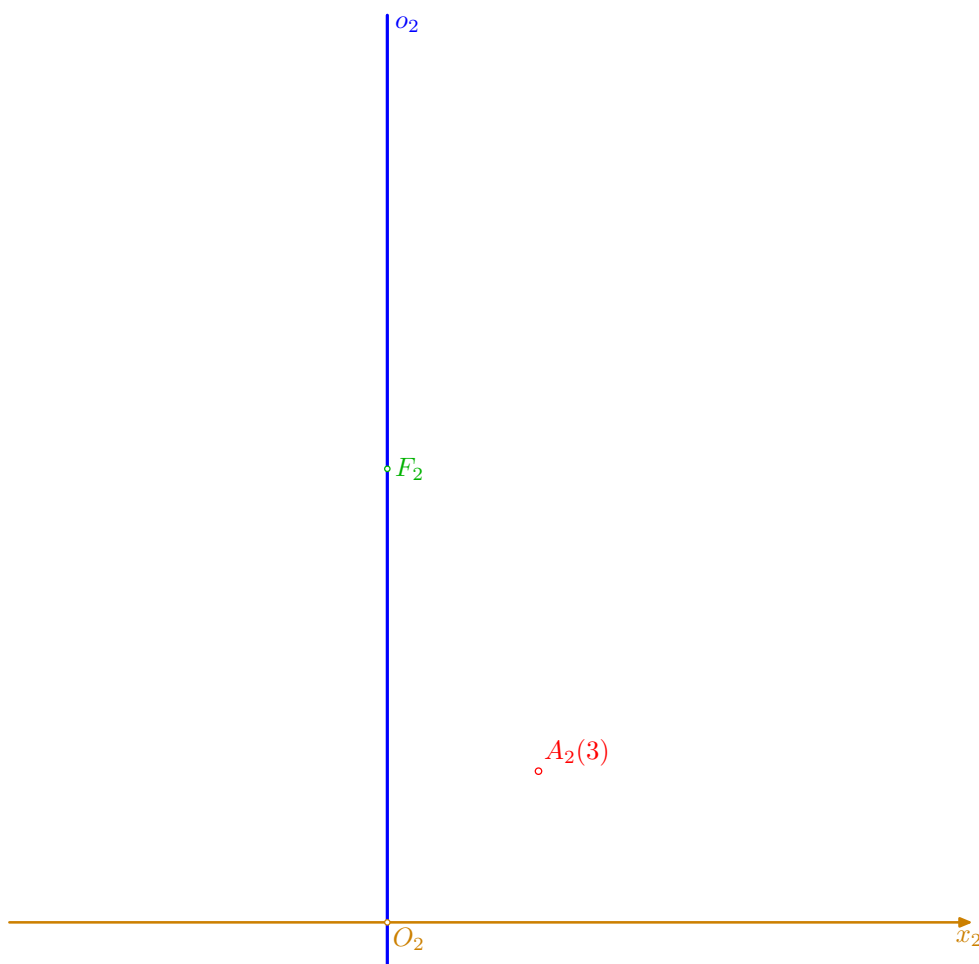


Řešené úlohy

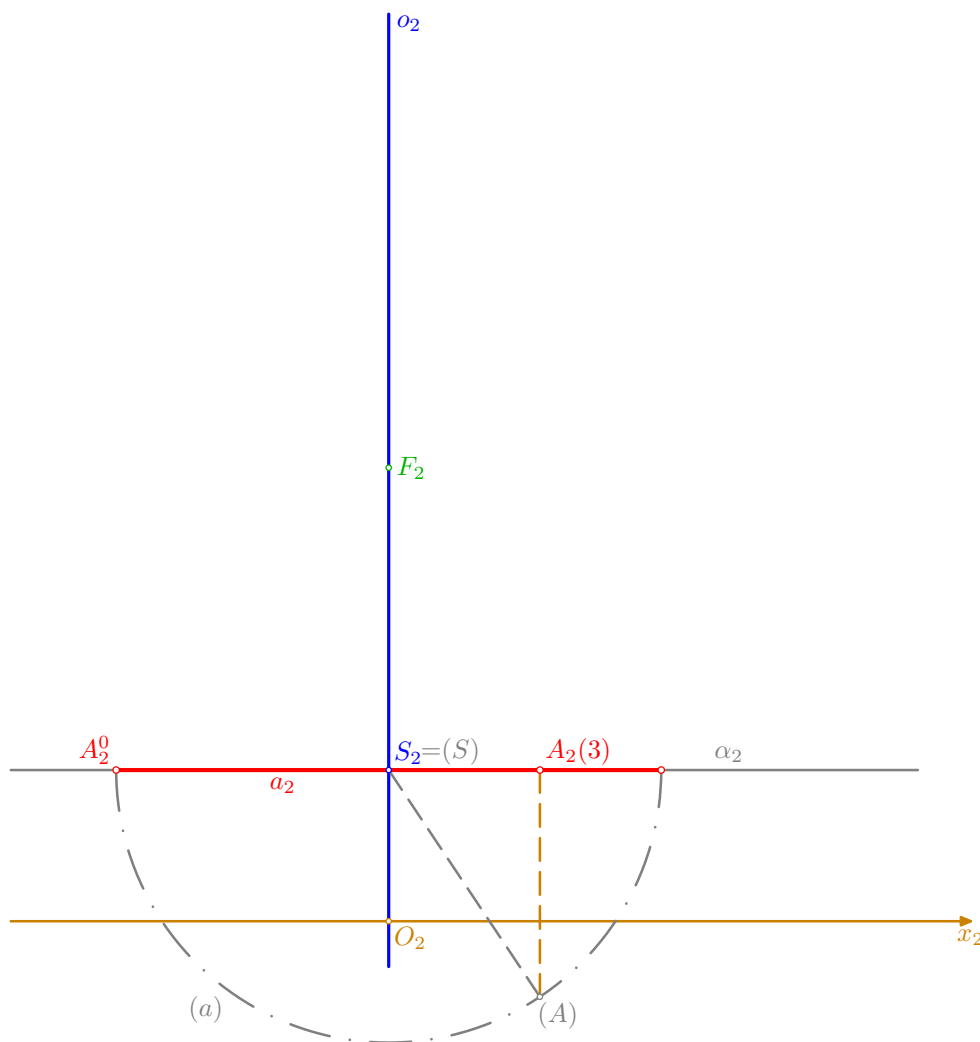


Příklad: V kolmém promítání na nárysnu sestrojte tečnou rovinu τ v bodě A rotačního paraboloidu, který má ohnisko F a svislou osu o , $F \in o$, rotace; $F[0; 0; 6]$, $A[2; 3; 2]$.

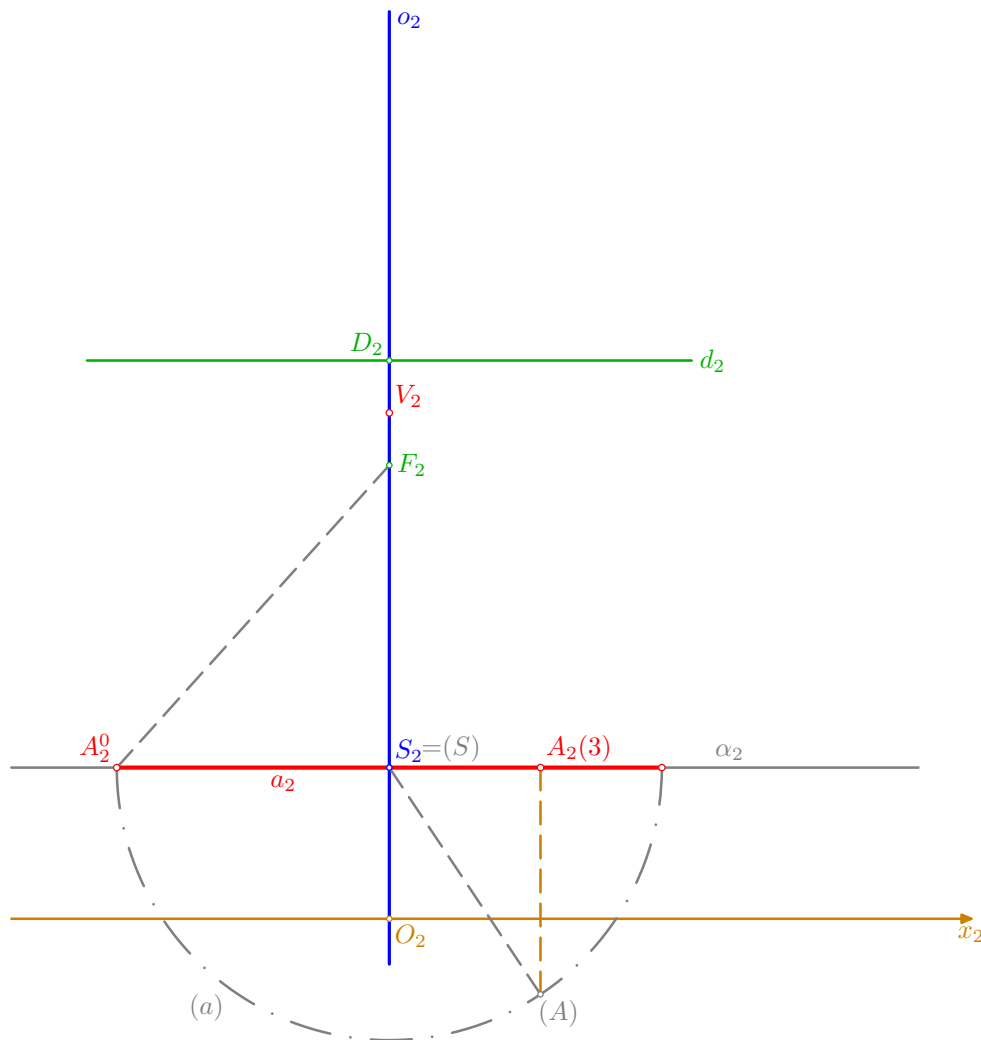
- podle zadání sestrojme nárysy F_2 , o_2 ohniska F a osy o ; ohnisko F leží v nárysně, splývá tedy se svým nárysem $F_2 = F$ a má nulovou kótu $y_F = 0$; podle výše uvedené úmluvy mu ponechme pouze označení F_2 ; pro nárys svislé osy o rotace je $o_2 \perp x_2$, $F_2 \in o_2$; jako poslední zadaný objekt doplňme kótovaný nárys $A_2(3)$ (dle zadání je totiž $y_A = 3$) bodu A , jímž má konstruovaný rotační paraboloid procházet



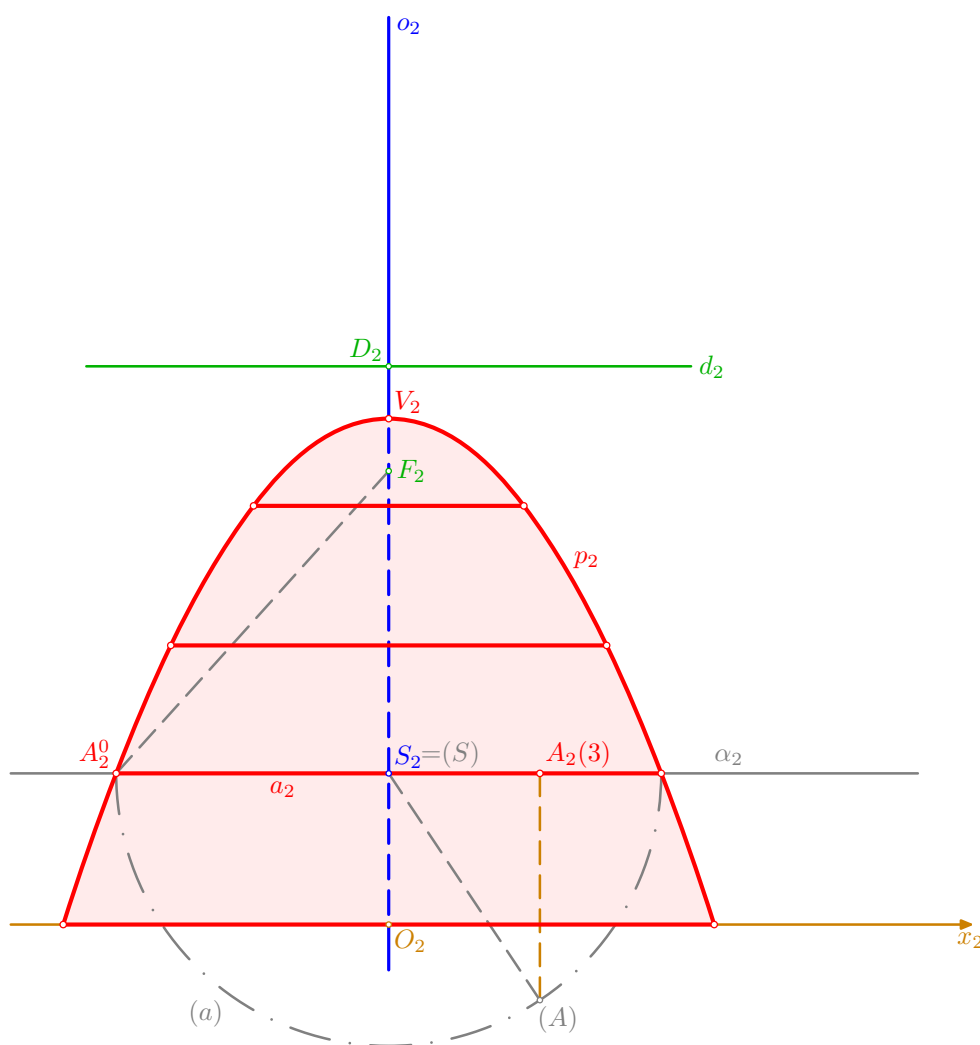
- rotací bodu A kolem osy o vznikne rovnoběžková kružnice a , která leží v rovině $\alpha \perp o$, $A \in \alpha$, má střed $S = o \perp \alpha$ a poloměr délky $|SA|$; nárysem roviny α je přímka $\alpha_2 \perp o_2$, $A_2 \in \alpha_2$, která protíná přímku o_2 v bodě S_2 ; poloměr kružnice a zjistíme ve sklopení roviny α do nárysny: sestrojme sklopenou polohu (A) bodu A , kde $(A)A_2 \perp \alpha_2$ a $|(A)A_2| = y_A = 3$, bod $S \in o$ zůstává při sklápění na místě, je tedy $S = S_2 = (S)$, a ve sklopení můžeme sestrojit část sklopené polohy (a) kružnice a ; rovnoběžka a protíná nárysnu ve dvou bodech, jeden z nich označme A^0 , v průmětu je $A_2^0 = (a) \cap \alpha_2$; nárysem kružnice a je tedy úsečka a_2 , která leží na přímce α_2 , má střed S_2 a jeden krajní bod A_2^0



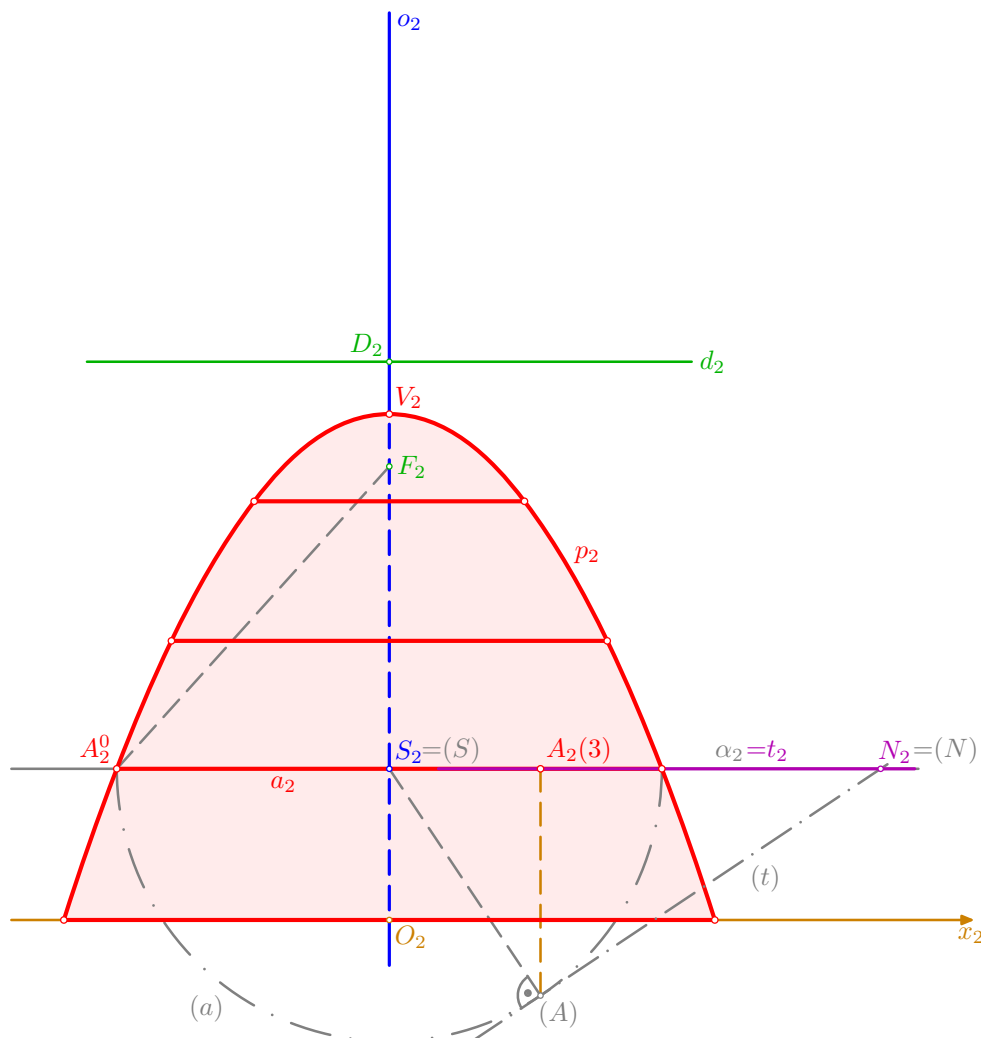
- nárysna protne daný paraboloid v parabole p , která je hlavním meridiánem plochy, má ohnisko F , osu o a prochází bodem A^0 (sestrojíme ji v dalším kroku); prozatím pouze dourčíme její řídicí přímku $d = d_2$ a vrchol $V = V_2$: podle **ohniskové definice paraboly** (viz stranu 228) platí $|F_2A_2^0| = |A_2^0d_2|$, odtud sestrojíme na ose o_2 pomocný bod D_2 , kde $|D_2S_2| = |F_2A_2^0|$ (ze dvou možností vybereme tu, pro niž bude paraboloid otevřený směrem dolů), a vedeme jím řídicí přímku $d_2 \perp o_2, D_2 \in d_2$; vrchol V_2 paraboly $p_2 = p$ je pak středem úsečky F_2D_2



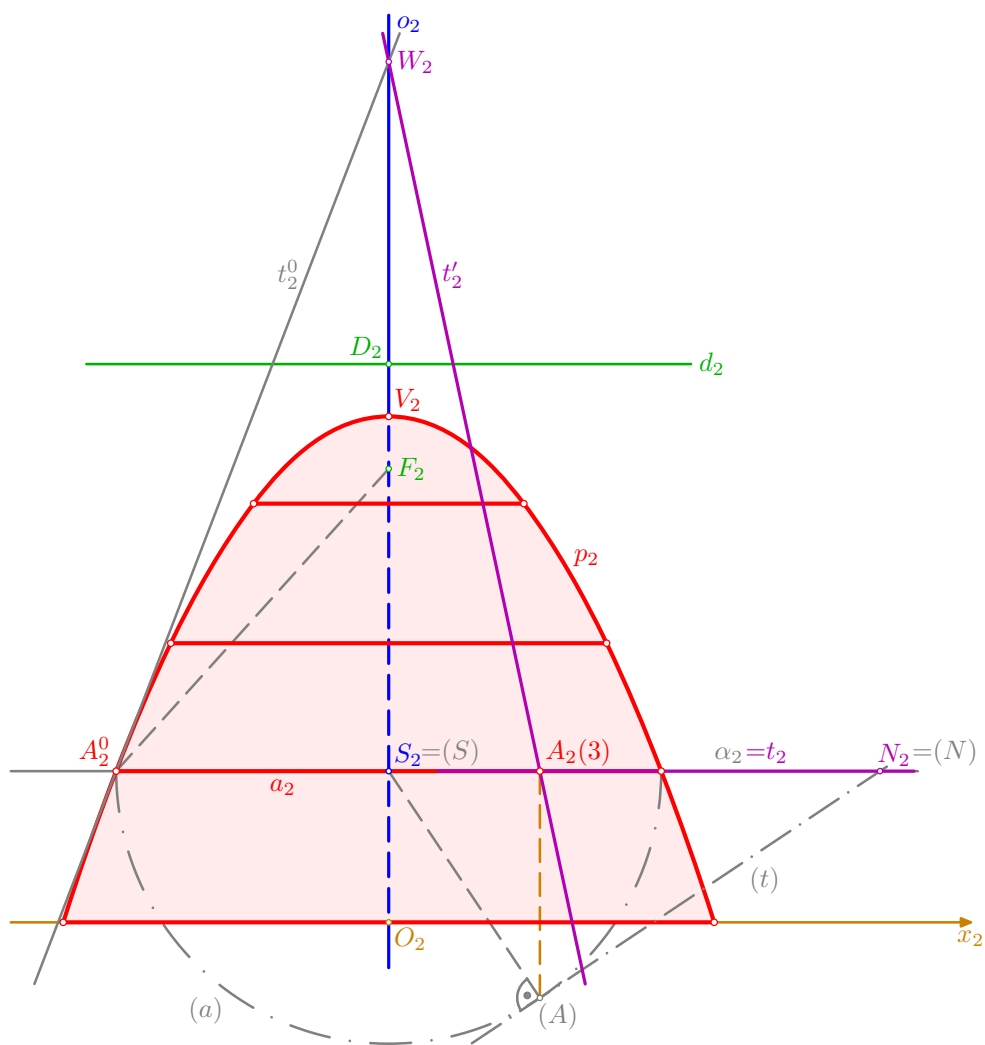
- opět podle **ohniskové definice paraboly** doplníme dalších šest bodů paraboly p_2 , vždy po dvou souměrných podle osy o_2 , dva z nich na ose x_2 , další čtyři libovolně, pokud možno, rovnoměrně mezi úsečkou a_2 a vrcholem V_2 ; rotací těchto bodů vzniknou další tři rovnoběžkové kružnice plochy, které se v náryse zobrazí jako úsečky, které jsou kolmé k přímce o_2 a mají na ní své středy; pro vyrýsování paraboly p_2 tím máme celkem devět bodů, omezíme ji osou x_2 – plochu tak omezíme zdola rovnoběžkovou kružnicí, která má střed v počátku O (jinak řečeno, která leží v půdorysně π), a příslušným způsobem opravíme viditelnost osy o



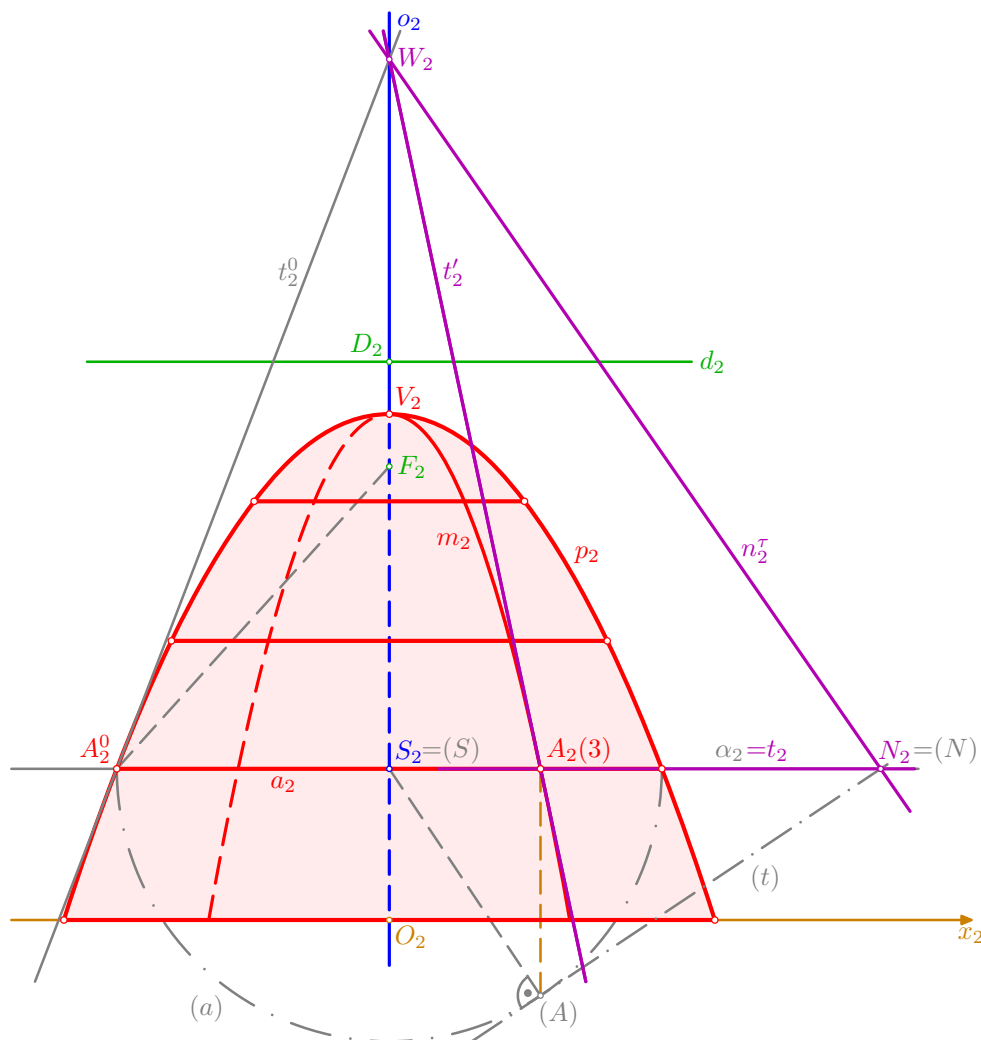
- tečnou rovinu τ v bodě A plochy určíme podle obecného principu – pomocí dvou tečen vedených bodem A ke dvěma křivkám, které leží na daném paraboloidu; jako první křivku zvolme přirozeně rovnoběžkovou kružnici a a v bodě A k ní sestrojme tečnu t : v náryse je $t_2 = \alpha_2$, ve sklopení doplňme $(t) \perp (S)(A)$, $(A) \in (t)$; díky tomu můžeme označit také nárysný stopník $N_2 = (N) = t_2 \cap (t)$ tečny t , kterým bude procházet nárysná stopa roviny τ



- rovina určená osou o a bodem A protíná plochu v meridiánové parabole m (konstrukci jejího nárysu naznačíme v následujícím závěrečném kroku postupu řešení); sestrojíme nárys tečny t' v bodě A uvažované paraboly m : při tom využijeme otočení kolem osy o do roviny hlavního meridiánu – parabola m s bodem A se otočí do paraboly p s bodem A^0 ; v bodě A_2^0 tedy sestrojíme tečnu $t_2^0 = A_2^0W_2$ k parabole p_2 , kde bod W_2 je souměrný s bodem S_2 podle vrcholu V_2 (úsečka S_2W_2 je subtangentou bodu A_2^0 a ta je podle **Věty 4** z kapitoly o parabole půlena vrcholem V_2 – viz stranu 237); bod $W \in o$ zůstává při rotaci na místě a hledaná tečna je tedy přímka $t' = AW$, tj. v náryse platí $t'_2 = A_2W_2$; bod $W = W_2$ leží v nárysně, a je to tudíž také nárysný stopník přímky t'

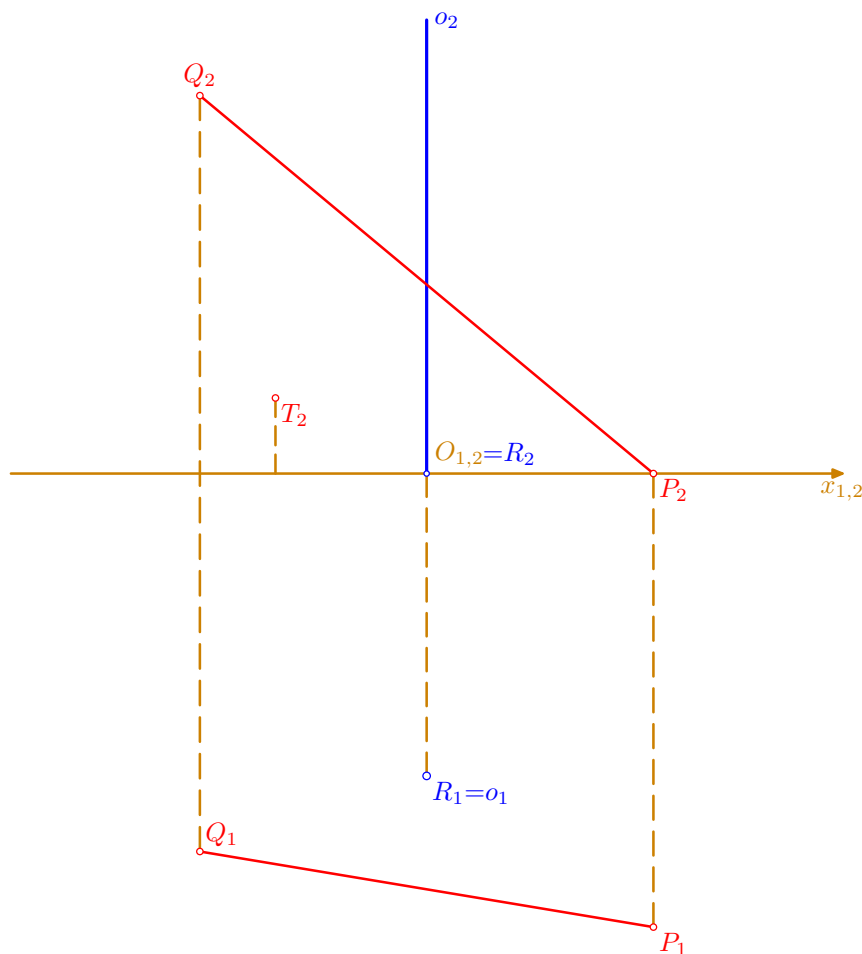


- na závěr doplníme nárysnou stopu $n_2^r = N_2W_2$ tečná roviny τ sestrojeného rotačního paraboloidu v jeho daném bodě A a pokusme se naznačit několik možných způsobů konstrukce nárysu m_2 meridiánové paraboly m ; především je nárysem paraboly m opět parabola m_2 , pro niž známe osu o_2 , vrchol V_2 a tečnu t'_2 s bodem A_2 dotyku; 1. zkusme najít ohnisko paraboly m_2 : to musí ležet na ose o_2 a na kolmici k tečně t'_2 vedené její patou na vrcholové tečně, nebo jinak půlí ohnisko součet subtangenty a subnormály bodu A_2 (Věta 5 z kapitoly o parabole, i Věta 6 by se dala použít – viz stranu 237); 2. pro konstrukci bodů paraboly m_2 můžeme použít opačný princip, než kterým jsme na začátku sestrojili bod A_2^0 ; 3. a konečně lze zužitkovat také vztah pravoúhlé osové afinity mezi parabolami p_2, m_2 , přičemž osou této afinity je přímka o_2 a odpovídají si v ní body A_2^0 a A_2 (příslušné konstrukce jsou přenechány čtenáři jako cvičení)

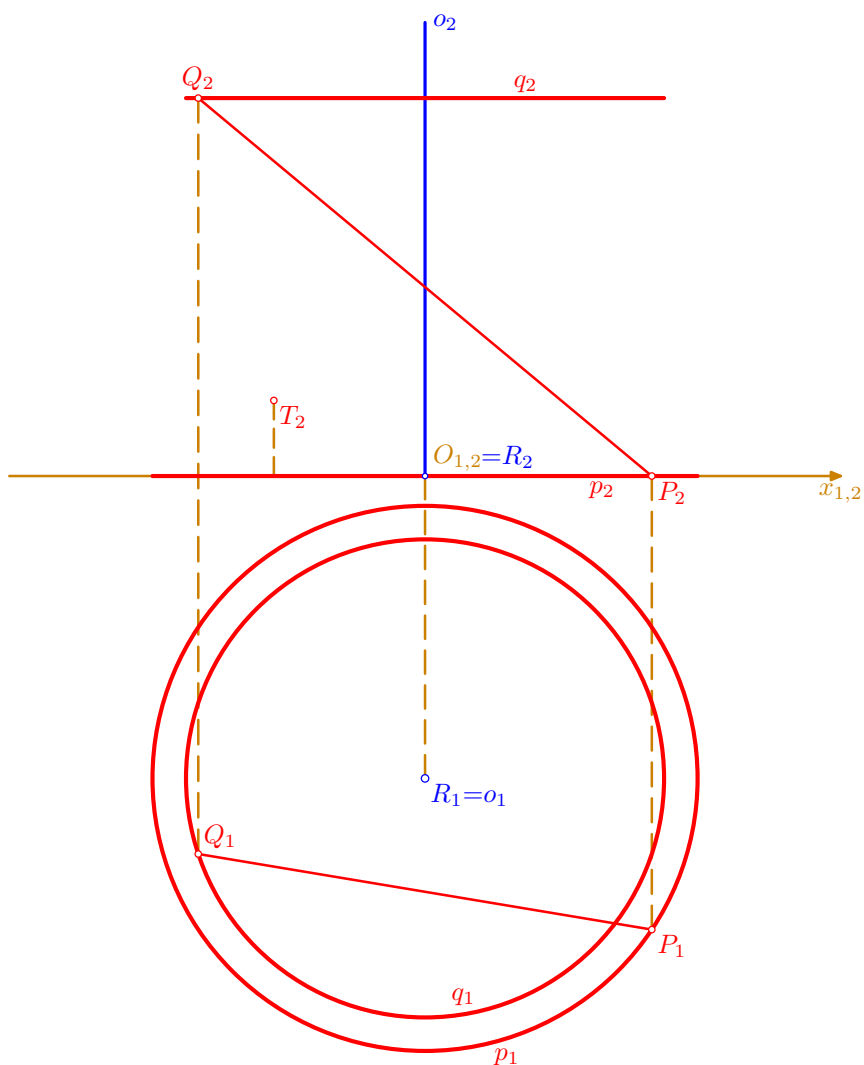


□

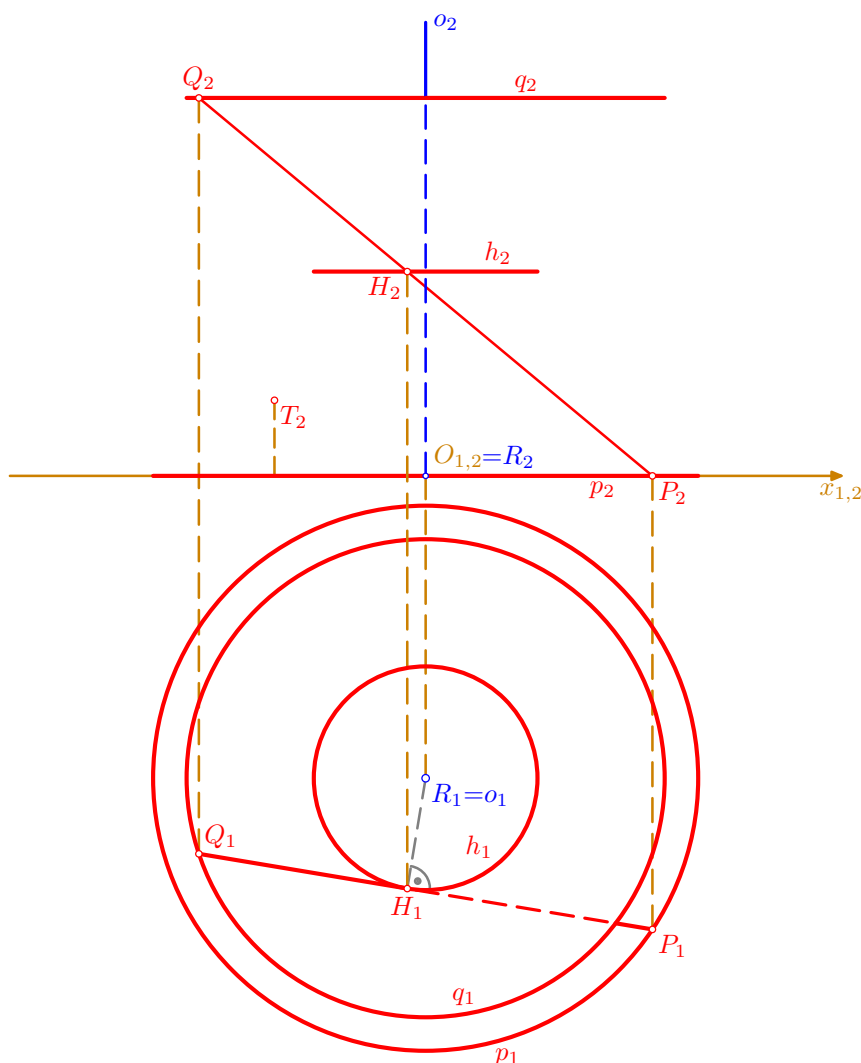
- podle zadání sestrojme sdružené průměty P_1, P_2, Q_1, Q_2 a R_1, R_2 (kde $R_2 = O_{1,2}$) daných bodů P, Q, R a zatím jen slabě vytáhněme půdorys P_1Q_1 a nárys P_2Q_2 úsečky PQ ; půdorysem osy $o \perp \pi, R \in o$, je bod $o_1 = R_1$, pro její nárys o_2 platí $o_2 \perp x_{1,2}$ a $R_2 \in o_2$; daná úsečka PQ je s osou o mimoběžná a její rotací tedy vznikne část jednodílného rotačního hyperboloidu, který patří mezi zborcené (tj. do roviny nerozvinutelné) přímkové plochy a může být vytvořen také rotací hyperboly kolem její vedlejší osy souměrnosti, k čemuž se dostaneme v závěrečném kroku řešení této úlohy; k zadání doplňme ještě nárys T_2 bodu T



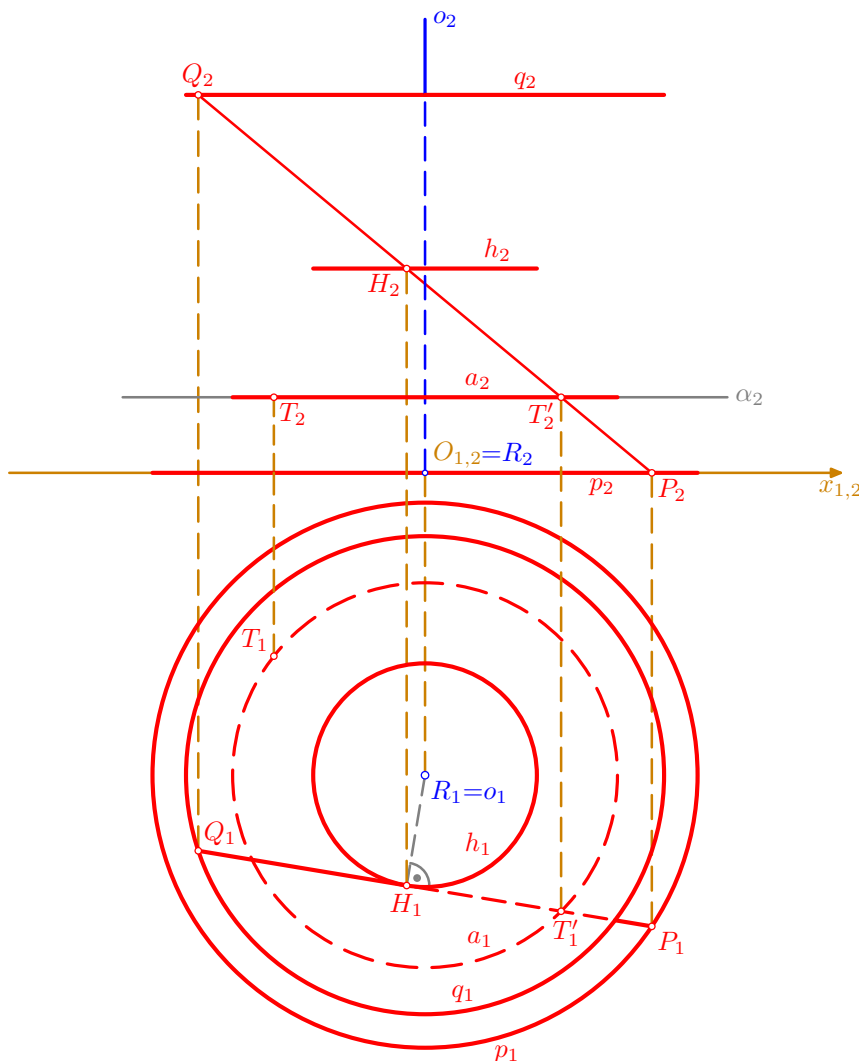
- rotací krajních bodů P, Q kolem osy o vzniknou hraniční rovnoběžkové kružnice p, q , kterými omezíme plochu zdola a shora; v půdoryse se tyto rovnoběžky zobrazí jako kružnice $p_1(R_1, |R_1P_1|)$, $q_1(R_1, |R_1Q_1|)$, jejich nárysy jsou úsečky p_2, q_2 , které jsou souměrné podle přímky o_2 , po řadě procházejí body P_2, Q_2 a mají délku $2|R_1P_1|, 2|R_1Q_1|$; konstrukci provedeme nejrychleji tímto způsobem: kolem bodu R_1 opíšeme bodem P_1 kružnici p_1 a její poloměr $|R_1P_1|$ nanese od bodu $R_2 = O_{1,2}$ na osu $x_{1,2}$, čímž získáme krajní body úsečky p_2 ; podobně postupujeme při konstrukci sdružených průmětů kružnice q , pouze si nejprve v náryse nachystáme rovnoběžku s osou $x_{1,2}$ vedenou bodem Q_2 , abychom na ní mohli od přímky o_2 nanést délku $|R_1Q_1|$ a získat tak krajní body úsečky q_2



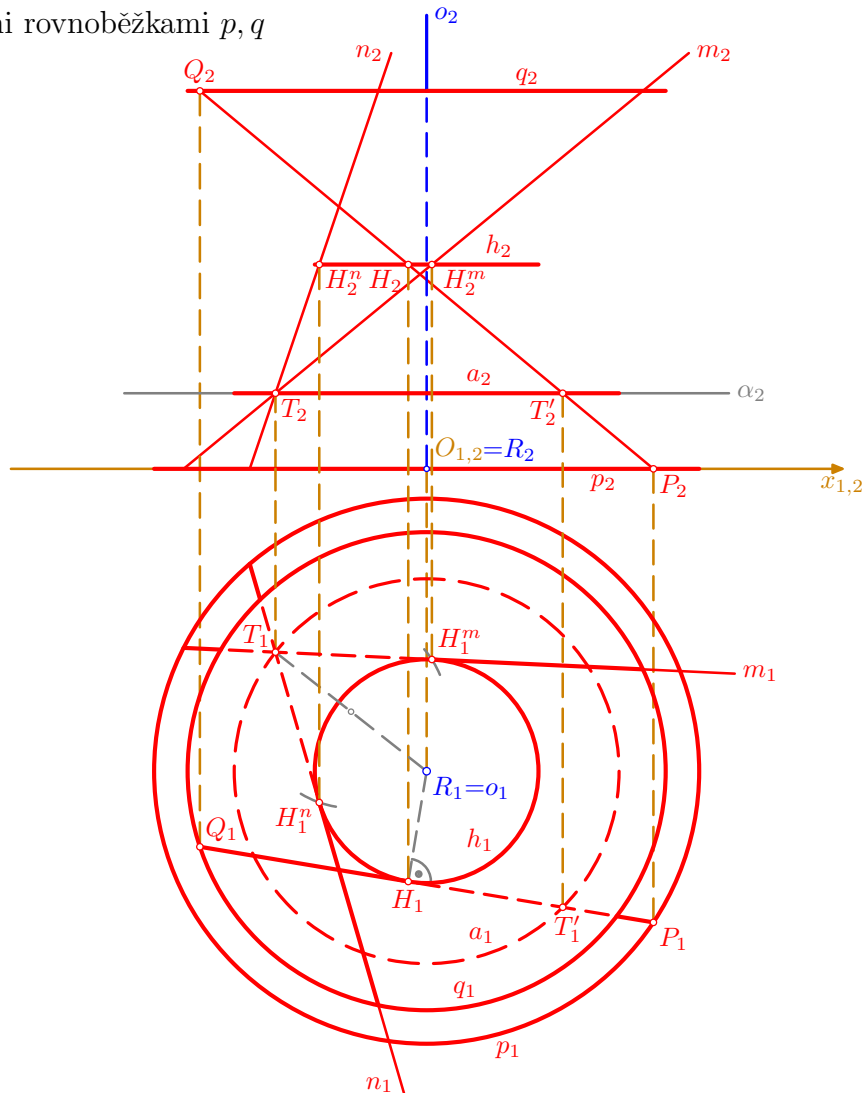
- hyperboloid omezíme ještě zevnitř tím, že na přímce PQ najdeme bod H , který je nejbližší k ose o a jehož rotací tedy vznikne **hrdelní** rovnoběžková kružnice h plochy; vlastně to znamená sestrojít osu (dříve nazývanou nejkratší příčka) mimoběžek o a PQ ; díky tomu, že platí $o \perp \pi$ a $o_1 = R_1$, je konstrukce v průmětech jednoduchá: stačí bodem R_1 spustit kolmici na přímku P_1Q_1 , a její pata je půdorysem H_1 hledaného bodu H ; jeho nárys H_2 najdeme na ordinále a na nárysu P_2Q_2 úsečky PQ ; v půdoryse ještě doplníme kružnici $h_1(R_1, |R_1H_1|)$, která je půdorysem zmíněné hrdelní rovnoběžky h ; nárysem kružnice h je opět úsečka h_2 , která je rovnoběžná s osou $x_{1,2}$, prochází bodem H_2 , má střed na přímce o_2 a její délka je rovna průměru $2|R_1H_1|$ kružnice h_1 ; na závěr tohoto kroku poznamenejme, že střed S hrdla h je současně středem celého hyperboloidu (v obrázku nejsou sdružené průměty bodu S označeny ani popsány)



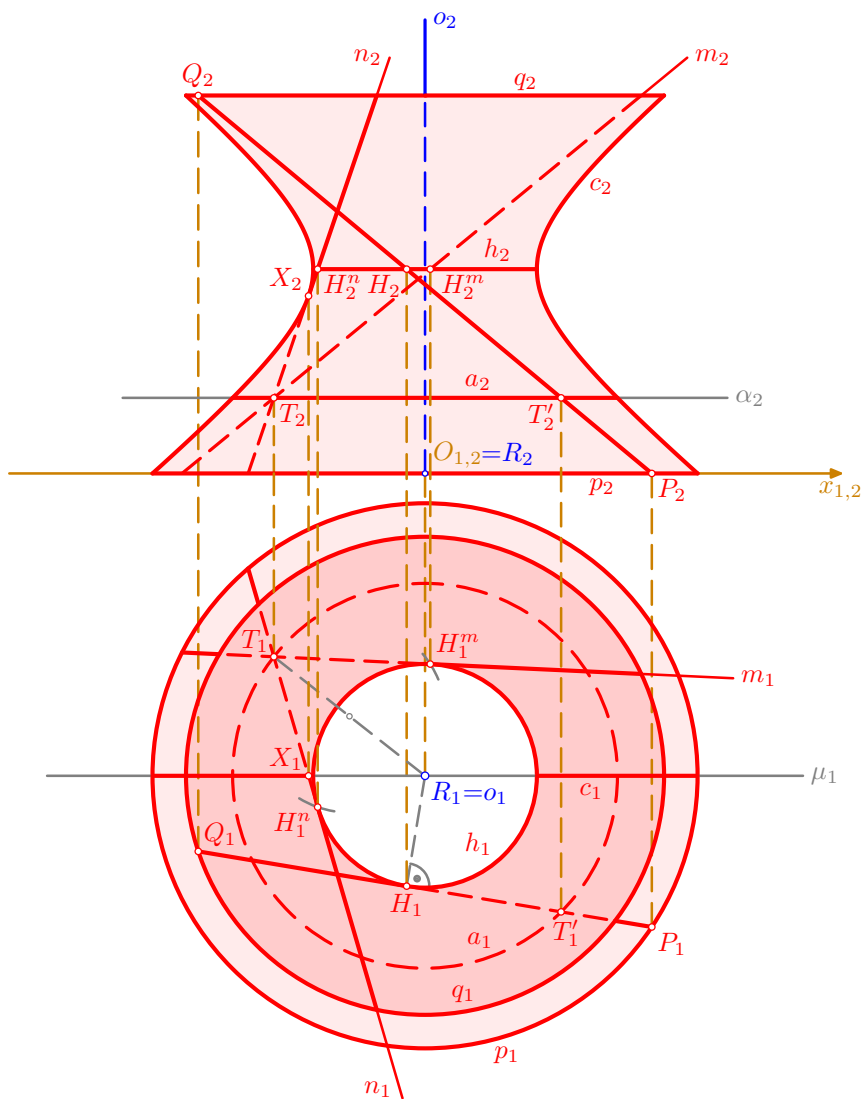
- mezikruží ohraničené kružnicemi p_1, q_1 je půdorysem jakéhosi úpatí plochy, a při pohledu shora vidíme vnější stranu této části hyperboloidu; naopak mezikruží mezi kružnicemi q_1, h_1 je půdorysem jícnu plochy, kde vidíme její vnitřní stranu (není na škodu rozlišit obě strany plochy barevně, což bude provedeno v závěrečném kroku konstrukce); odtud vyplývá také vytažení viditelnosti půdorysu P_1Q_1 úsečky PQ ; najdeme bod T na ploše: přímka $\alpha_2 \parallel x_{1,2}, T_2 \in \alpha_2$, je nárysem roviny $\alpha \perp o$, která protíná úsečku PQ v bodě T' (v náryse je $T'_2 = \alpha_2 \cap P_2Q_2$, půdorys T'_1 leží na ordinále a na P_1Q_1), jehož rotací kolem osy o vznikne rovnoběžková kružnice a (půdorysem je kružnice $a_1(R_1, |R_1T'_1|)$, nárysem úsečka a_2 na α_2), na níž musí ležet také bod T ; ordinála vedená bodem T_2 protíná kružnici a_1 ve dvou bodech, z nichž podle zadání ($y_T < y_R$) vybereme a označíme T_1 ten, který leží blíže k ose $x_{1,2}$; viditelnost kružnice a v půdoryse je zřejmá z předchozího výkladu



- tečná rovina τ v bodě T zborceného hyperboloidu je určena dvěma přímkami m, n různých regulů plochy, přičemž přímka m vznikne rotací přímky PQ kolem osy o a přímka n je s přímkou m souměrná podle meridiánové roviny určené osou o a bodem T ; půdorysem rotačního pohybu kolem osy o je zřejmě otáčení kolem bodu $o_1 = R_1$ a úsečka P_1Q_1 je při tomto otáčení stále tečnou kružnice h_1 ; půdorys m_1 přímky m je tedy tečnou ke kružnici h_1 vedenou bodem T_1 ; podobně je půdorys n_1 přímky n druhého regulu tečnou kružnice h_1 souměrnou s m_1 podle přímky R_1T_1 ; příslušné body dotyku označme H_1^m, H_1^n – jsou to půdorysy průsečíků H^m, H^n přímek m, n s hrdlem h , a jejich nárysy H_2^m, H_2^n najdeme pomocí ordinál na úsečce h_2 ; nárysy $m_2 = T_2H_2^m, n_2 = T_2H_2^n$ přímek m, n nebudeme vytahovat příliš silně, jejich viditelnost v náryse stanovíme až v následujícím kroku; čtenář si může pro zajímavost zkusit najít sdružené průměty průsečíků přímek m, n s hraničními rovnoběžkami p, q



- viditelnost přímek m, n v půdoryse byla stanovena již v předchozím kroku podobně jako viditelnost úsečky PQ ; v náryse je vidět přední polovina plochy, která leží před rovinou $\mu \parallel \nu, o \in \mu$, hlavního meridiánu; tímto hlavním meridiánem je část hyperboly c , jejím půdorysem c_1 jsou dvě úsečky, které leží na přímce μ_1 a současně v mezikruží ohraničeném kružnicemi h_1, p_1 ; nárys c_2 hyperboly c prochází krajními body úseček p_2, a_2, h_2, q_2 , přičemž krajní body nárysu h_2 hrdla h jsou vrcholy hyperboly c_2 ; z půdorysu je vidět, že úsečka PQ , resp. úsečka na přímce m , leží před, resp. za, rovinou μ , a tudíž bude v náryse vytažena plně, resp. čárkovaně; viditelnost přímky n v náryse stanovíme pomocí průsečíku $X = n \cap \mu$, kde $X_1 = n_1 \cap \mu_1$ a nárys X_2 odvodíme po ordinále na přímce n_2 , která se v bodě X_2 dotýká hyperboly c_2 ; tím je úloha vyřešena



□

3. Průniky ploch a těles

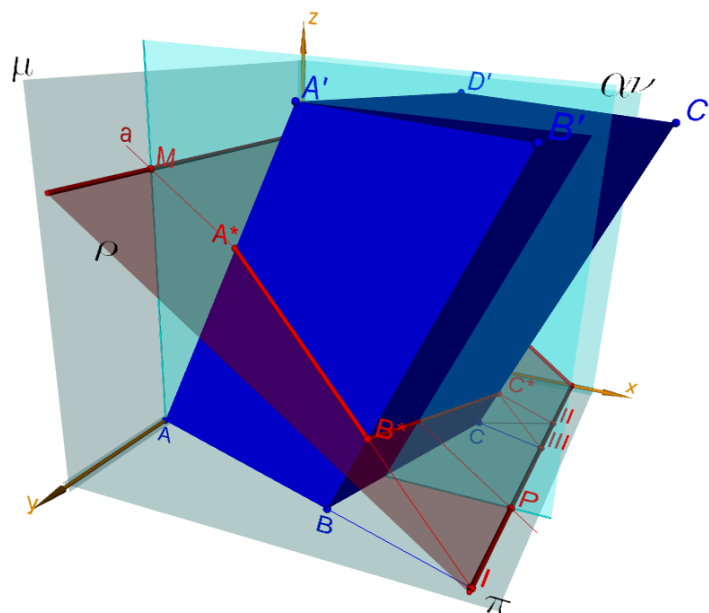
- v následujících úlohách využijeme některé zkušenosti z předchozích kapitol, konkrétní odkazy jsou uvedeny přímo v textu

3.1. Rovinné řezy ploch a těles

- první tři příklady v této podkapitole slouží současně k procvičení užití pravoúhlé axonometrie

3.1.1. Řez kosého čtyřbokého hranolu v pravoúhlé axonometrii

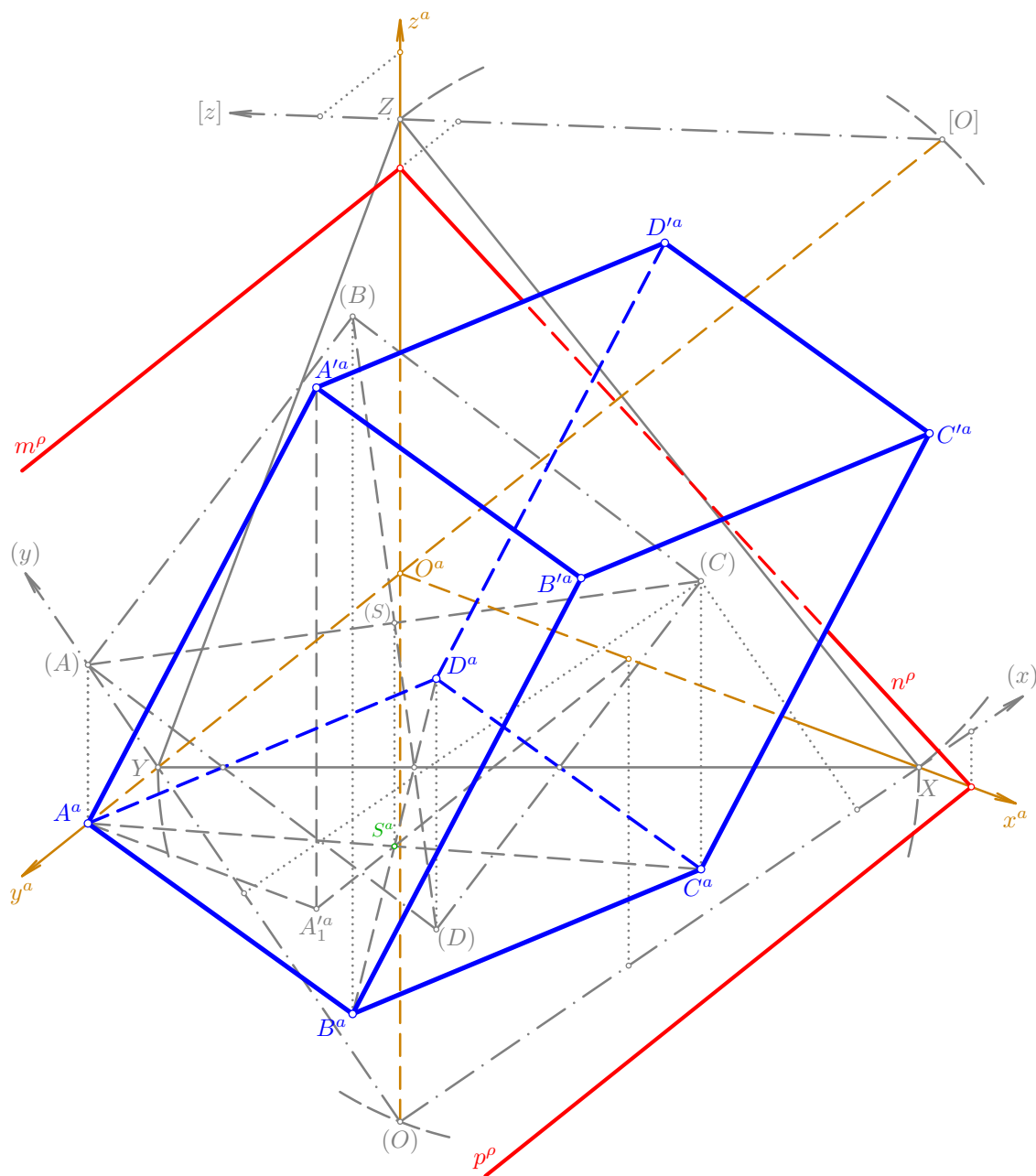
- při řešení úlohy lze použít vlastnosti prostorové osové afinity mezi dvěma rovinami, příslušný výklad je uveden ve sbírce Základy geometrie



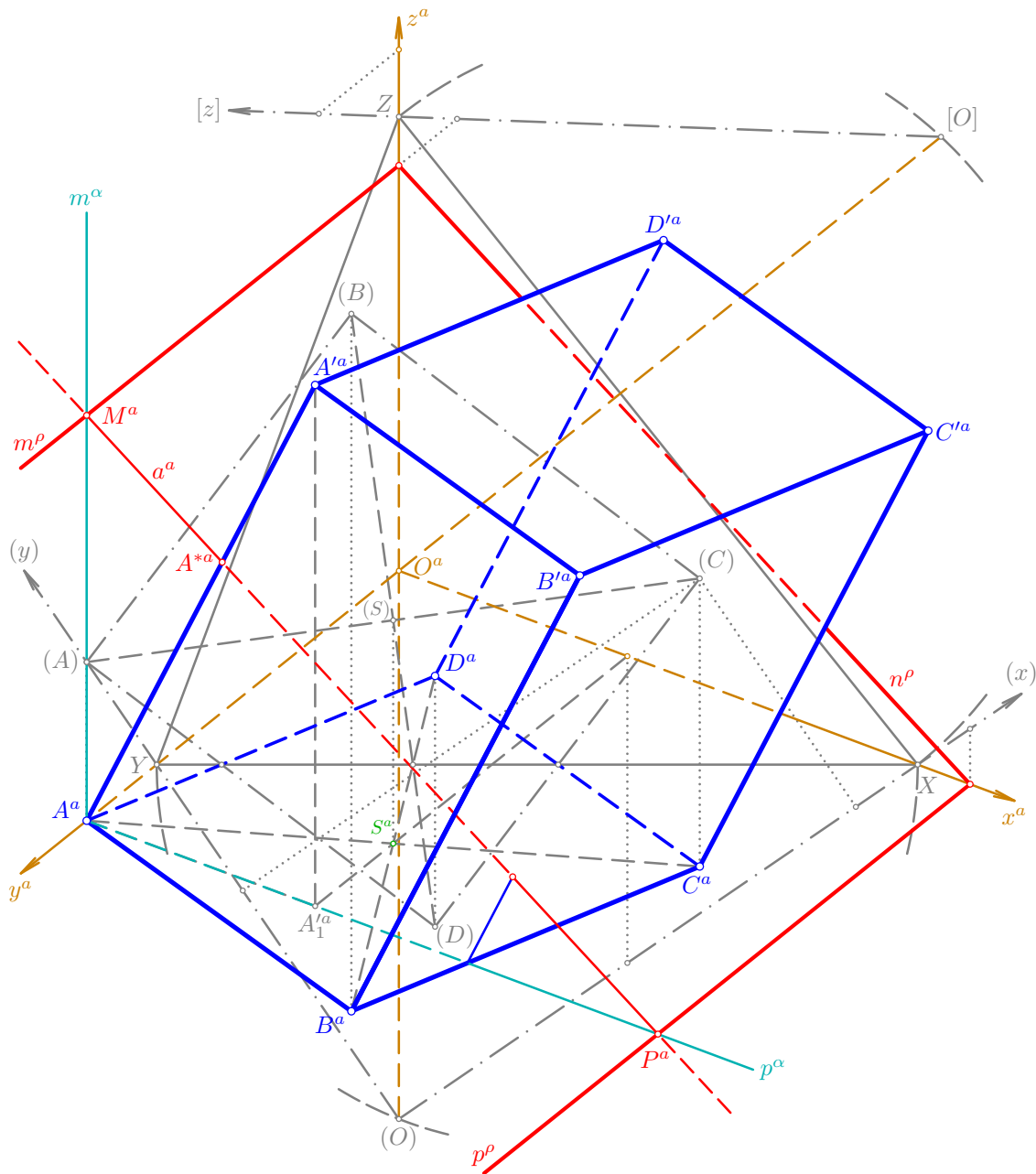
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé axonometrii $\Delta(11; 10; 12)$ sestrojte řez kosého čtyřbokého hranolu $ABCD A' B' C' D'$ rovinou ρ ; daný hranol má jednu čtvercovou podstavu s úhlopříčkou AC v půdorysně π a druhá podstava má vrchol A' ; $A[0; 8; 0]$, $C[8; 4; 0]$, $A'[4; 8; 9]$, $\rho(10; \infty; 7)$.

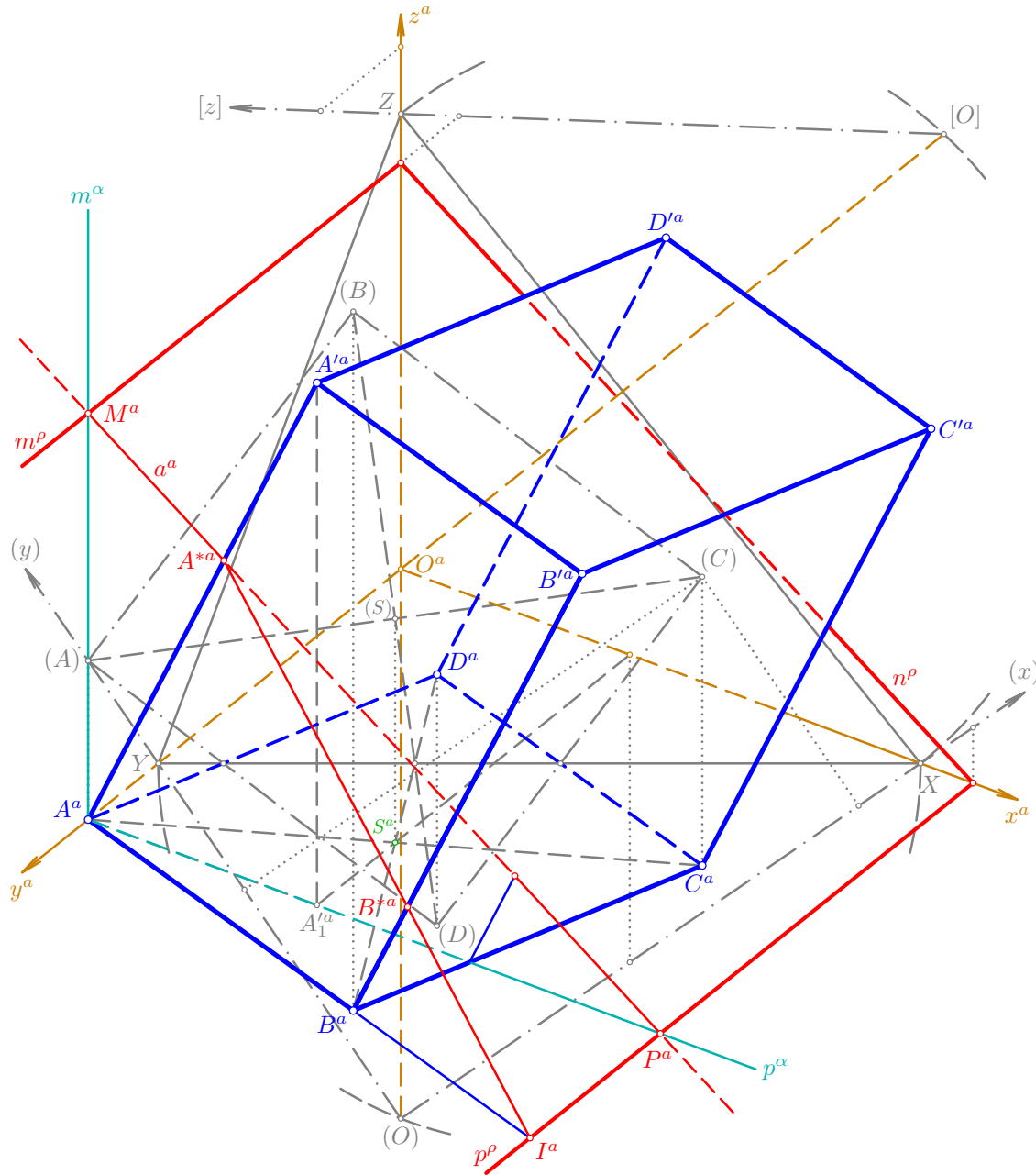
- zadání úlohy popíšeme pouze stručně, jednotlivé dílčí úlohy byly blíže popsány v kapitole **Pravoúhlá axonometrie**: v otočení půdorysny do axonometrické průmětny sestrojme čtverec $(A)(B)(C)(D)$, který je dán úhlopříčkou $(A)(C)$, a vraťme zpět do průmětu, přičemž lze využít pravoúhlou osovou afinitu; dále sestrojme axonometrický půdorys A_1^{a} a průmět A'^a vrcholu A' a doplňme průmět celého hranolu; k zadání patří ještě konstrukce stop rezné roviny ρ , která je rovnoběžná s osou y , což se zachová také pro její půdorysnou a bokorysnou stopu, tj. $p^\rho \parallel m^\rho \parallel y$



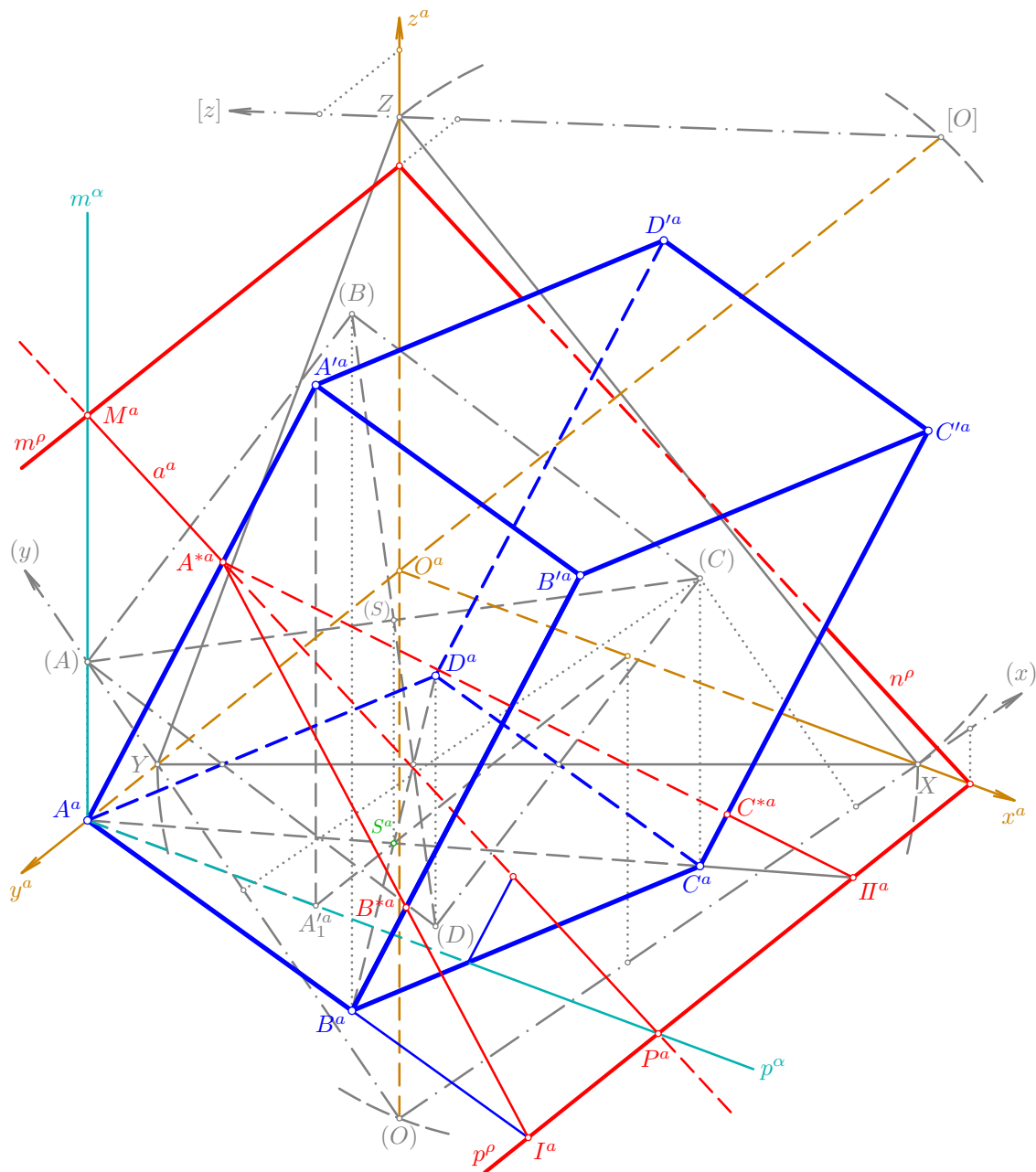
- najdeme první vrchol řezu (prováděné konstrukce budou popisovány v prostoru, jejich realizace v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků): boční hranou AA' vedeme rovinu $\alpha = AA'A'_1$, která je kolmá k π (dokonce je $\alpha \parallel \nu$) a pro její stopy platí $p^\alpha = AA'_1$, $m^\alpha \parallel z$, $A \in m^\alpha$; sestrojíme průsečnici $a = \alpha \cap \rho = PM$, kde $P = p^\alpha \cap p^\rho$ a $M = m^\alpha \cap m^\rho$, a označme A^* její průsečík s hranou AA' ; tento bod A^* je prvním vrcholem hledaného řezu; zvědavý čtenář si může jako cvičení promyslet konstrukci průsečíku přímky a s rovinou boční stěny $BCC'B'$...



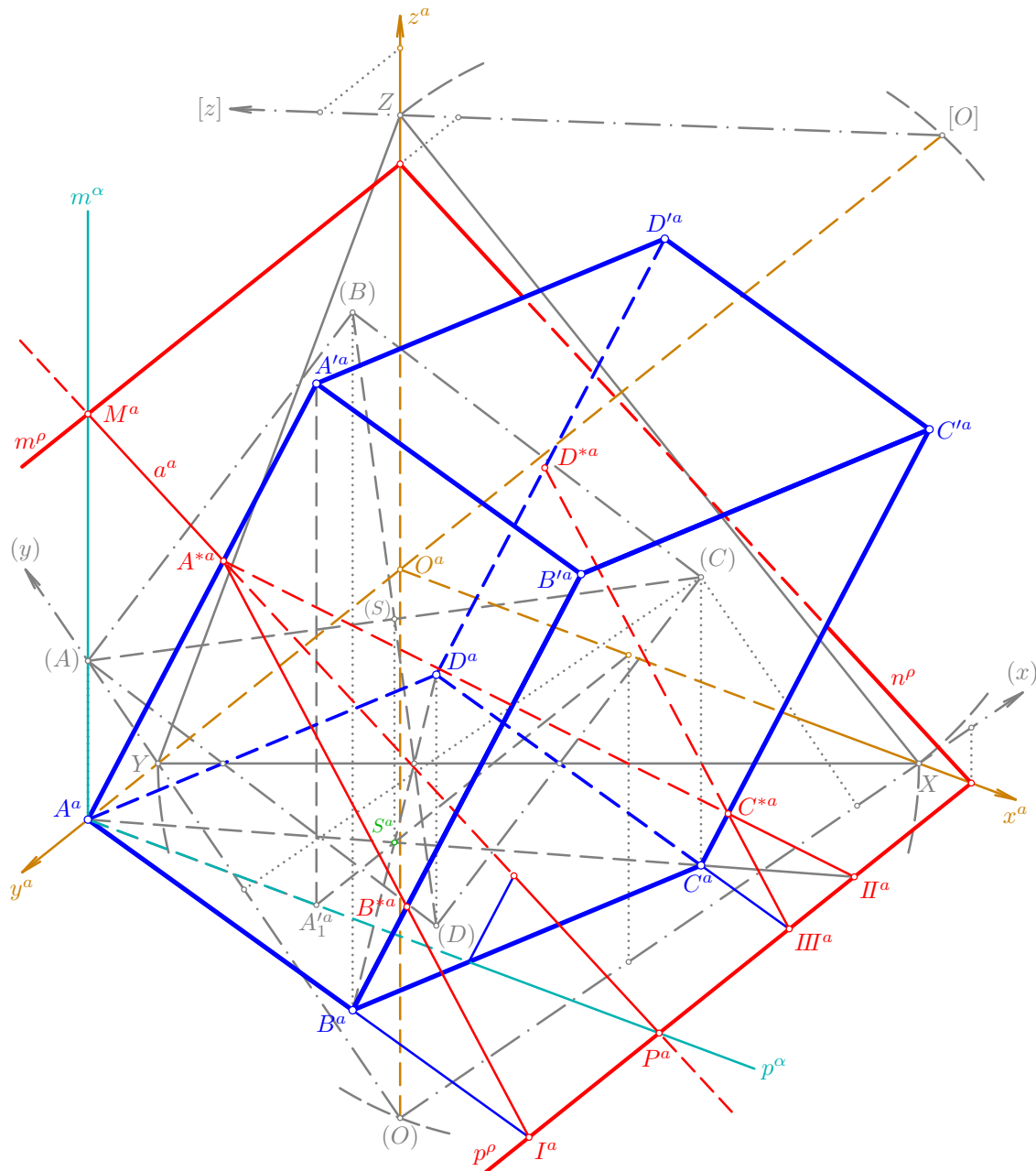
- pro další vrchol B^* řezu platí $B^* = BB' \cap IA^*$, přičemž $I = AB \cap p^\rho$; jinak řečeno, přímka AB je půdorysnou stopou roviny boční stěny $ABB'A'$ a přímka IA^* je pak průsečnicí roviny ρ řezu s rovinou této stěny



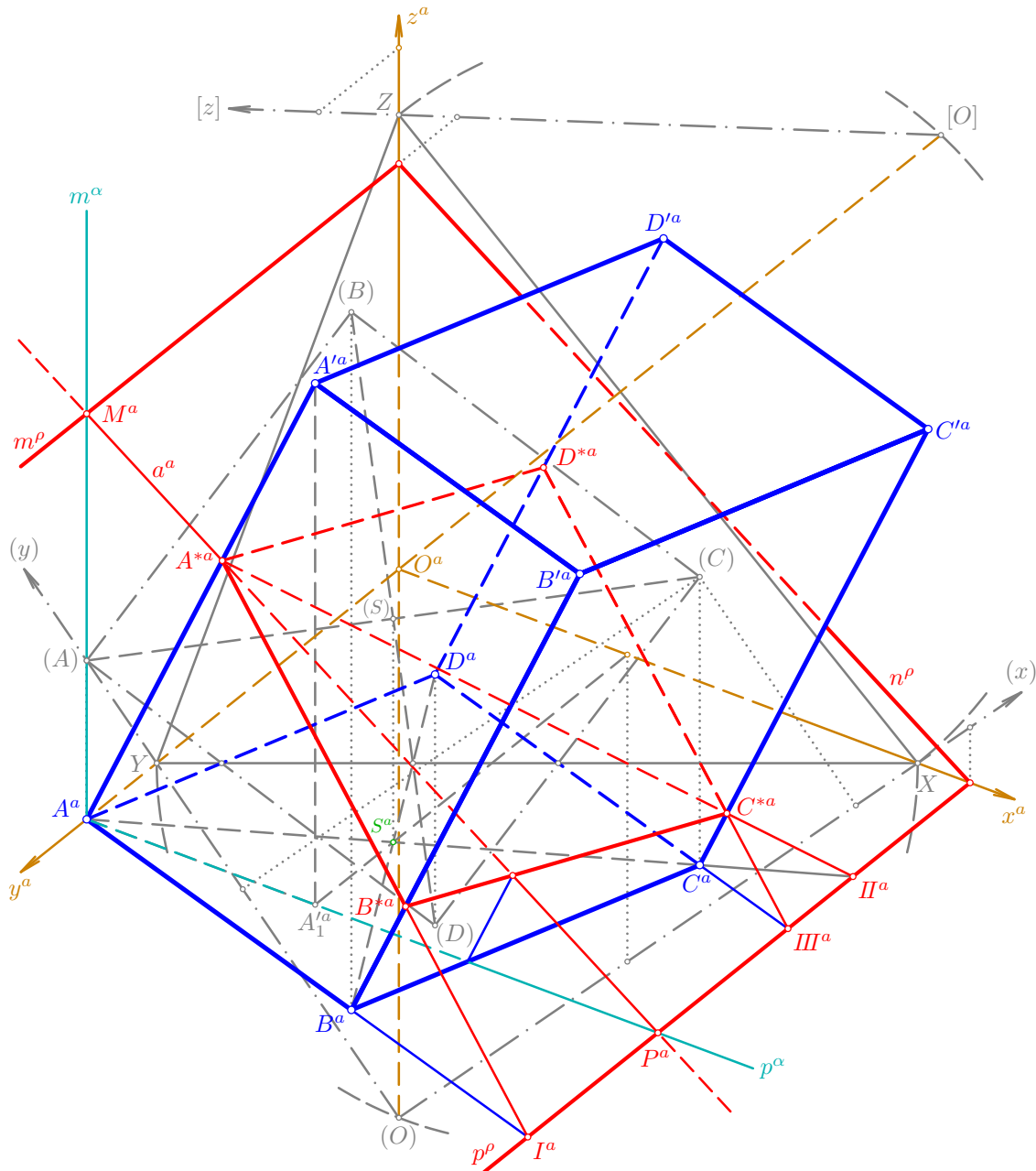
- podobně sestrojíme průsečík II přímky AC se stopou p^ρ a následně průsečnici IIA^* roviny ρ s rovinou ACC' ; přímka IIA^* pak protíná hranu CC' v dalším vrcholu C^* hledaného řezu



- poslední vrchol D^* řezu na hraně DD' můžeme doplnit už jen na základě rovnoběžnosti, $D^*C^* \parallel A^*B^*$, nebo použijeme analogický postup jako v předchozích krocích – přímka CD protíná půdorysnou stopu p^ρ v bodě III a bod D^* je průsečíkem přímky $IIIC^*$ s boční hranou DD'



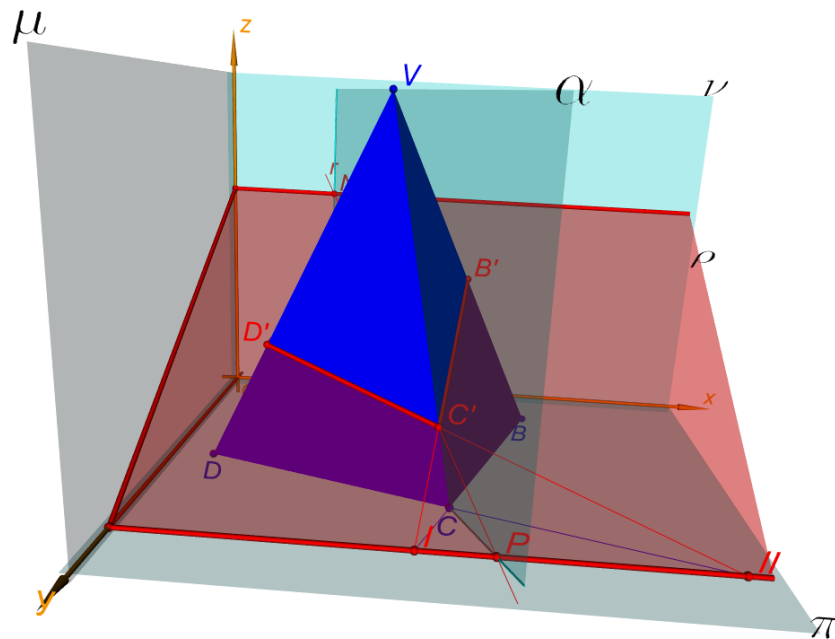
- na závěr doplníme zbývající strany A^*D^* , B^*C^* řezu, kterým je rovnoběžník $A^*B^*C^*D^*$; mezi podstavným čtvercem $ABCD$ a sestrojeným rovnoběžníkem řezu je vztah prostorové osové afinity mezi rovinami π a ρ , její osou je půdorysná stopa p^ρ , na které leží samodružné body I, II, III , a směr udává některá boční hrana daného hranolu; pravouhlým průmětem zmíněné afinity do axonometrické průmětny dostáváme osovou afinitu v rovině, jejíž osou je průmět stopy p^ρ a směr je dán přímkou $A^aA'^a$



□

3.1.2. Řez pravidelného čtyřbokého jehlanu v pravoúhlé axonometrii

- při řešení této úlohy lze použít vlastnosti prostorové středové kolineace mezi dvěma rovinami, příslušný výklad je uveden ve sbírce Základy geometrie

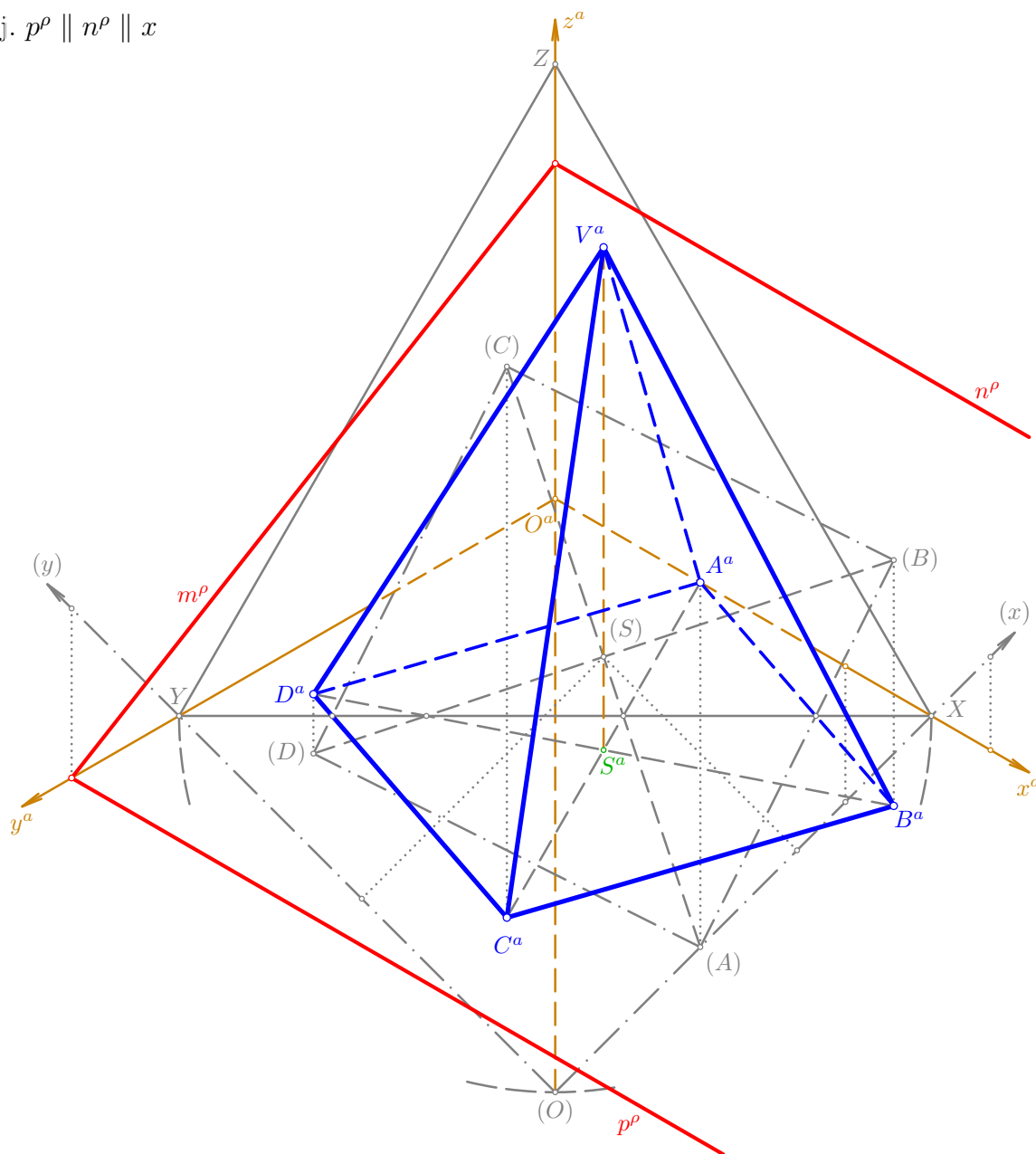


Řešené úlohy

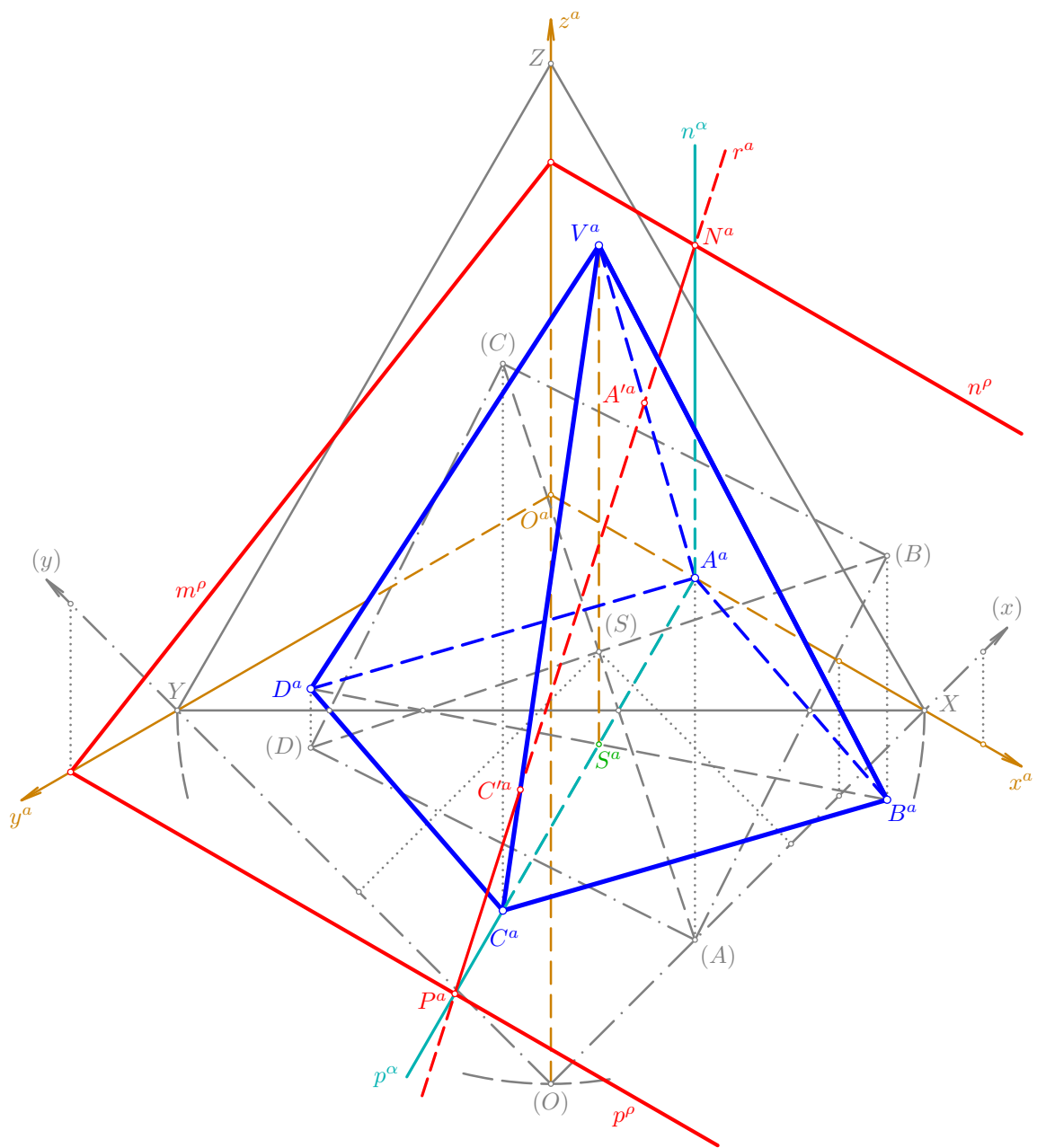
Příklad: V pravoúhlé izometrii $\Delta(11; 11; 11)$ sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ρ ; daný jehlan má čtvercovou podstavu o středu S a vrcholu A v půdorysně π a výšku v ; $A[3; 0; 0]$, $S[5; 4; 0]$, $v = 9$, $\rho(\infty; 10; 6)$.



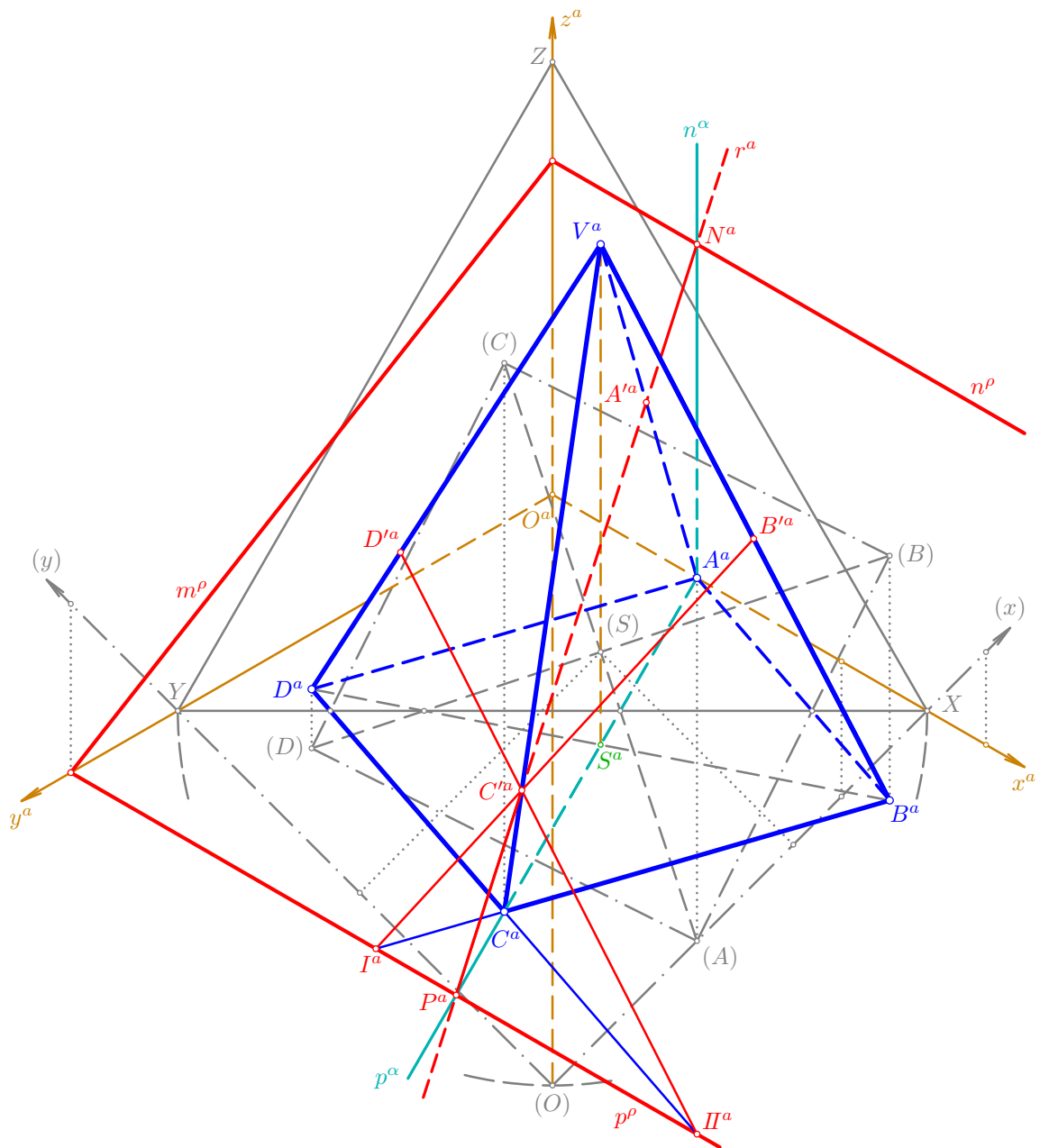
- zadání úlohy popíšeme pouze stručně, jednotlivé dílčí úlohy byly blíže popsány v kapitole **Pravouhlá axonometrie**: v otočení půdorysny do axonometrické průmětny sestrojme čtverec $(A)(B)(C)(D)$, který je dán středem (S) a vrcholem (A) , a vraťme zpět do průmětu, přičemž lze využít pravouhlou osovou afinitu; dále doplníme axonometrický průmět V^a hlavního vrcholu V , který leží ve výšce $v = 9$ nad středem S podstavy (axonometrické zkrácení ve směru průmětu osy z můžeme v izometrii určovat např. jako zkrácení ve směru průmětu osy x); k zadání patří ještě konstrukce stop řezné roviny ρ , která je rovnoběžná s osou x , což se zachová také pro její půdorysnou a nárysnou stopu, tj. $p^\rho \parallel n^\rho \parallel x$



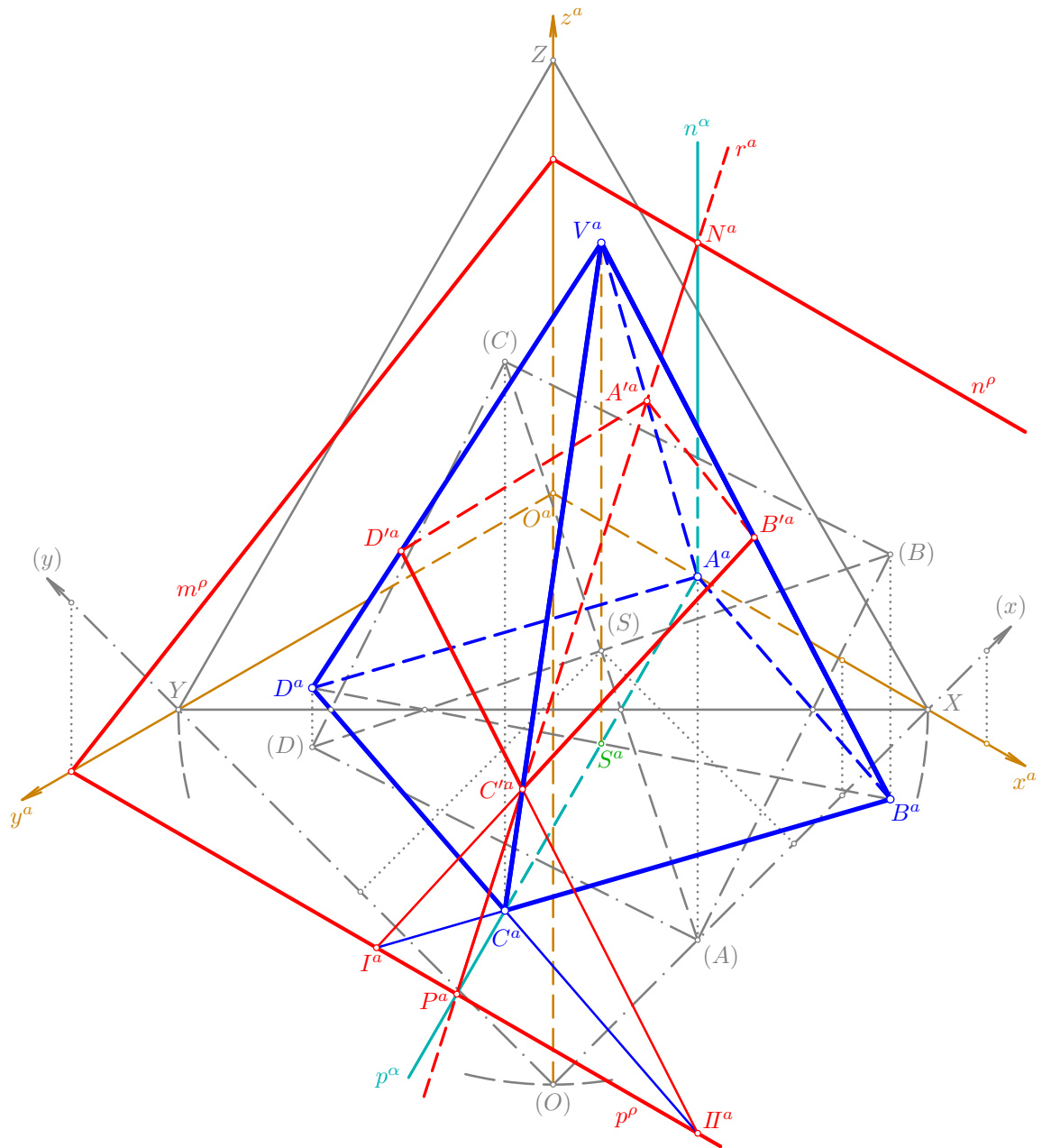
- najděme první dva vrcholy řezu (prováděné konstrukce budou popisovány v prostoru, jejich realizace v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků): bočními hranami AV, CV vedeme rovinu $\alpha = ACV$, která je kolmá k π a pro jejíž stopy platí $p^\alpha = AC$, $n^\alpha \parallel z$, $A \in n^\alpha$; sestrojme průsečnici $r = \alpha \cap \rho = PN$, kde $P = p^\alpha \cap p^\rho$ a $N = n^\alpha \cap n^\rho$, a označme její průsečky A', C' s hranami AV, CV



- poslední vrchol D' řezu na hraně DV můžeme doplnit analogicky – přímka CD protíná půdorysnou stopu p^ρ v bodě II a bod D' je průsečíkem přímky IIC' s boční hranou DV ; nebo lze použít alternativní postup: $D' = DV \cap IIIA'$, kde $III = AD \cap p^\rho$ (tato konstrukce není v obrázku provedena, necht' si ji čtenář laskavě doplní jako cvičení. . .)



- na závěr doplníme zbývající strany $A'B'$, $A'D'$ řezu, kterým je čtyřúhelník $A'B'C'D'$; mezi podstavným čtvercem $ABCD$ a sestrojeným čtyřúhelníkem řezu je vztah prostorové středové kolineace mezi rovinami π a ρ , její osou je půdorysná stopa p^ρ , na níž leží samodružné body I, II , a středem je hlavní vrchol V daného jehlanu; pravoúhlým průmětem zmíněné kolineace do axonometrické průmětny dostáváme středovou kolineaci v rovině, jejíž osou je průmět stopy p^ρ a středem je bod V^a

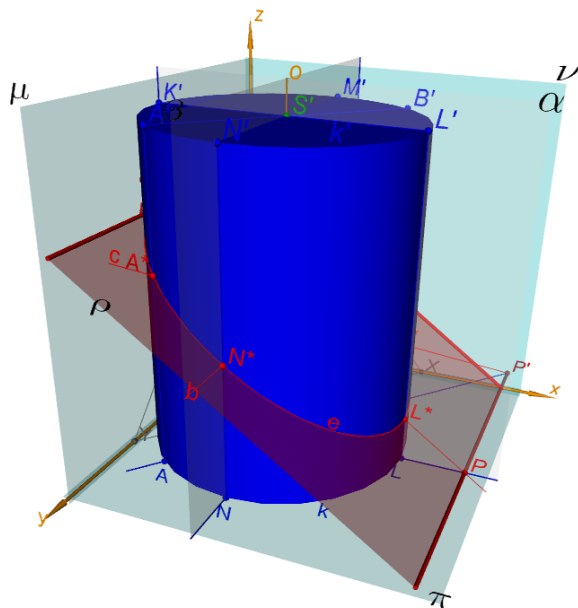


□

3.1.3. Řez rotačního válce v pravoúhlé axonometrii

Výklad

- plášť rotačního válce je částí rotační kvadriky a obecná rovina (která není kolmá k jeho ose ani s ní není rovnoběžná) jej řízne v elipse (nebo její části)
- pro tuto řeznou elipsu lze pomocí prostorové osové afinity mezi rovinou podstavy válce a rovinou řezu najít dvojici sdružených průměrů, což použijeme v následujícím příkladě
- jinak bychom mohli křivku řezu sestavit také tzv. bodově, tj. mohli bychom sestavit dostatečný počet jejích bodů, v tomto případě nejlépe jako průsečíky povrchových úseček daného válce s danou řeznou rovinou

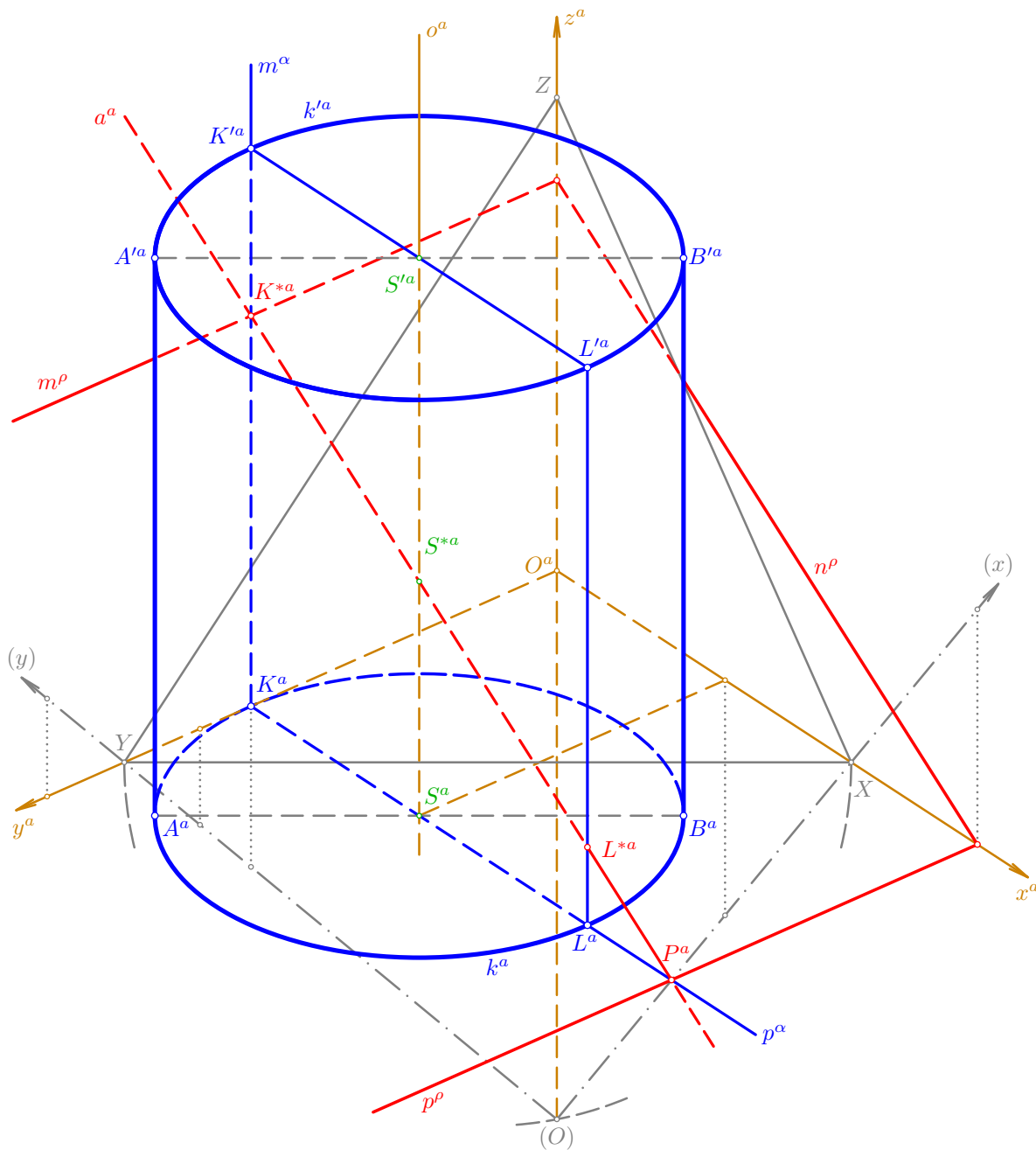


Řešené úlohy

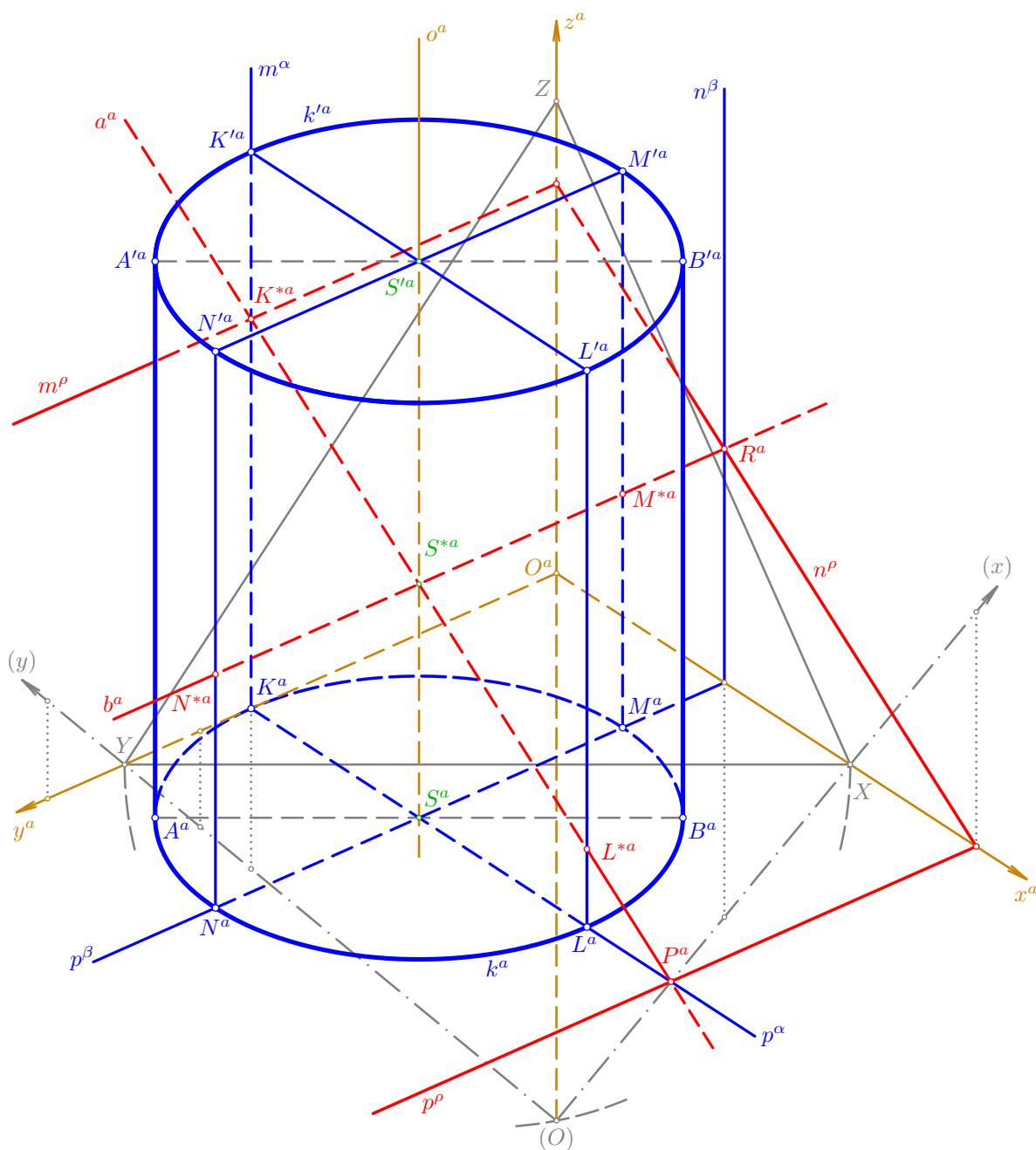
Příklad: V pravoúhlé dimetrii $\Delta(11; 12; 11)$ sestrojte řez rotačního válce rovinou ρ ; daný válec má jednu podstavnou kružnici $k(S, r)$ v půdorysně π a výšku v ; $S[4; 6; 0]$, $r=4$, $v=10$, $\rho(10; \infty; 7)$.

V následujících několika krocích budeme popisovat konstrukce především z hlediska prostorového postupu řešení, příslušné konstrukce v axonometrickém průmětu jsou zřejmé z obrázků, případně k nim bude připojen stručný komentář.

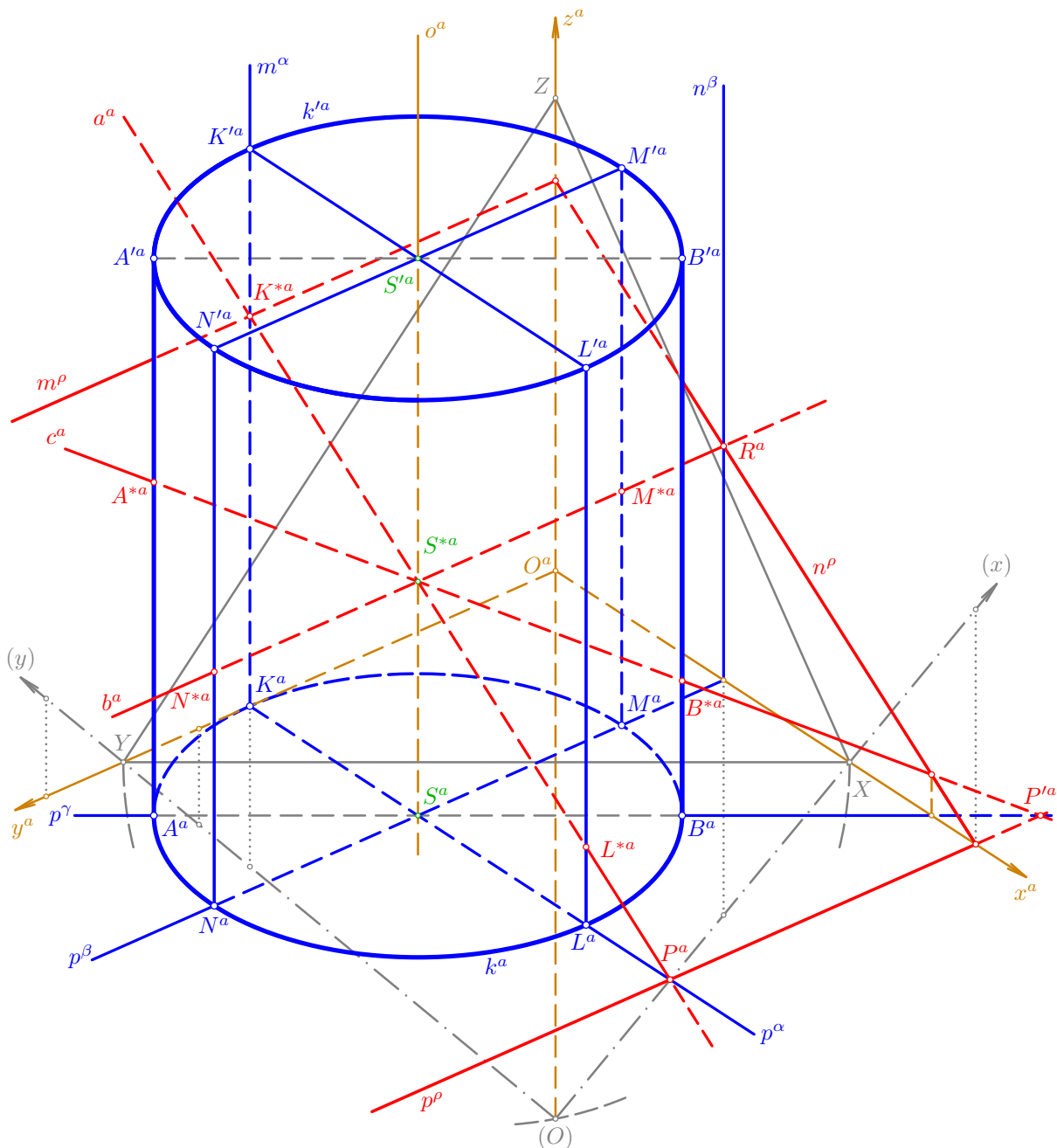
- osou $o = SS'$ válce vedeme rovinu $\alpha \parallel \nu$, její půdorysná stopa $p^\alpha \parallel x$, $S \in p^\alpha$, protíná podstavnu kružnici k v bodech K, L (v bodě K se kružnice k dotýká osy y) a bokorysná stopa m^α prochází bodem K rovnoběžně s osou z ; rovina α protíná daný válec v obdélníku $KLL'K'$ a danou rovinu ρ řezu v přímce $a = PK^*$, kde $P = p^\alpha \cap p^\rho$ a $K^* = m^\alpha \cap m^\rho$; průsečíky K^*, L^* přímky a se stranami KK', LL' jsou pak první dva body hledaného eliptického řezu, bod $S^* = a \cap o$ je jeho středem



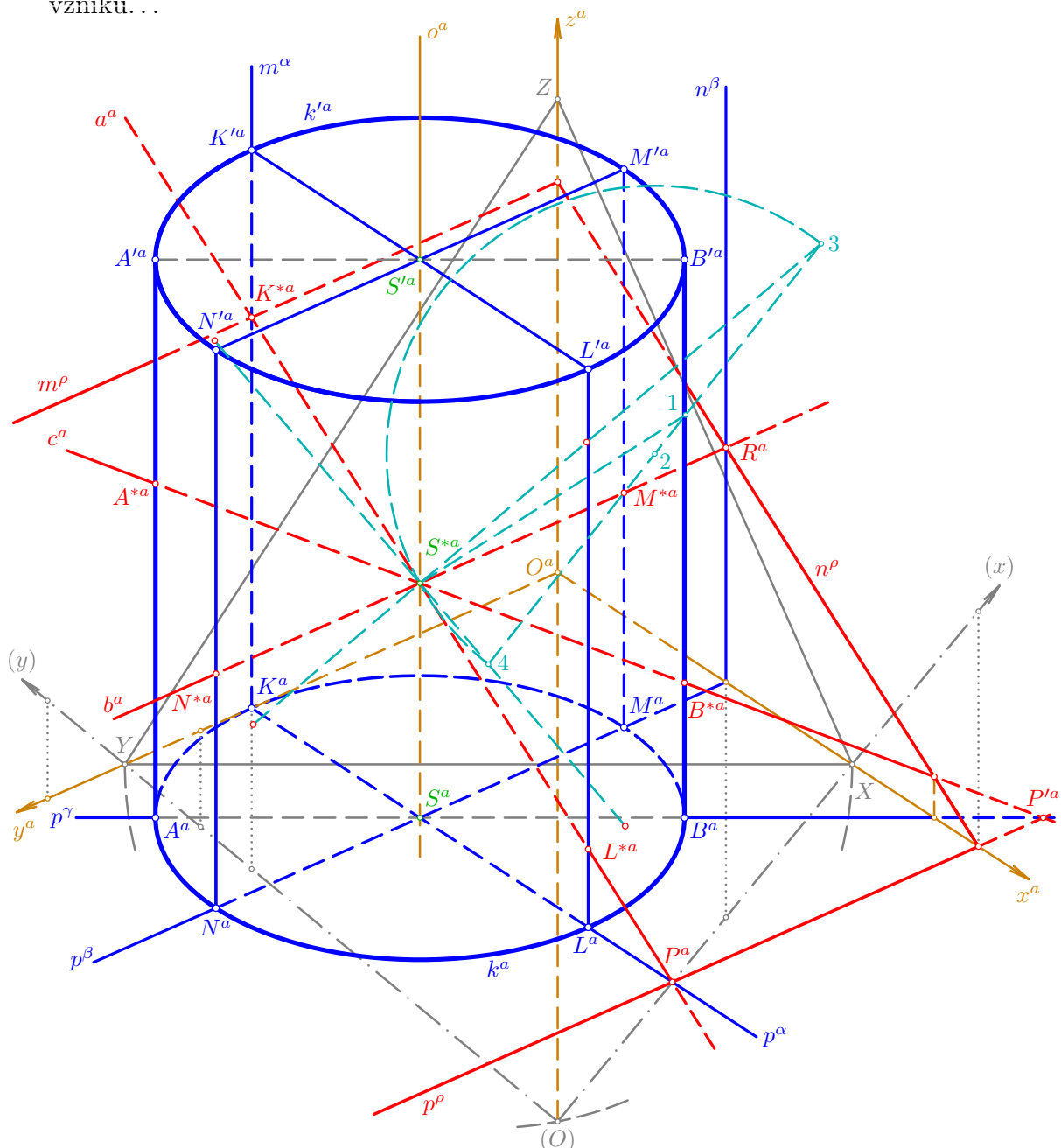
- podobně jako v předchozím kroku proložme osou o rovinu $\beta \parallel \mu$, jejíž půdorysná stopa $p^\beta \parallel y$, $S \in p^\beta$, protíná kružnici k v bodech M, N a nárysná stopa $n^\beta \parallel z$ se s p^β protíná na ose x ; rovina β protíná válec v obdélníku $MNN'M'$ a rovinu ρ v přímce $b = S^*R$ ($b \parallel y$), kde $R = n^\beta \cap n^\rho$; přímka b protíná daný válec v bodech M^*, N^* ležících na jeho povrchkách MM', NN'



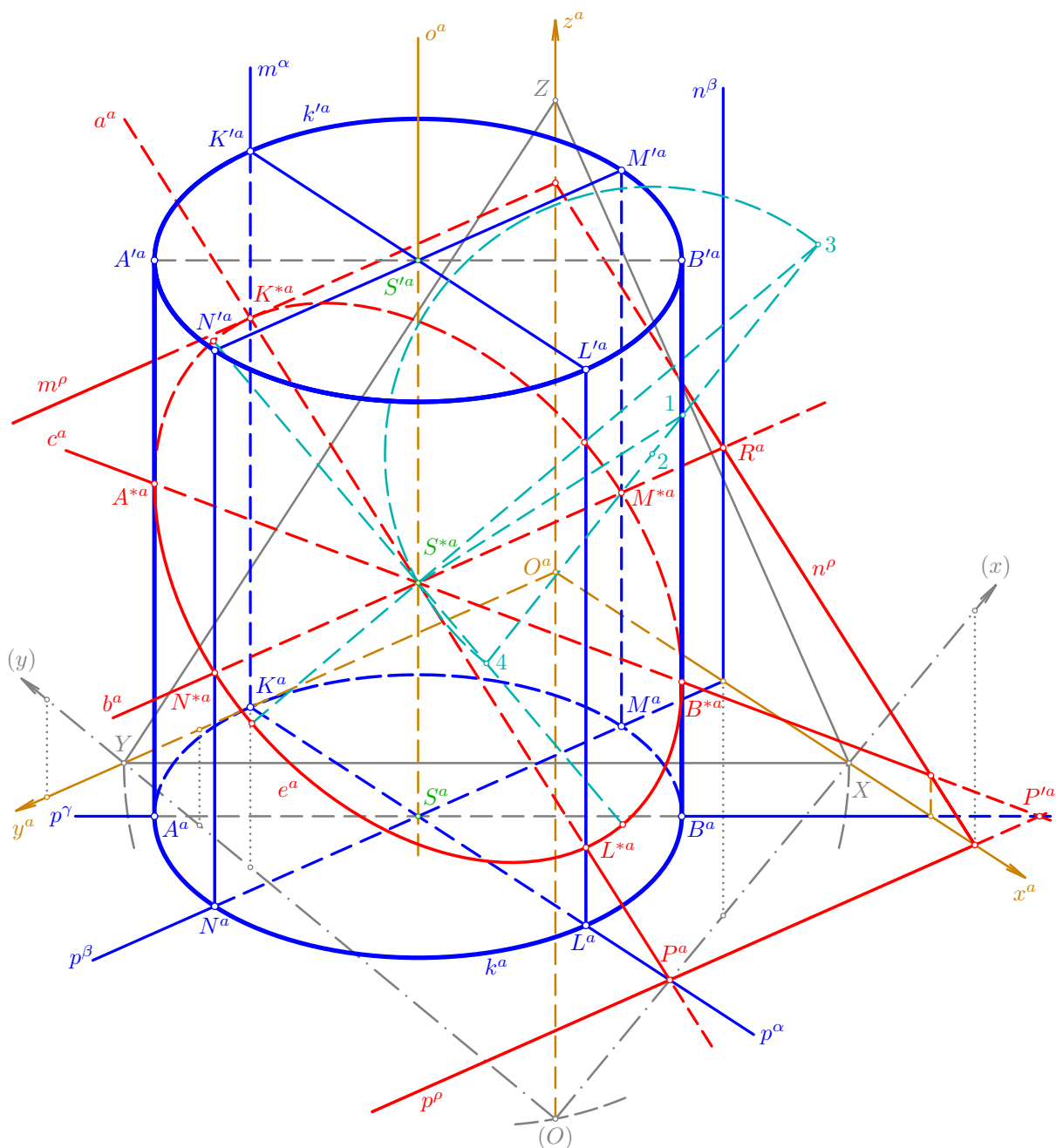
- ještě jednou provedme analogickou konstrukci – osou o válce vedme rovinu $\gamma = ABB'$, která protíná rovinu ρ řezu v přímce $c = P'S^*$, kde $P' = p^\gamma \cap p^\rho$ a $p^\gamma = AB$; body $A^* = c \cap AA'$, $B^* = c \cap BB'$ jsou pak další body křivky řezu, které navíc leží na obrysových stranách válce a bude se v nich tudíž měnit viditelnost řezné elipsy



- zvolené průměry KL, MN podstavné kružnice k jsou navzájem **kolmé**, a v rovině ρ jim tedy odpovídají **sdužené průměry** K^*L^*, M^*N^* elipsy řezu (v našem zadání jsou dokonce body K^*, L^* hlavními a body M^*, N^* vedlejšími vrcholy sestrojované elipsy); sduženost průměrů se rovnoběžným promítáním zachová, a v axonometrickém průmětu tak máme dvojici sdužených průměrů $K^{*a}L^{*a}$ a $M^{*a}N^{*a}$, k nimž sestrojíme hlavní a vedlejší vrcholy průmětu řezné elipsy pomocí **Rytzovy konstrukce** (viz strana 200); v obrázku jsou příslušné pomocné body označeny 1, 2, 3, 4 postupně podle pořadí jejich vzniku...



- na závěr je vyrýsován (nejlépe za pomoci hyperoskulačních kružnic ve vrcholech) a i s viditelností vytažen průmět e^a elipsy e , která je hledaným řezem daného rotačního válce danou rovinou ρ a která odpovídá podstavné kružnici k v prostorové osové afinitě mezi půdorysnou π a rovinou ρ , přičemž osou této afinity je půdorysná stopa p^ρ a směr udává přímka $o = SS'$



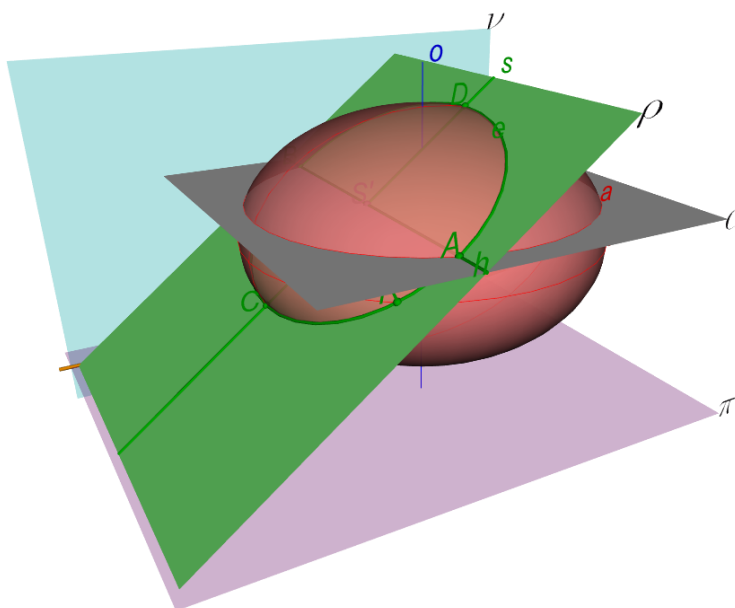
□

3.1.4. Řez rotačního zploštělého elipsoidu v Mongeově promítání



Výklad

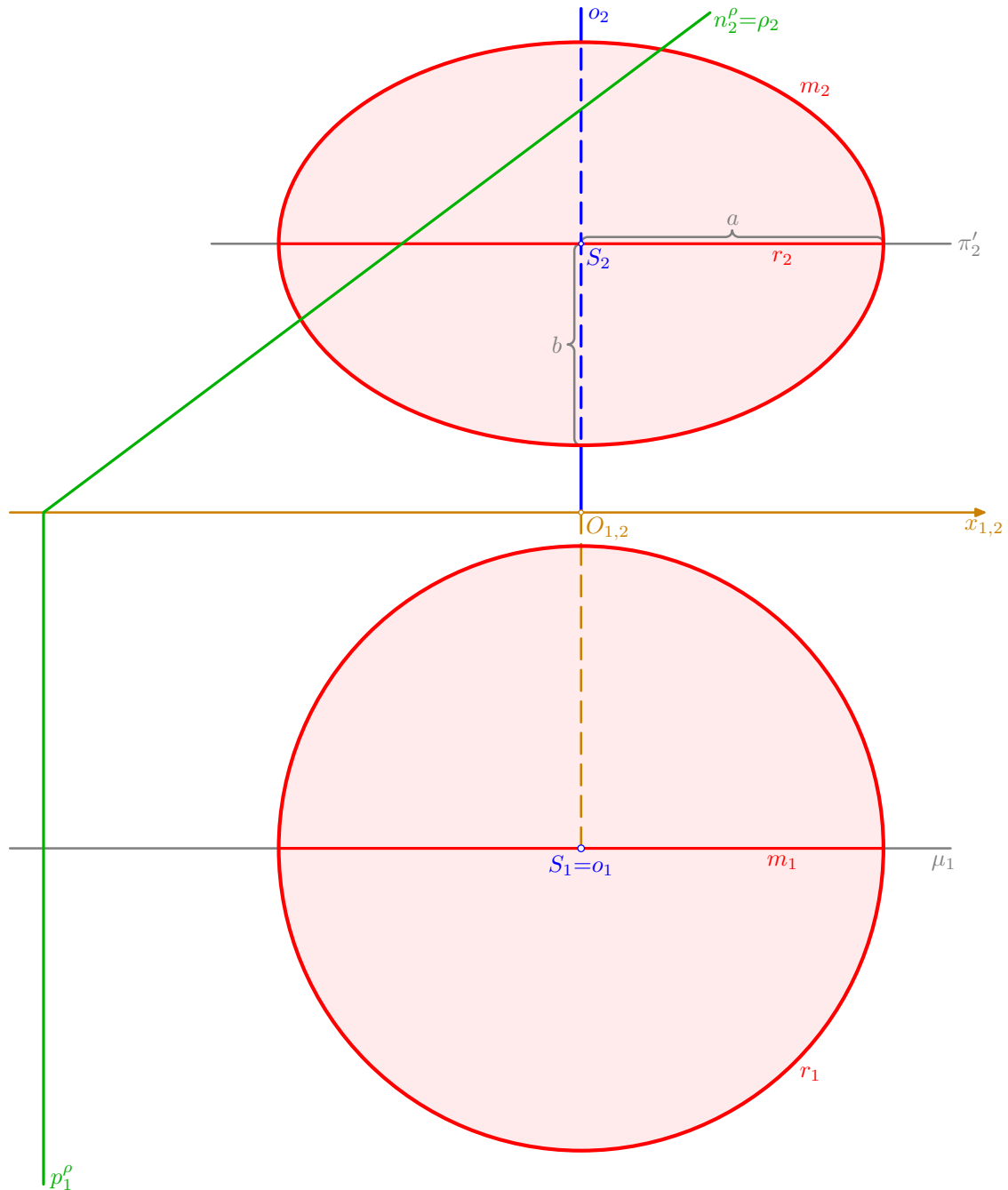
- rotační zploštělý elipsoid patří mezi rotační kvadriky a jeho rovinným řezem je tedy nějaká kuželosečka, v tomto případě buď kružnice nebo elipsa
- v následujícím příkladě naznačíme princip bodové konstrukce, pomocí kterého najdeme určující prvky hledané řezné kuželosečky



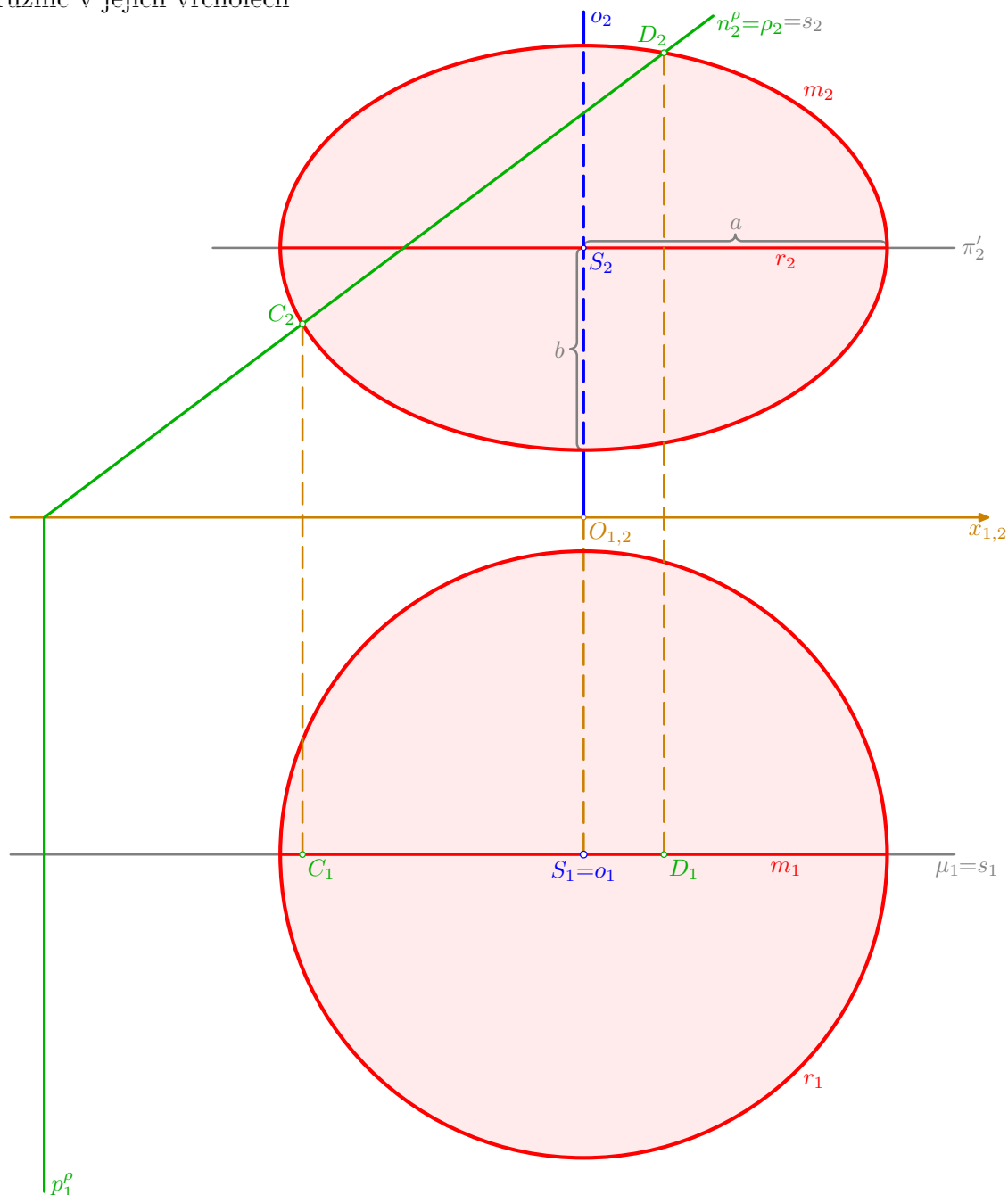
Řešené úlohy

Příklad: V Mongeově promítání sestrojte řez zploštělého rotačního elipsoidu rovinou ρ ; daný elipsoid má střed S , osu $o \perp \pi$, $S \in o$ a délky a, b hlavní a vedlejší poloosy; $S[0; 5; 4]$, $a = 4,5$, $b = 3$, $\rho(-8; \infty; 6)$.

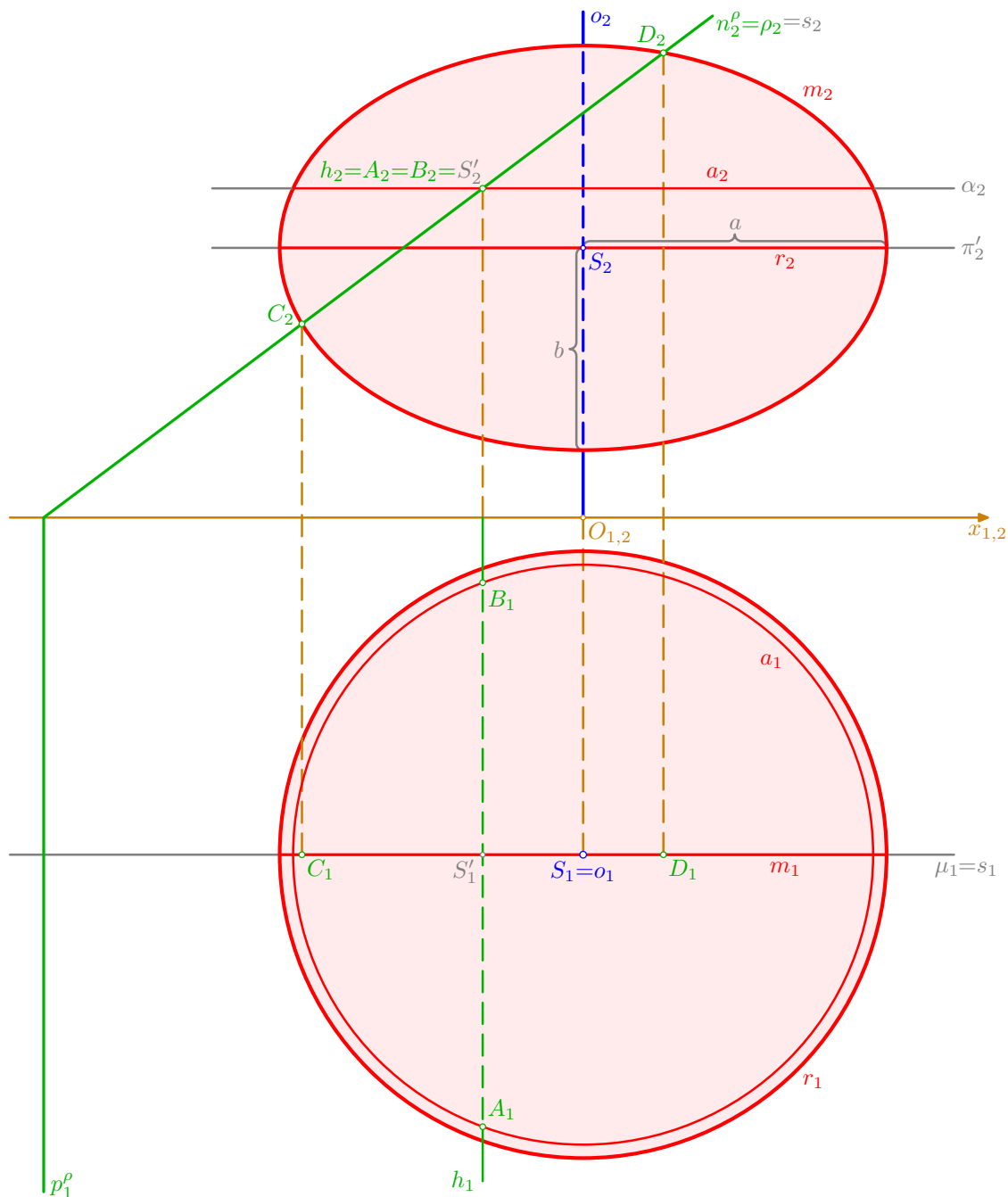
- podle zadání sestrojme sdružené průměty S_1, S_2 středu S , půdorysem osy $o \perp \pi, S \in o$, je bod $o_1 = S_1$, nárysem je přímka $o_2 \perp x_{1,2}, S_2 \in o_2$; rovina $\pi' \perp o, S \in \pi'$, protíná daný elipsoid v rovníkové kružnici $r(S, a = 4,5)$, jejím půdorysem je kružnice $r_1(S_1, a)$, nárysem úsečka r_2 ; podobně protíná rovina $\mu \parallel \nu, S \in \mu$, plochu v hlavní meridiánové elipse m , jejímž nárysem je elipsa m_2 a půdorysem úsečka m_1 ; k zadání patří ještě stopy $p_1^{\rho} \perp x_{1,2}$ a $n_2^{\rho} = \rho_2$ řezné roviny ρ



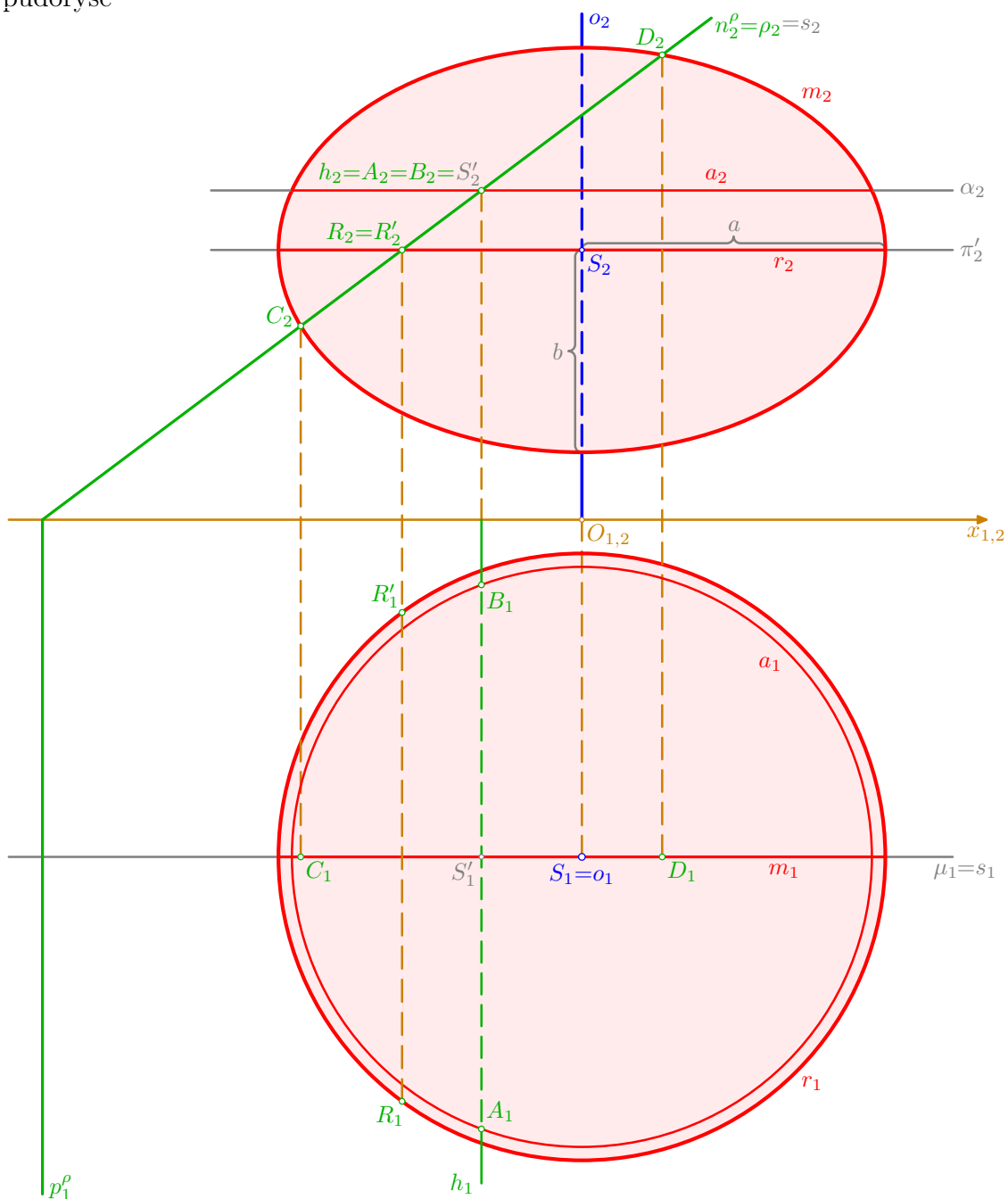
- roviny ρ a μ se protínají v přímce $s = \rho \cap \mu$, v půdoryse je $s_1 = \mu_1$, v náryse platí $s_2 = n_2^{\rho}$; přímka s pak protíná meridiánovou elipsu m v bodech C, D , kterými tedy musí procházet hledaná křivka řezu; v náryse je $C_2, D_2 = s_2 \cap m_2$ a půdorysy C_1, D_1 odvodíme po příslušných ordinálách a na přímce s_1 ; pro přesnou konstrukci průsečíků C_2, D_2 lze použít ohniskové vlastnosti elipsy nebo vhodné osové afinity, pro naše účely ovšem postačí pokud možno co nejlepší vyrýsování elipsy m_2 pomocí oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech



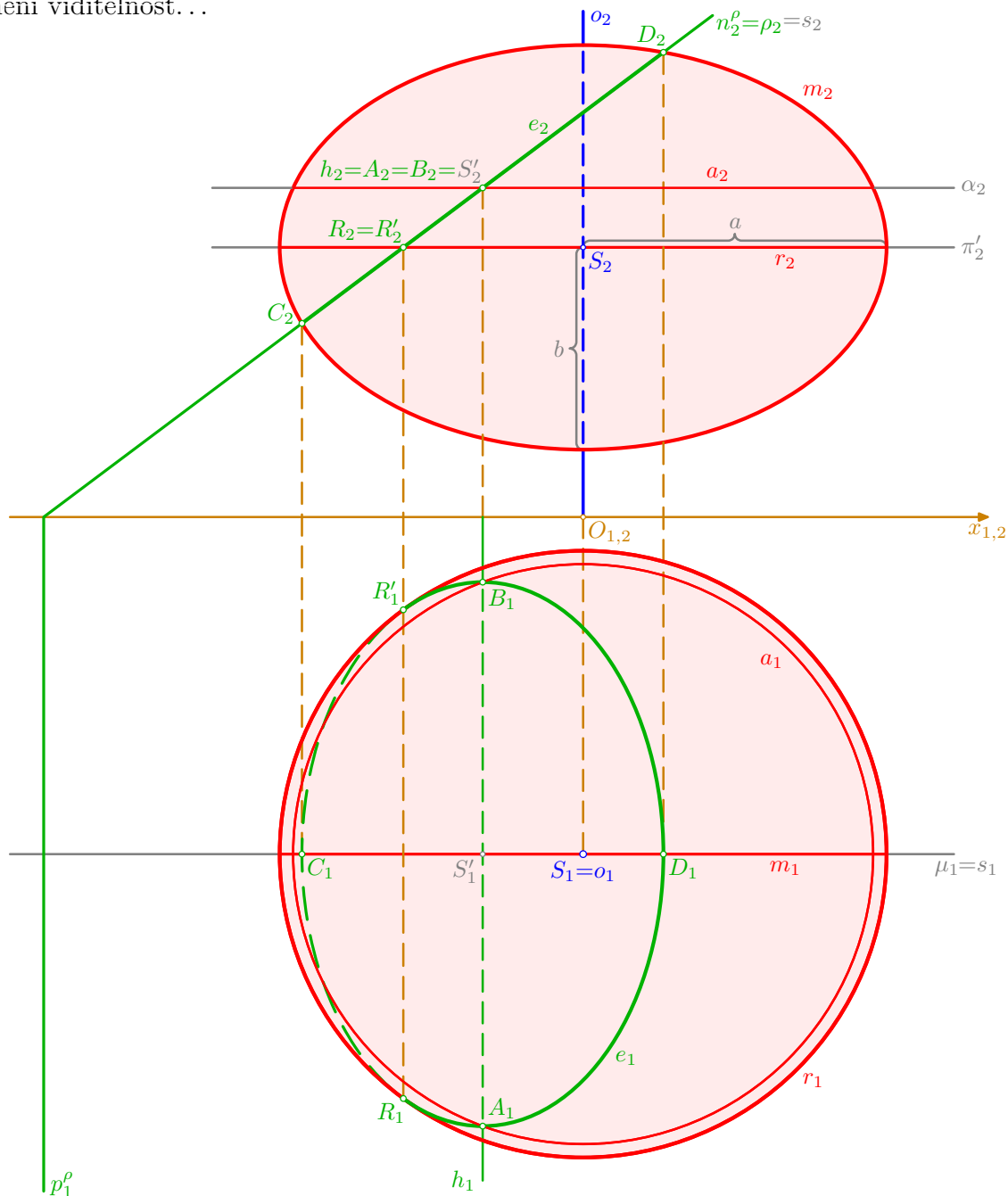
- středem S' úsečky CD vedme pomocnou rovinu $\alpha \perp o$, která protne elipsoid v rovnoběžkové kružnici a a rovinu ρ v přímce h ; průsečíky $A, B = a \cap h$ jsou pak další body hledaného řezu; v naryse se rovina α zobrazí jako přímka $\alpha_2 \perp o_2, S'_2 \in \alpha_2$ (S'_2 je středem úsečky C_2D_2), narysem kružnice a je úsečka a_2 , jejíž krajní body jsou průsečíky přímky α_2 s elipsou m_2 , a konečně narysem přímky $h = \alpha \cap \rho$ a bodů A, B je bod $h_2 = A_2 = B_2 = S'_2$; půdorys h_1 přímky h splývá s ordinálou bodu S' , půdorysem kružnice a je kružnice $a_1(S_1, \frac{1}{2}|a_2|)$ a pro půdorysy bodů A, B platí $A_1, B_1 = a_1 \cap h_1$



- stejným způsobem jako v předchozím kroku bychom mohli sestrojovat další a další body křivky řezu; pro nás bude užitečné najít takto ještě body R, R' , které leží v rovině ρ a současně na rovníku r plochy; v náryse je $R_2 = R'_2 = \rho_2 \cap \pi'_2$, kde π'_2 je nárysem roviny π' rovníku r , a půdorysy R_1, R'_1 najdeme na ordinále a na kružnici r_1 ; právě body R_1, R'_1 budou užitečné v následujícím závěrečném kroku pro stanovení viditelnosti řezné křivky v půdoryse



- dá se ukázat, že řezem daného rotačního zploštělého elipsoidu danou rovinou ρ je elipsa e , která má hlavní vrcholy A, B a vedlejší vrcholy C, D – proto jsme také vedli rovinu α středem S' úsečky CD , abychom se co nejrychleji dostali k významným bodům řezné křivky; nárysem elipsy e je úsečka $e_2 = C_2D_2$, jejím půdorysem je elipsa e_1 , která má střed S'_1 , hlavní vrcholy A_1, B_1 , vedlejší vrcholy C_1, D_1 a která se v bodech R_1, R'_1 dotýká kružnice r_1 , tj. v těchto bodech mají křivky e_1, r_1 společné tečny a také se zde mění viditelnost...



□

3.2. Průnik přímky s plochou či tělesem



Výklad

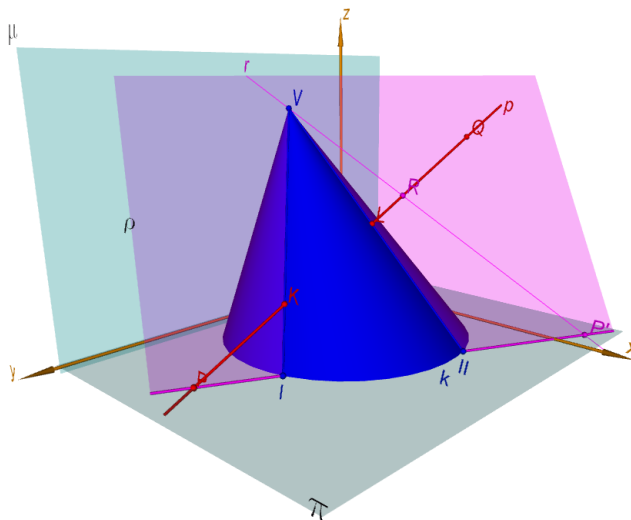
- obecný princip konstrukce přímky s daným geometrickým objektem je vyloženo ve sbírce Základy geometrie
- jde o speciální případ užití úloh z předchozí podkapitoly, tj. využijeme zde zkušenosti s konstrukcí řezu daného tělesa nebo plochy
- následující dva příklady slouží rovněž k procvičení užití pravoúhlé axonometrie

3.2.1. Průnik přímky s kosým kruhovým kuželem v pravoúhlé axonometrii



Výklad

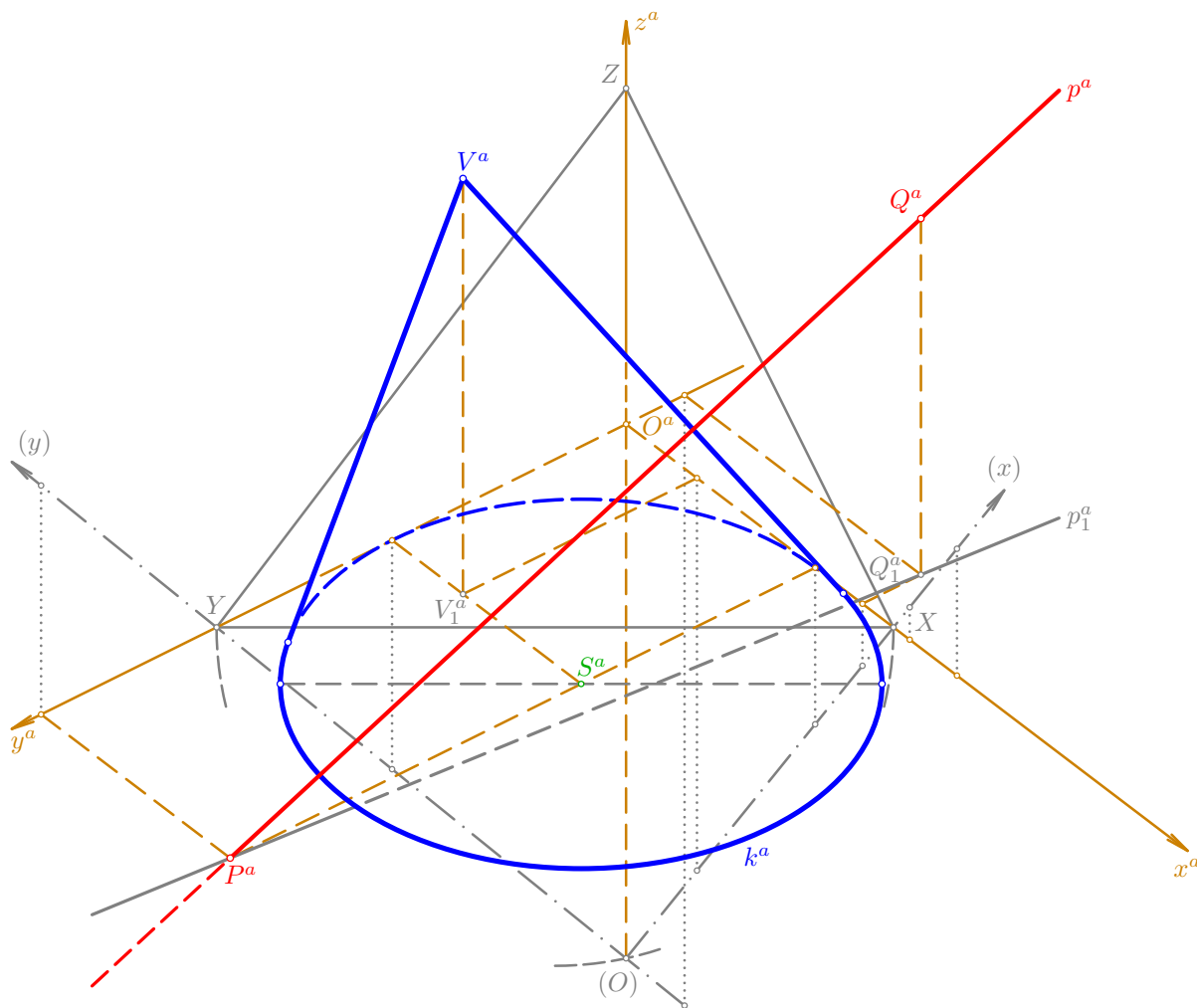
- pouze tzv. vrcholová rovina, určená vrcholem daného kužele a danou přímkou, protne těleso v jednoduchém trojúhelníkovém řezu; ostatní roviny, proložené danou přímkou, protínají daný kužel v nějakých kuželosečkách (nebo jejich částech)



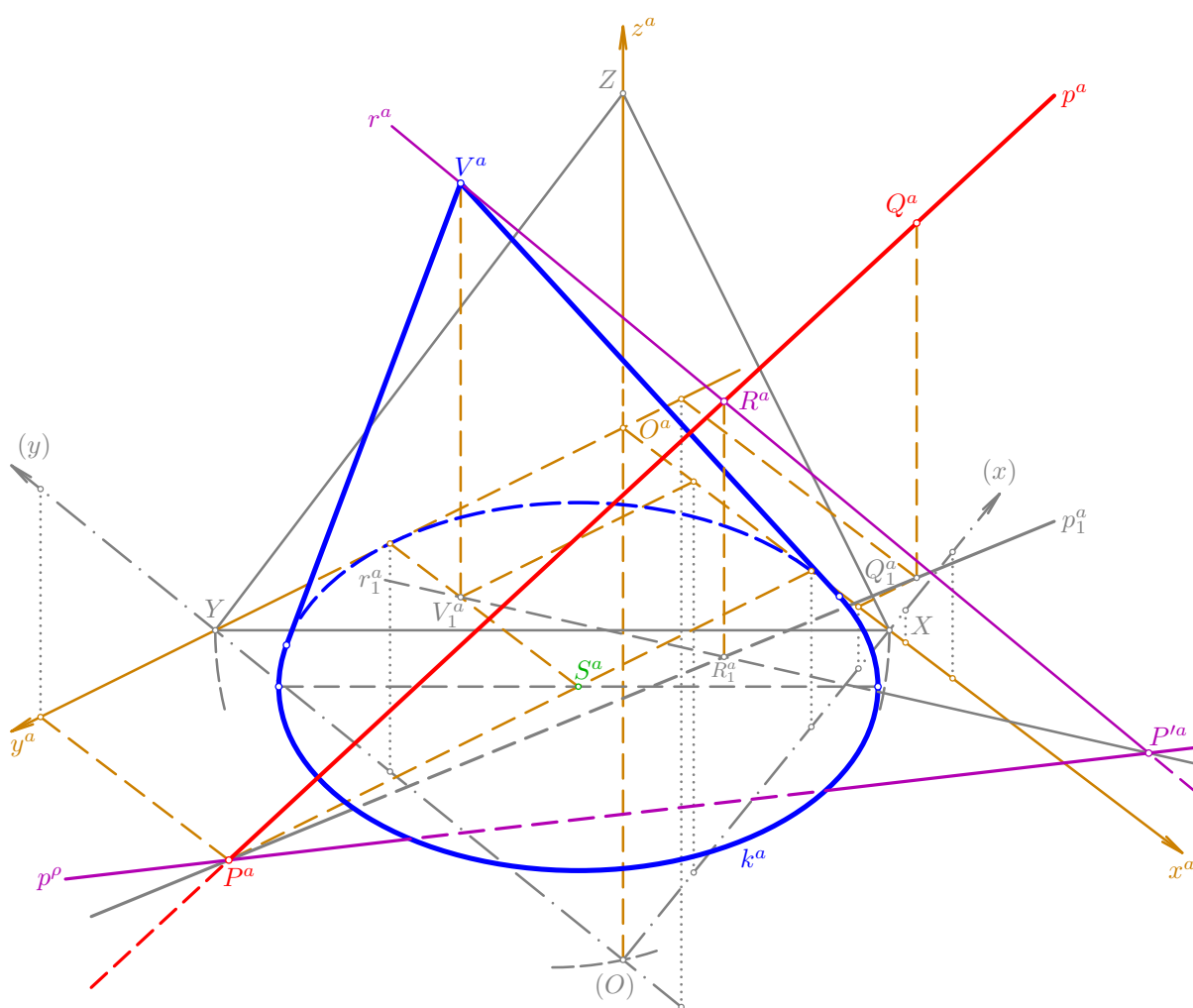
Řešené úlohy

Příklad: V pravoúhlé dimetrii $\Delta(9; 9; 8)$ sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s kosým kruhovým kuželem, který má podstavnu kružnici $k(S, r)$ v půdorysně π a vrchol V ; $S[4; 4; 0]$, $r = 4$, $V[1,5; 4; 7]$, $P[4; 10; 0]$, $Q[5; -1; 6]$.

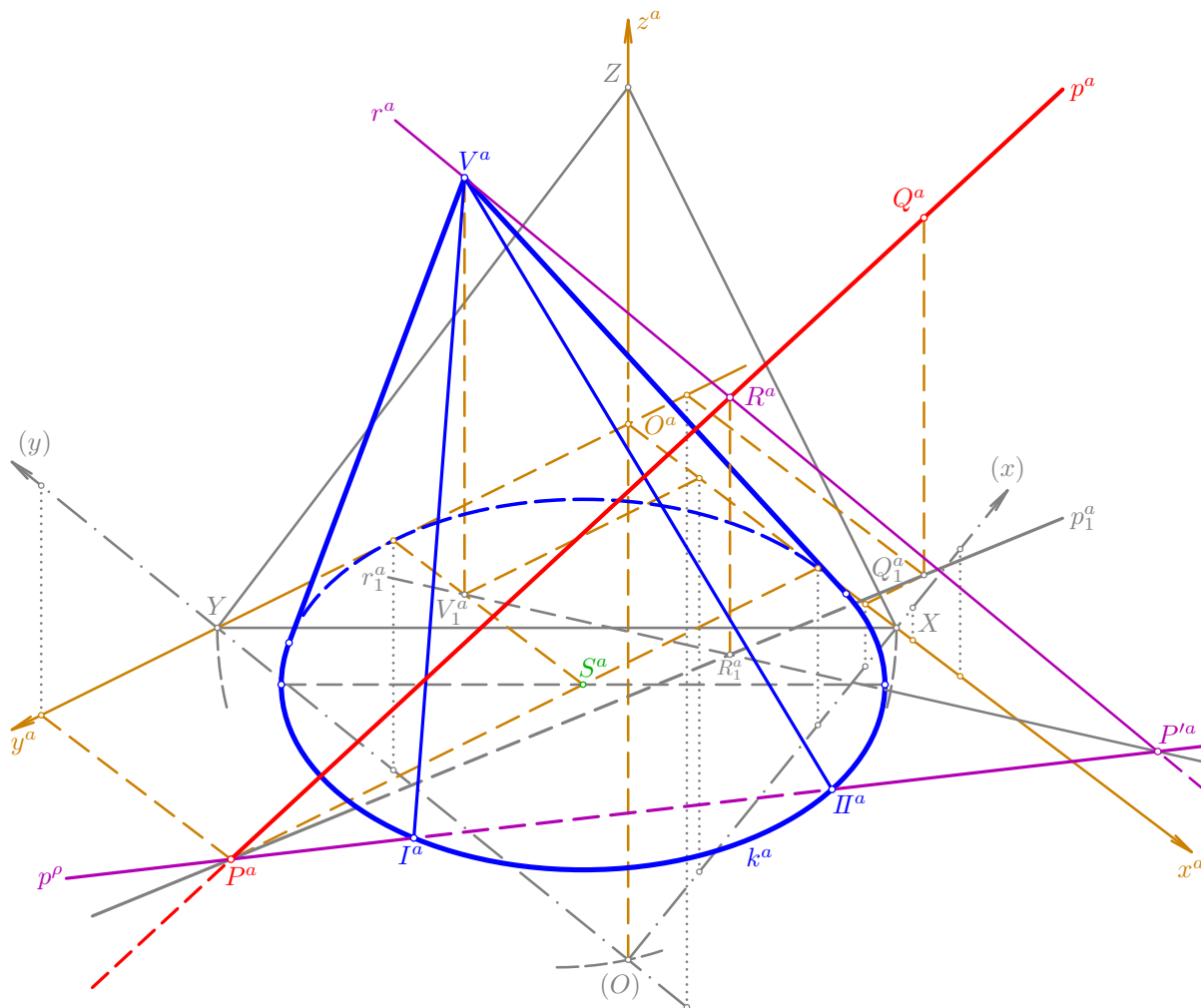
- zadání úlohy: podstavnu kružnici $k(S, r)$ zobrazíme jako elipsu k^a (podrobnější popis je uveden na straně 154 a následujících), obrys kužele dokončíme sestrojením tečen z průmětu V^a vrcholu V k elipse k^a – to lze provést přesně pomocí ohniskových vlastností elipsy (podrobněji na straně 184) nebo přibližně pouhým přiložením pravítka (tzv. „inženýrská“ konstrukce); pro přímkou $p = PQ$ sestrojíme její axonometrický půdorys $p_1^a = P^aQ_1^a$ a axonometrický průmět $p^a = P^aQ^a$; při vynášení z -ových souřadnic využijeme skutečnosti, že se díky zadané dimetrii zkrátí jednotka délky stejně ve směru průmětu osy z jako ve směru průmětu osy x , a vystačíme tedy pouze s otočením půdorysny π do axonometrické průmětny; v tomto příkladě budeme považovat nárysnu ν za průhlednou, což se projeví na viditelnosti přímky p



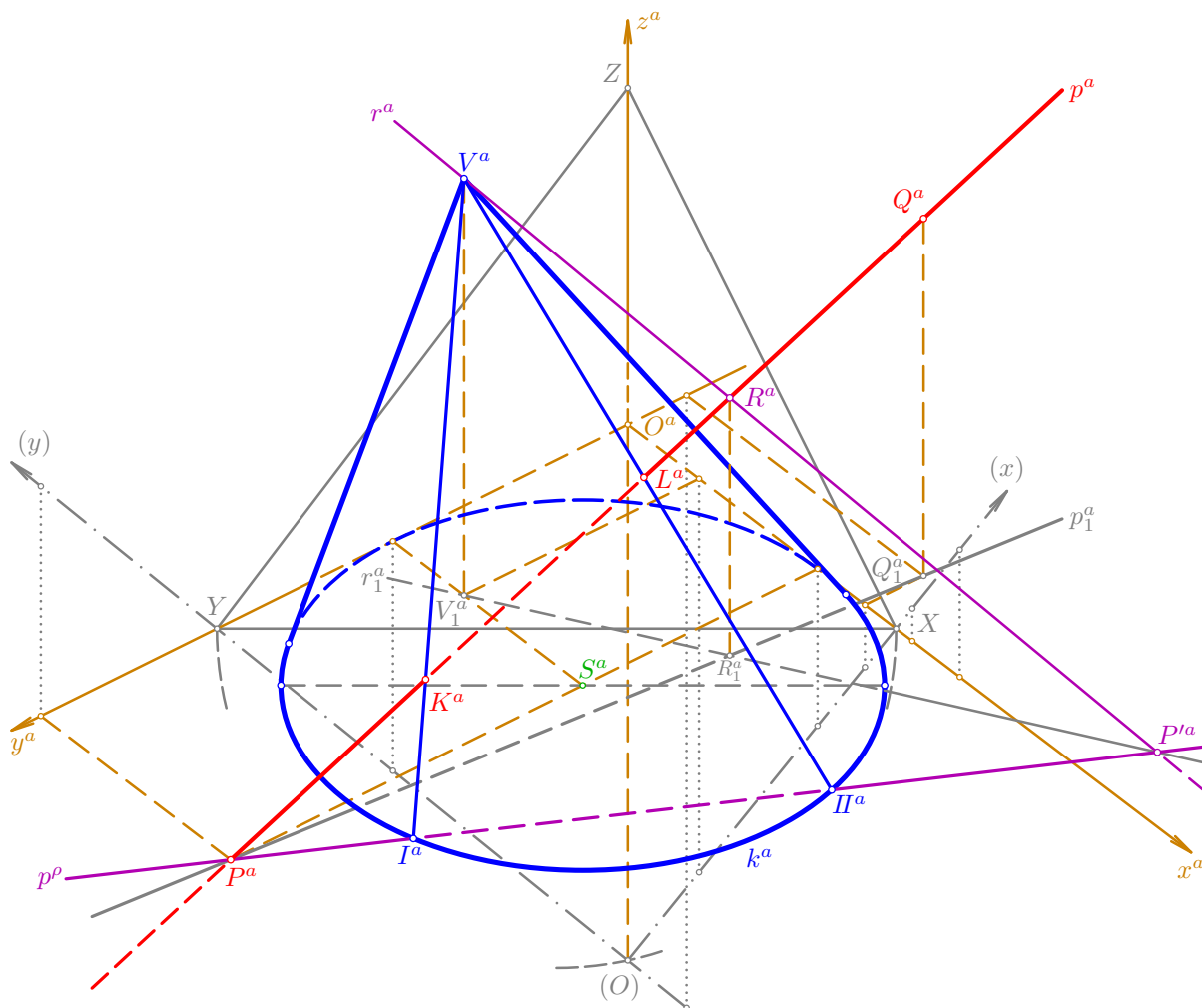
- danou přímkou $p = PQ$ proložme tzv. vrcholovou rovinu $\rho = Vp = VPQ$ a sestrojme její půdorysnou stopu p^ρ : zadaný bod P je půdorysným stopníkem přímky p a bude tedy $P \in p^\rho$; průmět půdorysného stopníku přímky VQ by nám nevyšel na nákresnu, proto zvolme na přímce p pomocný bod R a sestrojme půdorysný stopník P' přímky $r = RV$: v průmětu je vhodně zvolen bod $R^a \in p^a$, sestrojen příslušný axonometrický půdorys $R_1^a \in p_1^a, R_1^a R^a \parallel z^a$, a přímky $r^a = R^a V^a, r_1^a = R_1^a V_1^a$ se pak protínají v průmětu P'^a hledaného stopníku P' ; nyní již můžeme snadno sestrojít axonometrický průmět půdorysné stopy $p^\rho = PP'$ proložené roviny ρ



- rovina $\rho = Vp$ protíná daný kužel v trojúhelníku IIV , kde body I, II jsou průsečíky půdorysné stopy p^ρ s podstavou kružnicí k ; v průmětu můžeme průsečíky I^a, II^a průmětu stopy p^ρ s elipsou k^a najít přibližně díky pečlivému vyrýsování této elipsy pomocí hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, nebo přesně v otočení půdorysny π , v níž oba útvary leží, do axonometrické průmětny kolem přímky XY (tato konstrukce není v obrázku provedena a čtenář si ji může doplnit jako cvičení)



- přímka p protíná strany IV , IIV sestrojeného řezného trojúhelníka v bodech K , L ; ty jsou současně krajními body úsečky KL , která je hledaným průnikem dané přímky p s daným kosým kruhovým kuželem; v průmětu jsou již tedy jen označeny body $K^a = p^a \cap I^aV^a$, $L^a = p^a \cap II^aV^a$ a opravena viditelnost průmětu p^a přímky p



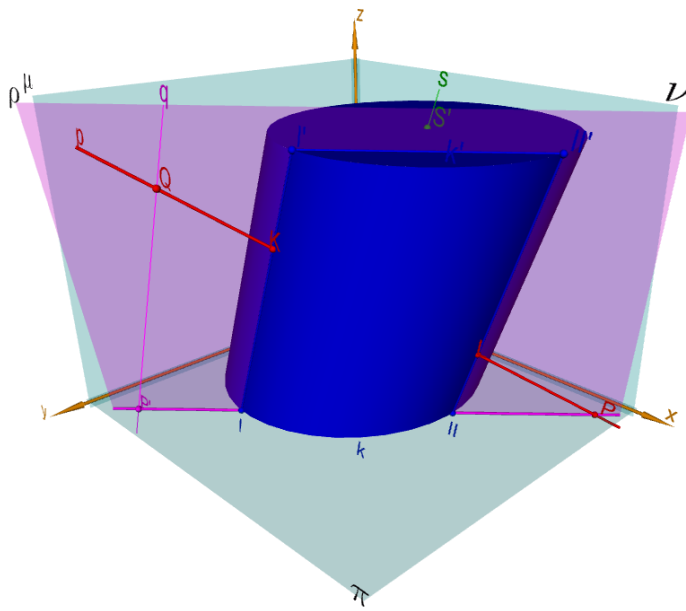
□

3.2.2. Průnik přímky s kosým kruhovým válcem v pravoúhlé axonometrii

Výklad



- pouze tzv. směrová rovina, která prochází danou přímkou rovnoběžně se směrem površek daného válce, protne těleso v jednoduchém rovnoběžníkovém řezu; ostatní roviny, proložené danou přímkou, protínají daný válec v nějakých kuželosečkách (nebo jejich částech)

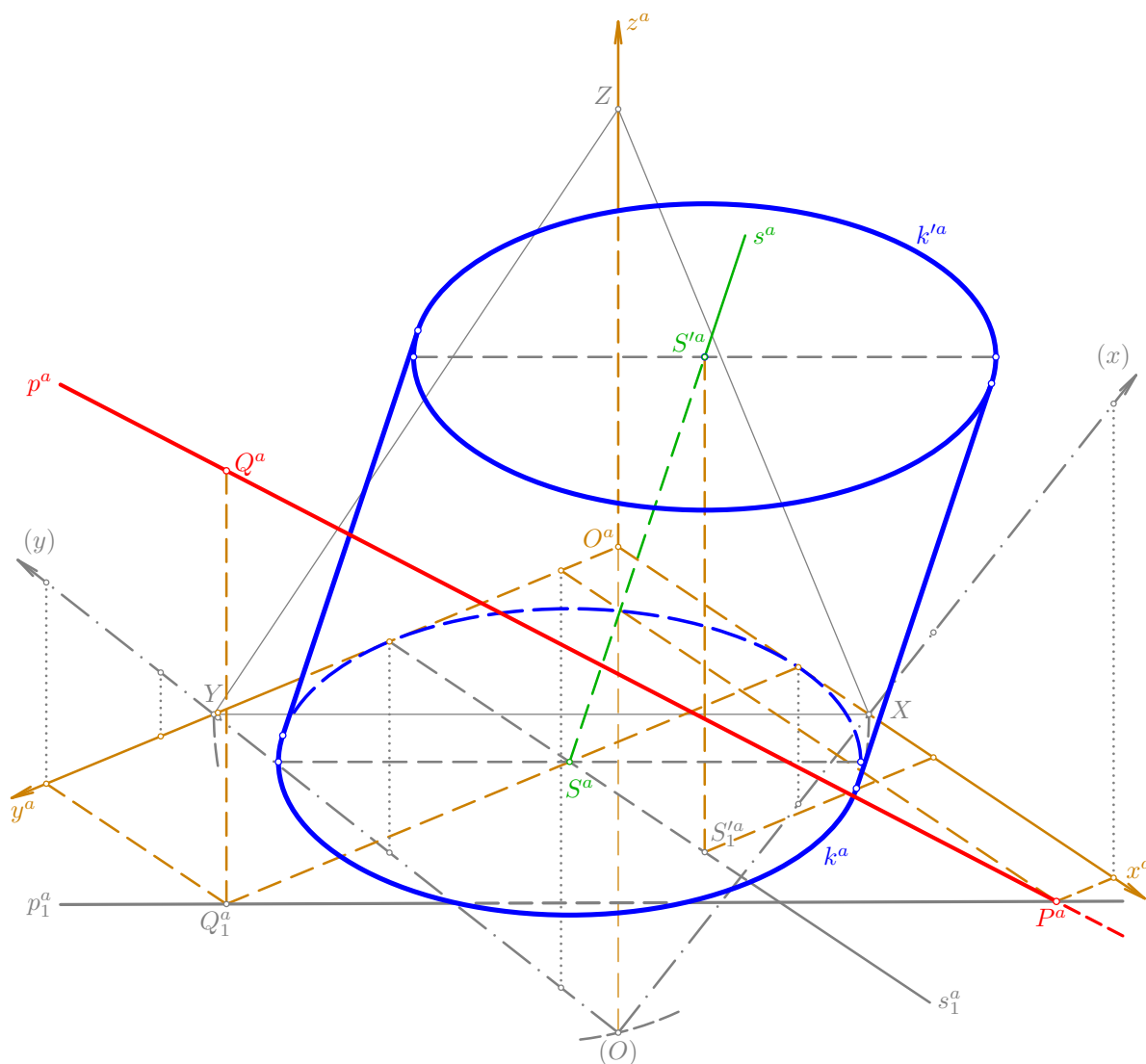


Řešené úlohy

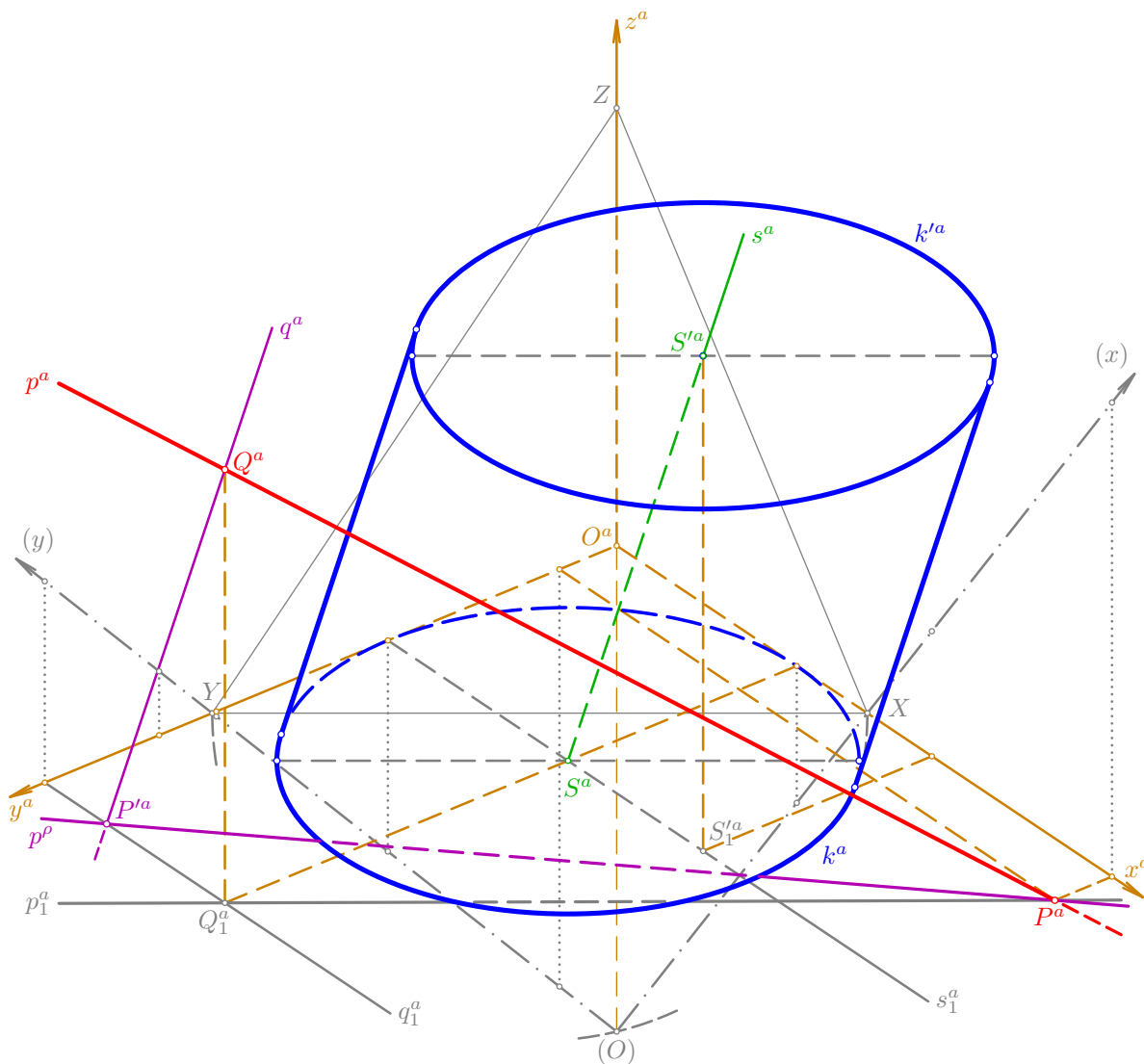


Příklad: V pravoúhlé dimetrii $\Delta(9; 10; 9)$ sestrojte průnik přímky $p = PQ$ s kosým kruhovým válcem, který má jednu podstavnou kružnici $k(S, r)$ v půdorysně π a střed druhé podstavy je v bodě S' ; $S[4; 4; 0]$, $r = 4$, $S'[7; 4; 8]$, $P[11; 1; 0]$, $Q[4; 10; 7]$.

- zadání úlohy: podstavné kružnice $k(S, r), k'(S', r)$ zobrazíme jako elipsy k^a, k'^a (podrobnější popis je uveden na straně 154 a následujících), obrys válce dokončíme sestrojením společných tečen elips k^a, k'^a rovnoběžných s průmětem $s^a = S^a S'^a$ středné $s = SS'$ daného válce – to lze provést přesně pomocí ohniskových vlastností elipsy (podrobněji na straně 189) nebo přibližně pouhým přiložením pravítka (tzv. „inženýrská“ konstrukce); pro přímkou $p = PQ$ sestrojíme její axonometrický půdorys $p_1^a = P^a Q_1^a$ a axonometrický průmět $p^a = P^a Q^a$; při vynášení z -ových souřadnic využijeme skutečnosti, že se díky zadané dimetrii zkrátí jednotka délky stejně ve směru průmětu osy z jako ve směru průmětu osy y , a vystačíme tedy pouze s otočením půdorysny π do axonometrické průmětny



- danou přímkou $p = PQ$ proložme tzv. směrovou rovinu $\rho \parallel s$ a sestrojme její půdorysnou stopu p^p : zadaný bod P je půdorysným stopníkem přímky p a bude tedy $P \in p^p$; dále sestrojme půdorysný stopník P' přímky $q \parallel s, Q \in q$: v průmětu je $q^a \parallel s^a, Q^a \in q^a$ a $q_1^a \parallel s_1^a, Q_1^a \in q_1^a$ (kde $s_1^a = S^a S_1^a$), a bod $P'^a = q^a \cap q_1^a$ je pak axonometrickým průmětem hledaného stopníku $P' = q \cap \pi$; nyní již můžeme snadno sestrojít axonometrický průmět půdorysné stopy $p^p = PP'$ proložené roviny ρ



- přímka p protíná strany II' , III' sestrojeného řezného rovnoběžníka v bodech K, L ; ty jsou současně krajními body úsečky KL , která je hledaným průnikem dané přímky p s daným kosým kruhovým válcem; v průmětu jsou již tedy jen označeny body $K^a = p^a \cap I^a I'^a$, $L^a = p^a \cap II^a II'^a$ a opravena viditelnost průmětu p^a přímky p



□

3.3. Průniky rotačních ploch

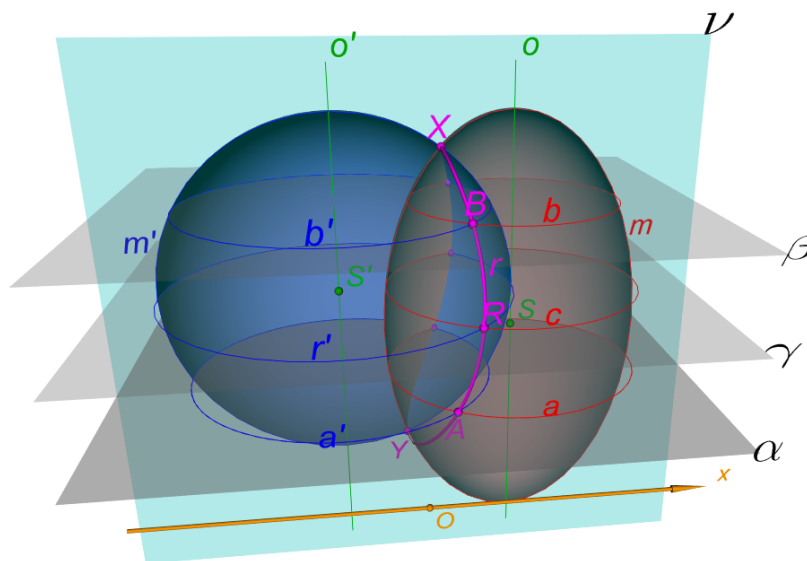
- konstrukce průnikové křivky se provádí bodově a její způsob závisí na vzájemné poloze os rotace daných rotačních ploch
- následující dva příklady ukazují dvě různé varianty řešení téže úlohy

3.3.1. Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta rovnoběžných os – metoda rovnoběžných rovin)



Výklad

- pro danou kulovou plochu zvolme její osu rotace rovnoběžně s osou rotace daného elipsoidu
- veďme pak soustavu několika vhodných rovin kolmých k oběma osám, tyto roviny protnou obě plochy v rovnoběžkových kružnicích a jejich průsečíky jsou body hledané průnikové křivky – odtud název metody použitý v nadpise

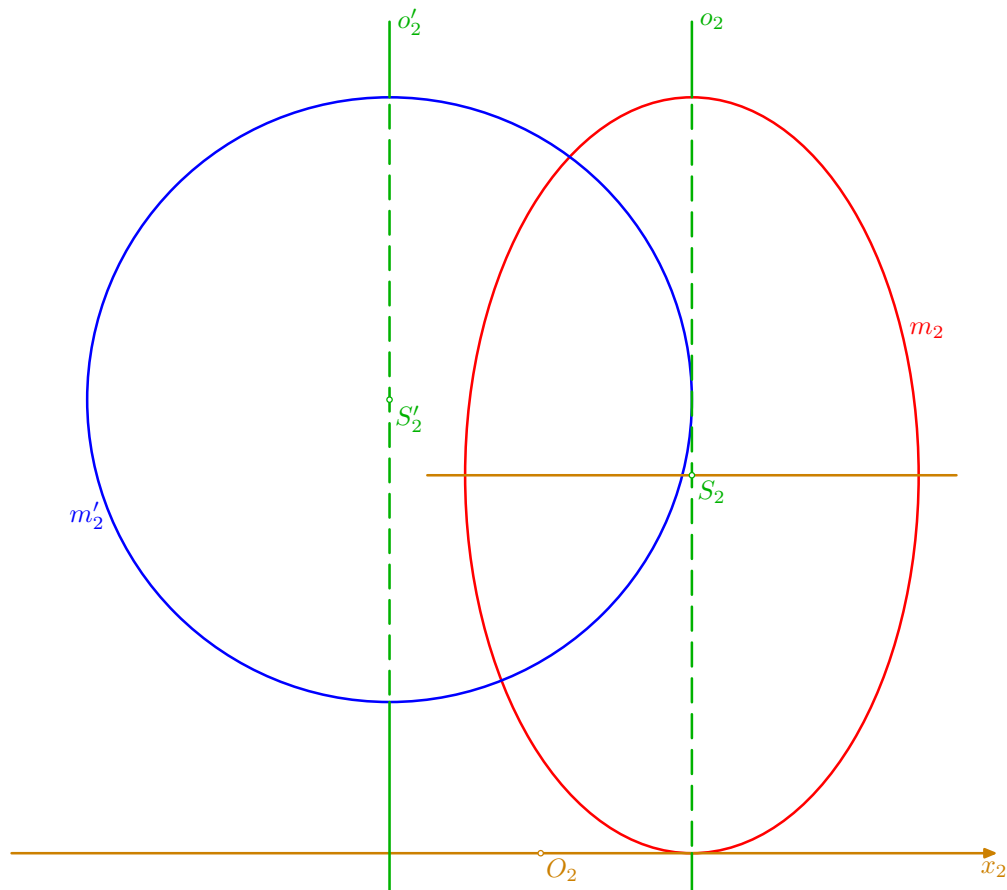


Řešené úlohy

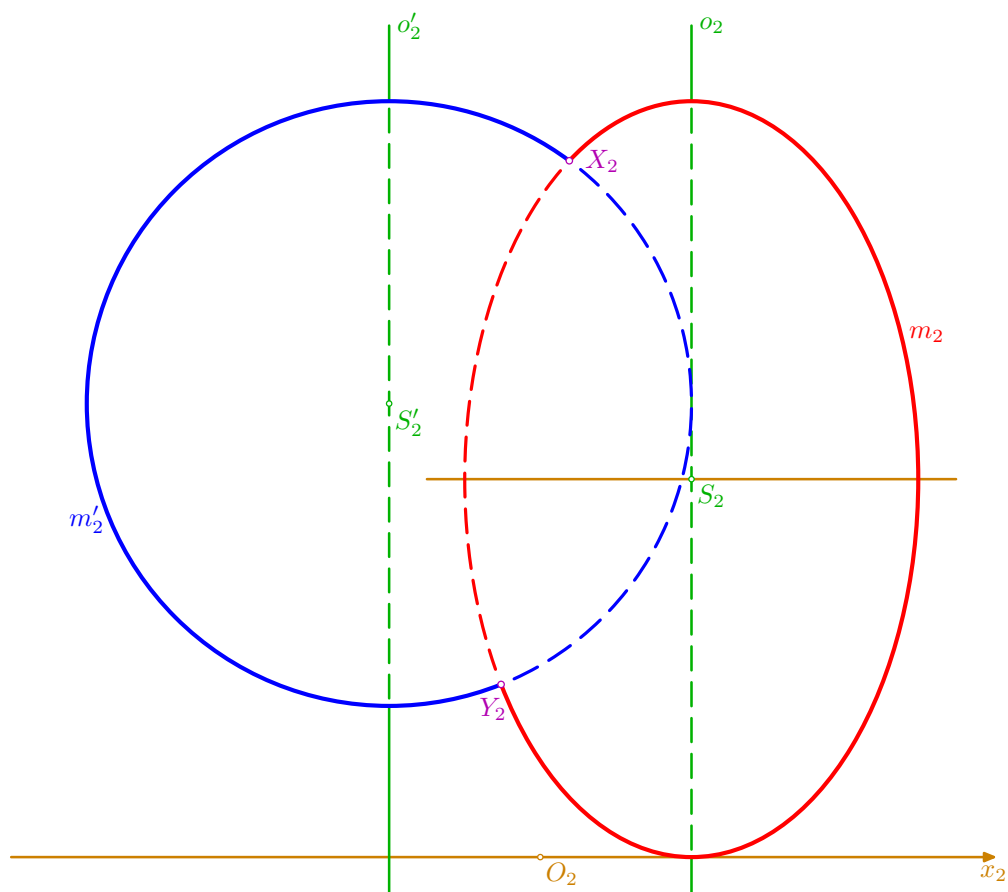
Příklad: V kolmém promítání na nárysnu sestrojte průnik rotačního vejčitého elipsoidu s kulovou plochou; elipsoid má střed S , svislou osu o a délky a, b hlavní a vedlejší poloosy; kulová plocha je dána středem S' a poloměrem r ; $S[2; 0; 5], a = 5, b = 3, S'[-2; 0; 6], r = 4$.

Kolmé promítání na nárysnu je téměř totéž jako Mongeovo promítání bez půdorysu, tj. jen nárys, namísto půdorysu užíváme sklápění rovin rovnoběžných s půdorysnou do náryсны. . .

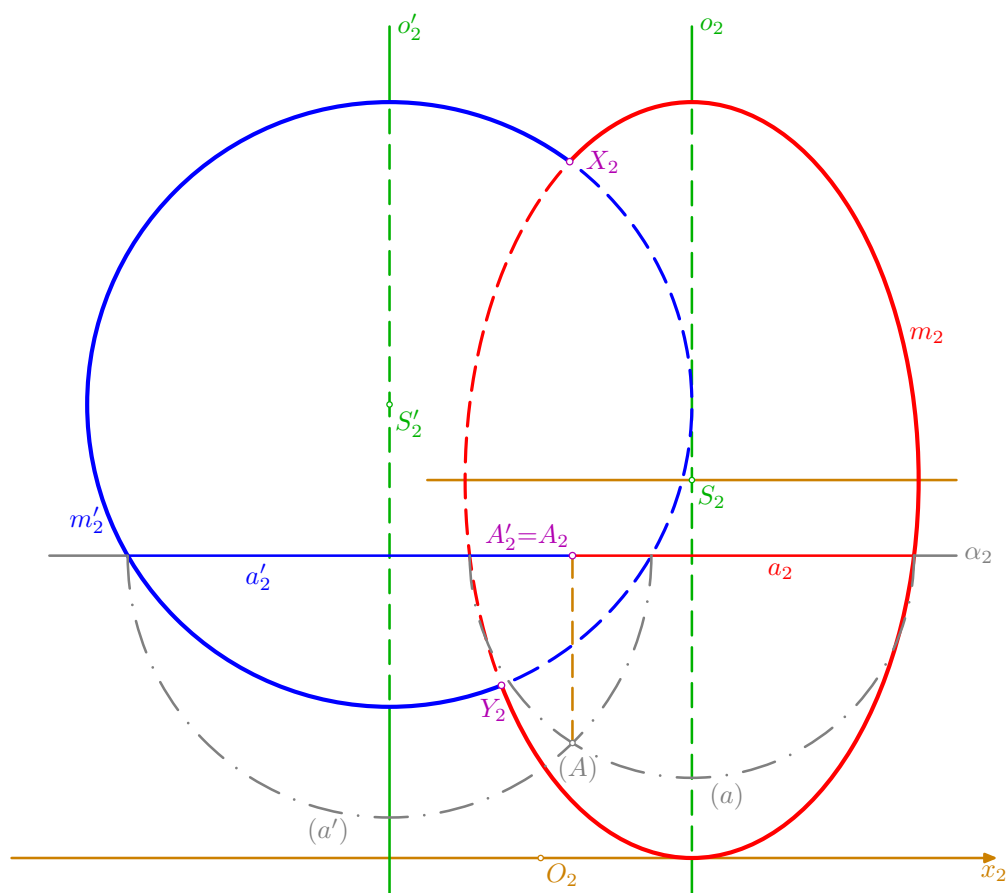
- podle zadání sestrojme nárysy S_2, S'_2 středů S, S' daných ploch; osa o elipsoidu je svislá, tj. $o_2 \perp x_2$ a $S_2 \in o_2$; elipsoid protíná nárysnu v elipse $m = m_2$ hlavního meridiánu, která má hlavní osu na přímce $o = o_2$ a zadané délky $a = 5, b = 3$ hlavní a vedlejší poloosy; daná kulová plocha protíná nárysnu v kružnici $m'(S', r = 4)$, která splývá se svým nárysem $m'_2(S'_2, r = 4)$; každou přímkou o' jdoucí bodem S' můžeme považovat za osu dané kulové plochy, pro naše účely zvolme $o' \parallel o$, tj. v náryse je $o'_2 \parallel o_2$ a $S'_2 \in o'_2$; tím máme dány dvě rotační plochy, které mají navzájem rovnoběžné osy rotace



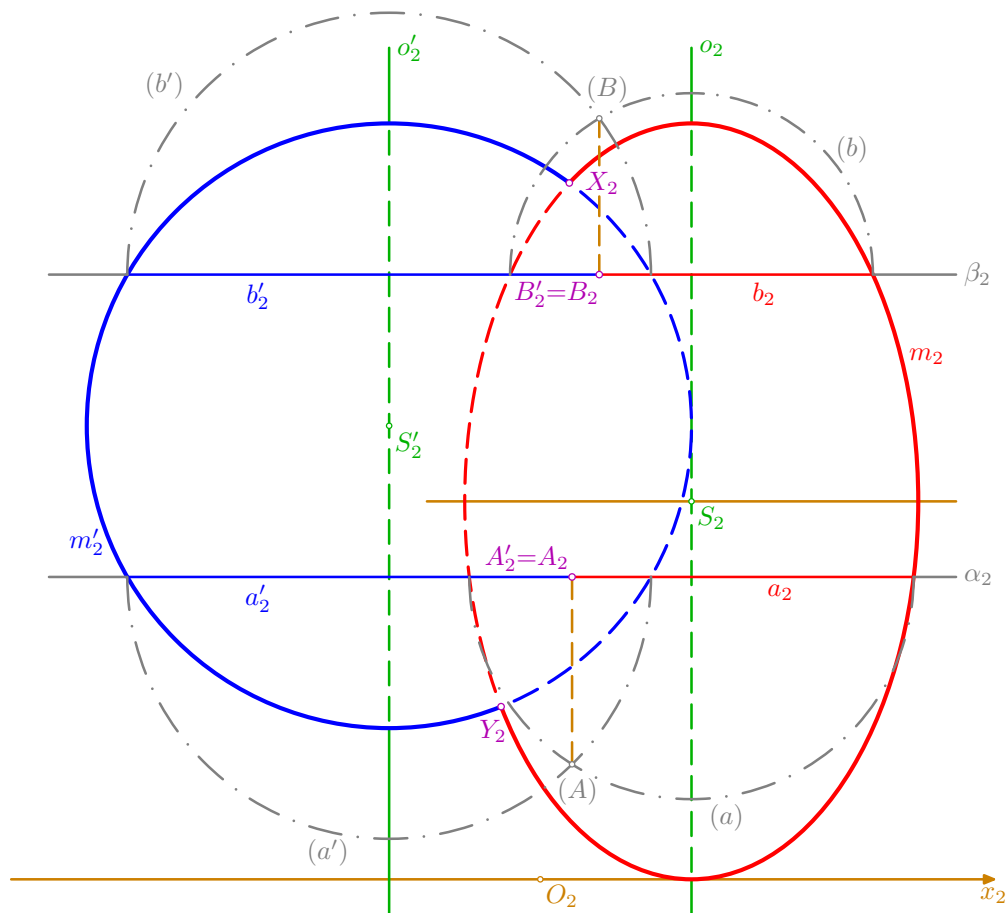
- nejprve sestrojme průsečíky X, Y hlavních meridiánových křivek m a m' ; k tomu účelu je vhodné, abychom měli elipsu m_2 vyrýsovanou pokud možno co nejpřesněji, minimálně s využitím oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, případně můžeme použít také zahradnickou konstrukci, která vychází z ohniskové definice elipsy (viz příslušnou pasáž o elipse na straně 174); jen tak se nám podaří dostatečně přesně určit průsečíky X_2, Y_2 elipsy m_2 s kružnicí m'_2 ; bod $X = X_2$, resp. bod $Y = Y_2$, je nejvyšším, resp. nejnižším, bodem hledané průnikové křivky



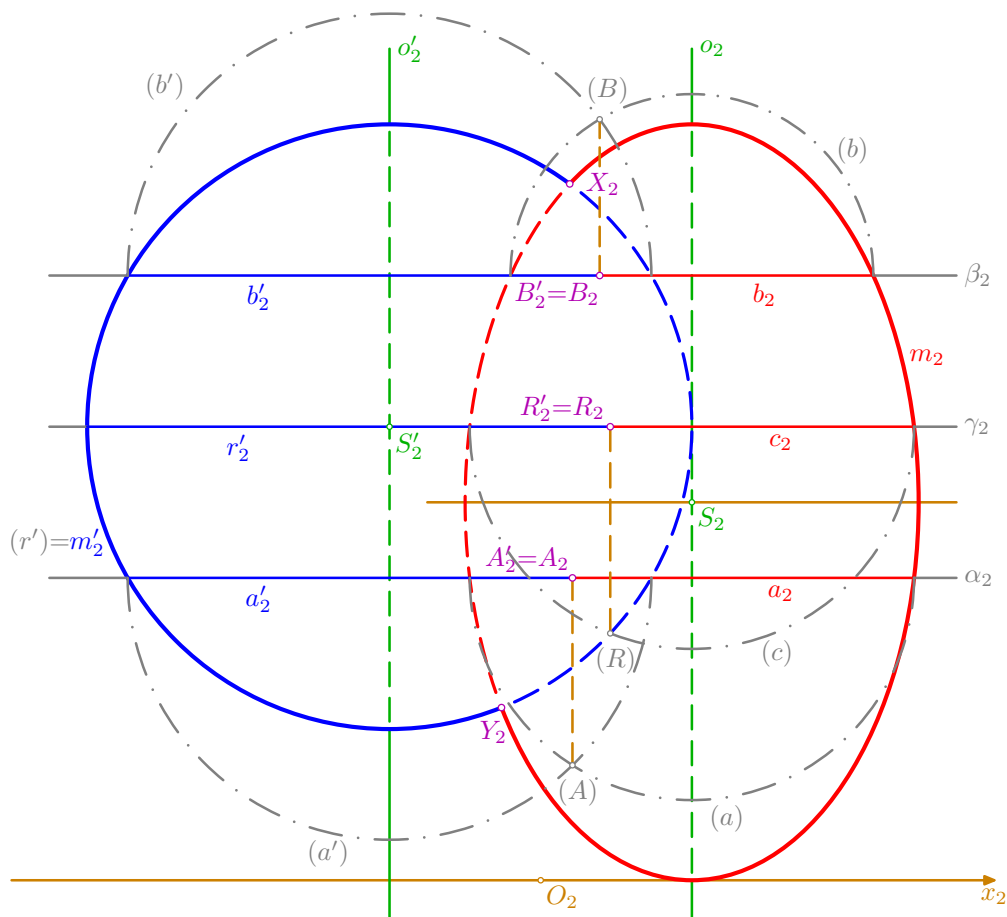
- někde mezi sestrojenými body X, Y vedme pomocnou rovinu α , která je kolmá k oběma osám o, o' daných ploch; rovina α pak protíná elipsoid i kulovou plochu v rovnoběžkových kružnicích a a a' , jejichž průsečíky A, A' jsou další dva body hledaného průniku; nárysem roviny α je přímka $\alpha_2 \perp o_2$, kružnice a, a' se v náryse jeví jako úsečky a_2, a'_2 , jejichž středy leží na příslušných osách o_2, o'_2 a krajní body na příslušných meridiánových křivkách m_2, m'_2 ; nárysy průsečíků A, A' kružnic a, a' určíme v průmětu pomocí sklopení roviny α do náryсны: pro větší přehlednost sestrojme pouze dolní poloviny sklopených poloh $(a), (a')$ kružnic a, a' , najdeme jejich průsečík (A) a odvodíme jej zpět do nárysu $A_2 \in \alpha_2$; dané plochy jsou podle zadání zřejmě souměrné podle náryсны, což platí také pro jejich rovnoběžkové kružnice a, a' a pro jejich průsečíky A, A' ; odtud vyplývá, že pro nárys A'_2 bodu A' platí $A'_2 = A_2$ (pro jejich y -ové souřadnice platí $y_A = |A_2(A)| = -y_{A'}$)



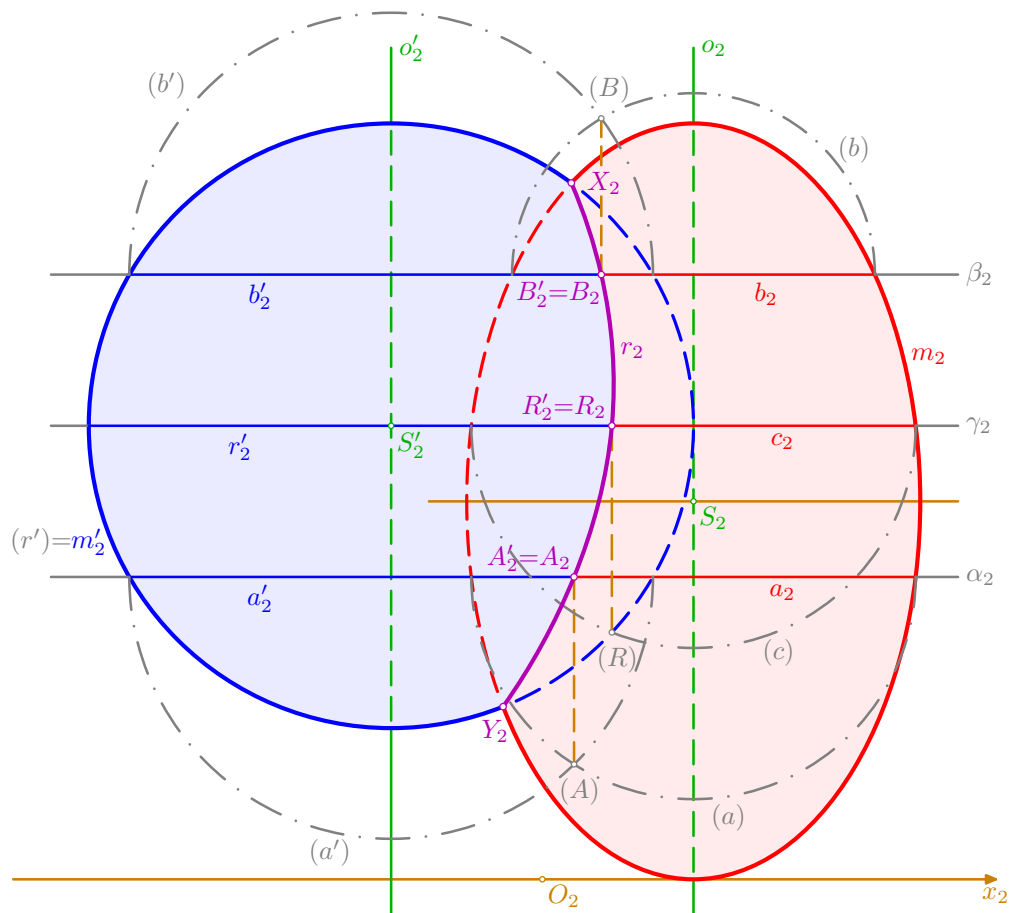
- princip popsaný v předchozím kroku nazvěme **metodou rovnoběžných rovin** a analogicky ho použijme ke konstrukci dalších bodů hledaného průniku obou daných ploch; takto je tedy sestaven také splývající nárys $B'_2 = B_2$ bodů B, B' , v nichž se protínají rovnoběžkové kružnice b, b' , které leží v další zvolené rovině $\beta \parallel \alpha$; pro přehlednost dalších konstrukcí bylo tentokrát sklopení provedeno směrem nahoru, výsledek na tom zřejmě nezávisí



- vyplníme ještě mezeru mezi rovinami α, β a ved'eme středem S' kulové plochy rovinu $\gamma \parallel \alpha$; ta protíná daný vejčítý elipsoid v rovnoběžkové kružnici c a danou kulovou plochu v rovníku r' ; sklopenou polohu (c) poloviny kružnice c sestrojíme obdobně jako v předchozích krocích, sklopená poloha (r') rovníku r' splývá s meridiánem $m'_2 = (r')$; půlkružnice $(c), (r')$ se protínají v bodě (R) , ten odvodíme zpět na nárys γ_2 roviny γ do splývajícího nárysu $R_2 = R'_2$ souměrných průsečíků R, R' kružnic c, r' ; kdybychom chtěli pro zajímavost doplnit půdorys této úlohy, měnila by se právě v půdorysech R_1, R'_1 bodů R, R' viditelnost půdorysu průnikové křivky – zvědavý čtenář nechť si to rozhodně zkusí načrtnout, či narýsovat, např. do volného místa v následujícím závěrečném obrázku této konstrukce...



- obě dané plochy jsou kvadriky, tj. plochy druhého stupně, a odtud lze odvodit, že jejich průniková křivka r je stupně čtvrtého, tzv. **kvartika**; podle předchozího je křivka r souměrná podle náryсны, a každá z jejích polovin ležících v opačných poloprostorech určených nárysnou se promítá do téže křivky r_2 , která má krajní body X_2, Y_2 a mezi nimi prochází po dvou splývavých bodech $B_2 = B'_2, R_2 = R'_2, A_2 = A'_2$; dá se dokázat, že křivka r_2 je částí jisté paraboly...

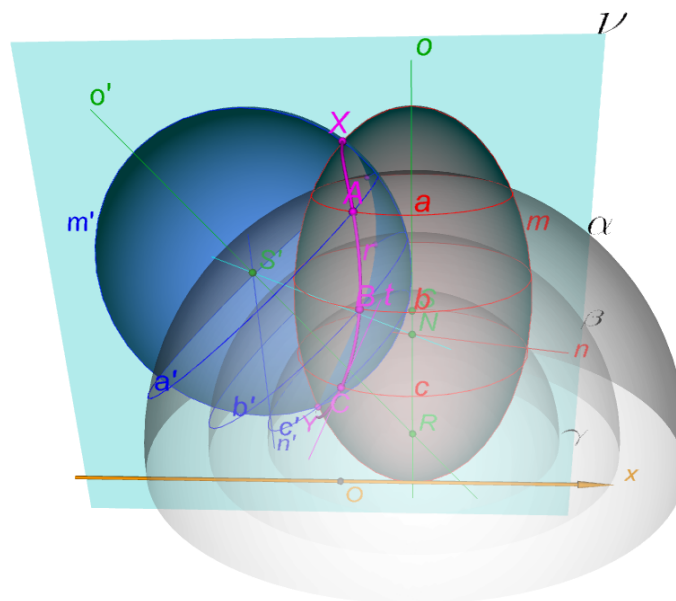


□

3.3.2. Průnik rotačního vejčitého elipsoidu a kulové plochy v kolmém promítání na nárysnu (varianta různoběžných os – metoda soustředných kulových ploch)

Výklad

- pro danou kulovou plochu zvolme její osu rotace tak, aby byla různoběžná s osou rotace daného elipsoidu
- veďme pak soustavu několika soustředných kulových ploch, které mají společný střed v průsečíku os rotace daných ploch, tyto pomocné sféry protnou obě plochy v rovnoběžkových kružnicích a jejich průsečíky jsou body hledané průnikové křivky – odtud název metody použitý v nadpise

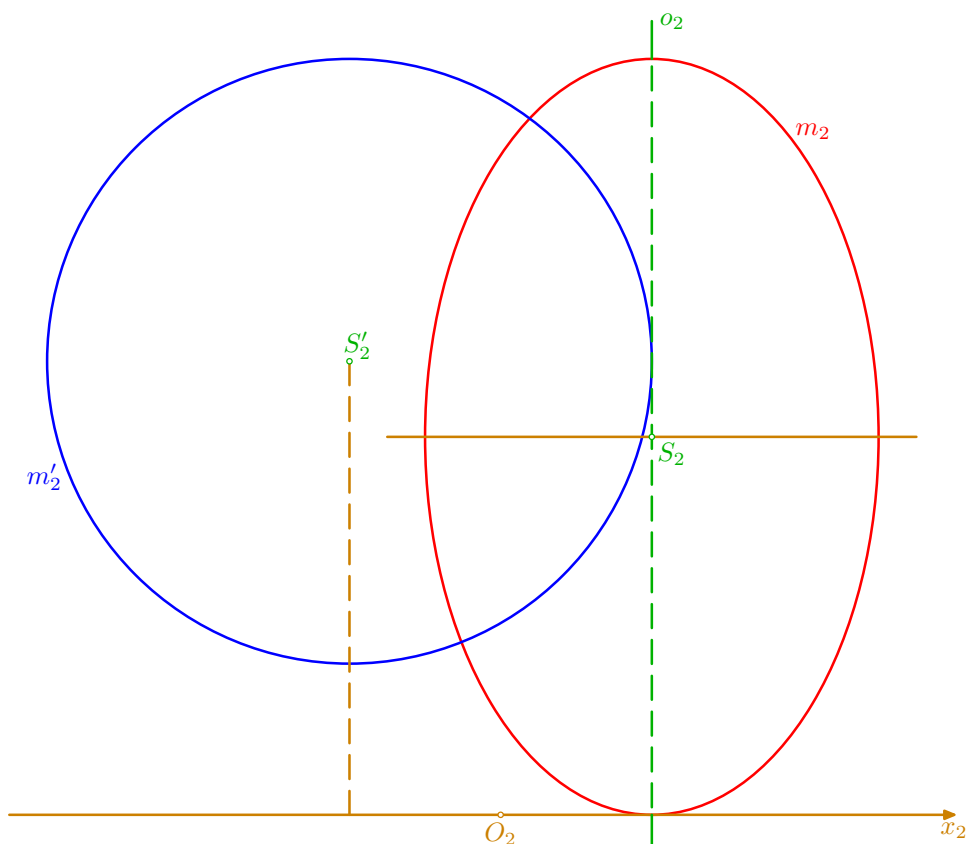




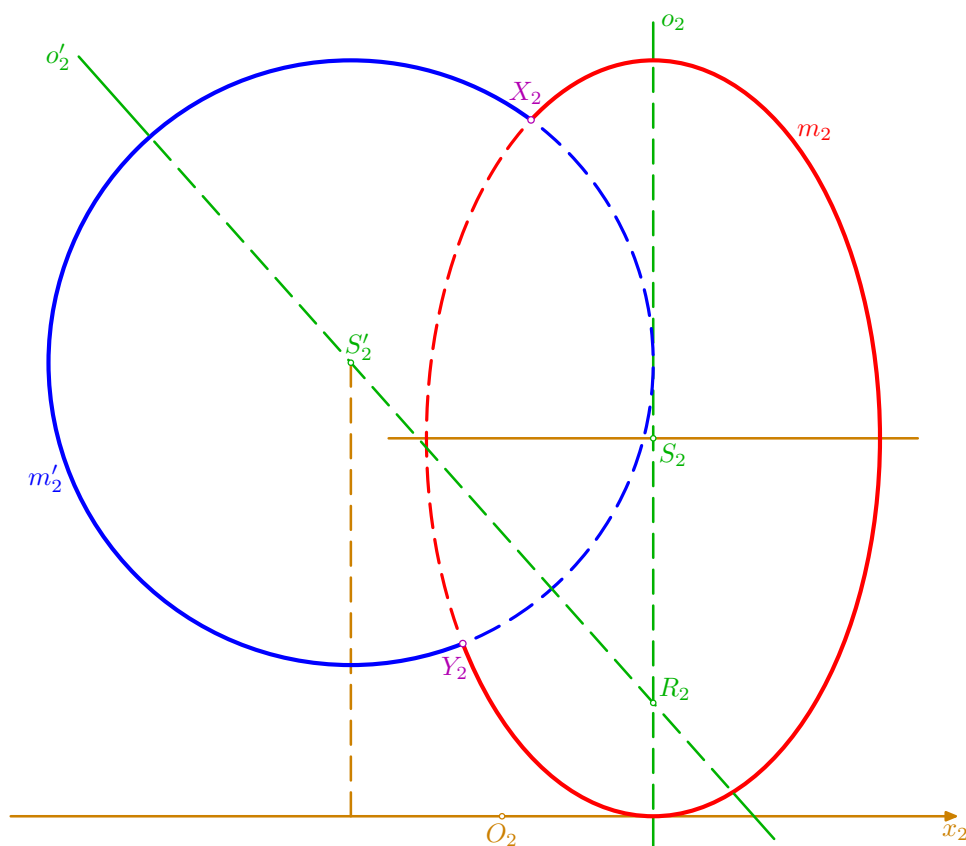
Řešené úlohy

Příklad: V kolmém promítání na nárysnu sestrojte průnik rotačního vejčitého elipsoidu s kulovou plochou; elipsoid má střed S , svislou osu o a délky a, b hlavní a vedlejší poloosy; kulová plocha je dána středem S' a poloměrem r ; $S[2; 0; 5]$, $a = 5, b = 3$, $S'[-2; 0; 6]$, $r = 4$.

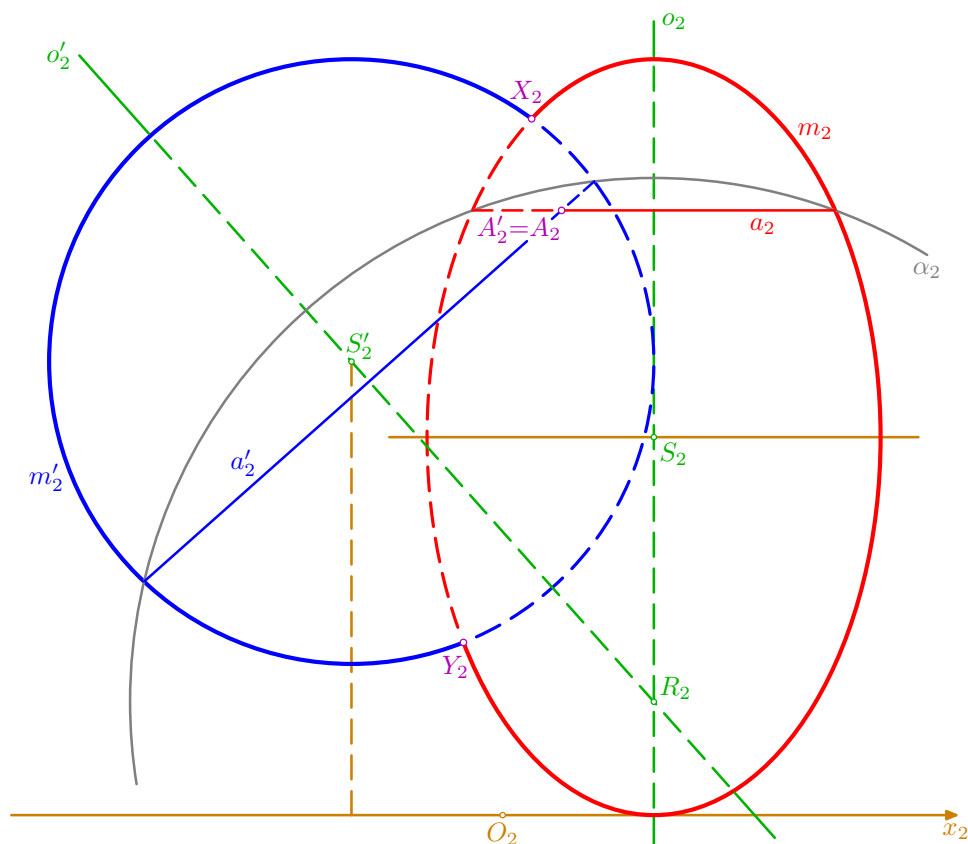
- podle zadání sestrojme nárysy S_2, S'_2 středů S, S' daných ploch; osa o elipsoidu je svislá, tj. $o_2 \perp x_2$ a $S_2 \in o_2$; elipsoid protíná nárysnu v elipse $m = m_2$ hlavního meridiánu, která má hlavní osu na přímce $o = o_2$ a zadané délky $a = 5, b = 3$ hlavní a vedlejší poloosy; daná kulová plocha protíná nárysnu v kružnici $m'(S', r = 4)$, která splývá se svým nárysem $m'_2(S'_2, r = 4)$



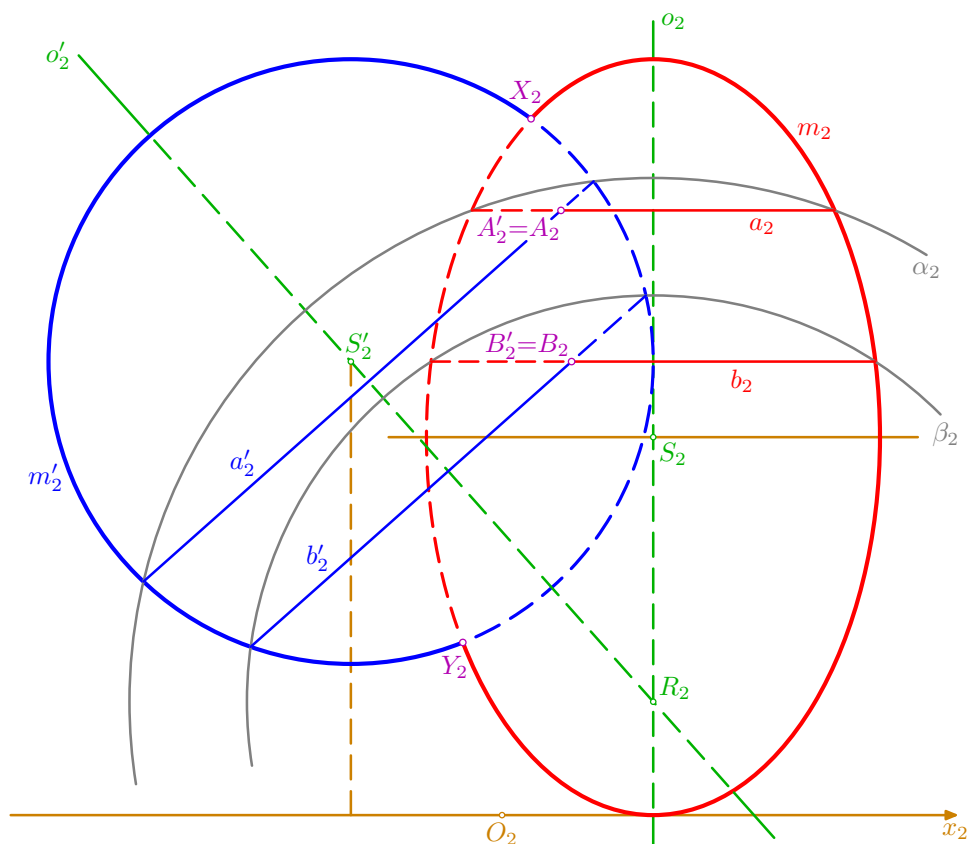
- nejprve sestrojme průsečíky X, Y hlavních meridiánových křivek m a m' ; k tomu účelu je vhodné, abychom měli elipsu m_2 vyrýsovanou pokud možno co nejpřesněji, minimálně s využitím oblouků hyperoskulačních kružnic v jejích vrcholech, případně můžeme použít také zahradnickou konstrukci, která vychází z ohniskové definice elipsy (viz příslušnou pasáž o elipse na straně 174); jen tak se nám podaří dostatečně přesně určit průsečíky X_2, Y_2 elipsy m_2 s kružnicí m'_2 ; bod X , resp. bod Y , je nejvyšším, resp. nejnižším, bodem hledané průnikové křivky; pro další postup konstrukcí zvolenou **metodou soustředných kulových ploch** zvolme na ose o elipsoidu bod R (je celkem lhostejno, kde) a přímku $o' = RS'$ považujme za osu rotace dané kulové plochy; máme tak sestrojít průnik dvou rotačních ploch s různoběžnými osami; bod $R \in o$ i osa $o' = RS'$ leží v nárýsně a splývají tedy se svými nárýsy $R_2 \in o_2$ a $o'_2 = R_2S'_2$



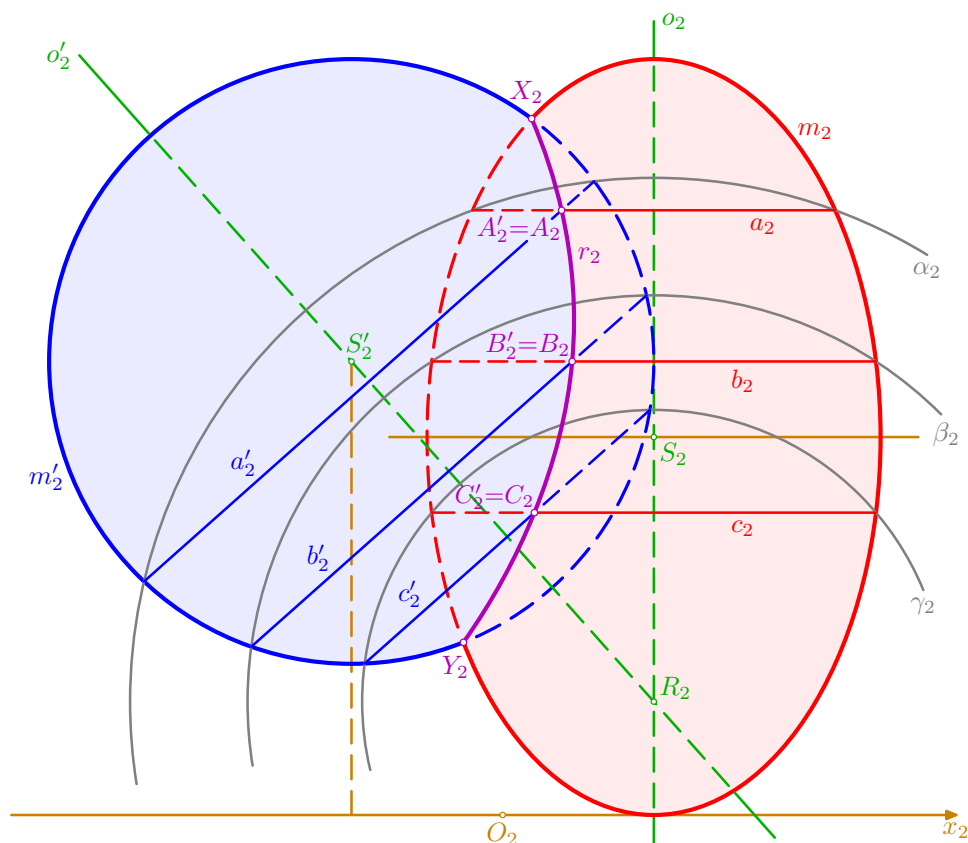
- libovolně vhodně zvolme pomocnou kulovou plochu α se středem v bodě $R = o \cap o'$, v náryse sestrojme část její hlavní meridiánové kružnice a označme ji α_2 ; zvolená pomocná kulová plocha α protíná daný elipsoid i danou kulovou plochu v rovnoběžkových kružnicích a a a' , jejichž průsečíky A, A' jsou další dva body hledaného průniku; kružnice a, a' se v náryse jeví jako úsečky $a_2 \perp o_2, a'_2 \perp o'_2$, jejichž středy leží na příslušných osách o_2, o'_2 a krajní body jsou průsečíky příslušných meridiánových křivek m_2, m'_2 s kružnicí α_2 ; bod $A_2 = A'_2 = a_2 \cap a'_2$ je pak nárysem hledaných průsečíků A, A' kružnic a, a'



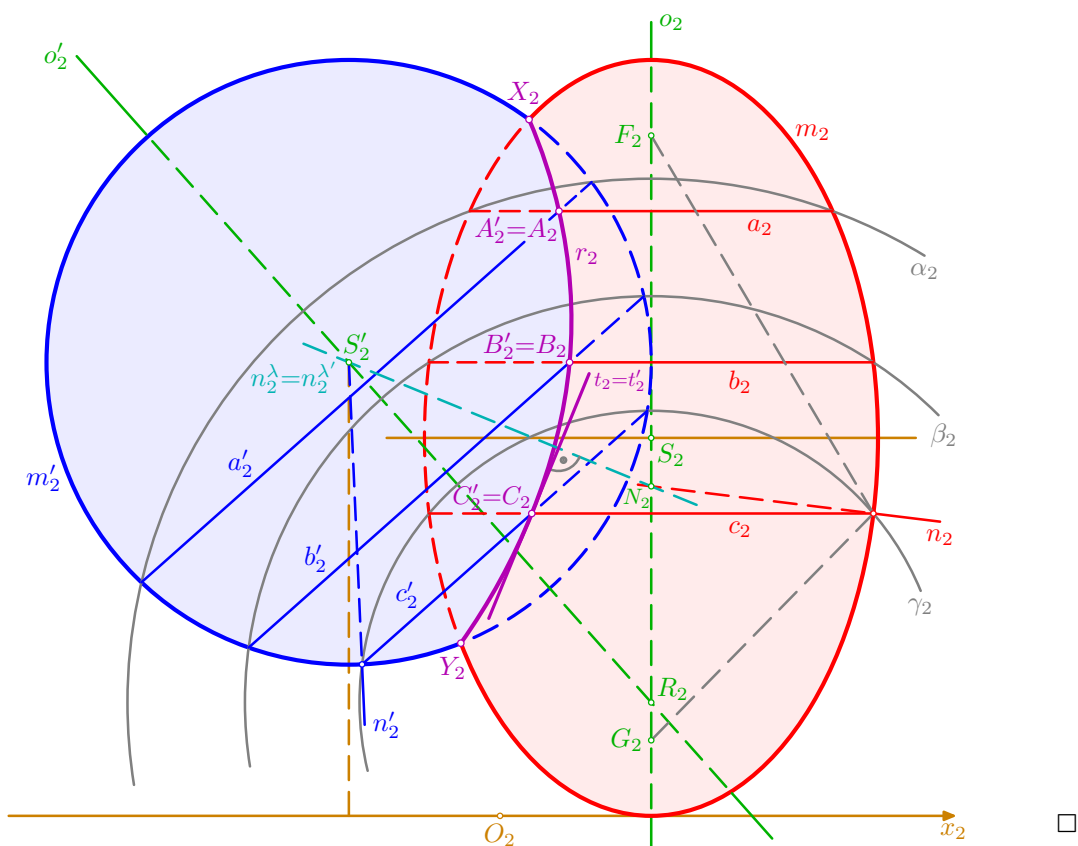
- princip popsaný v předchozím kroku analogicky použijme ke konstrukci dalších bodů hledaného průniku obou daných rotačních ploch; takto je tedy sestaven také splývající nárys $B'_2 = B_2$ bodů B, B' , v nichž se protínají rovnoběžkové kružnice b, b' , které leží na další zvolené kulové ploše β , jejíž střed je opět v bodě R (proto metoda **soustředných** kulových ploch); kružnice β_2 je hlavním meridiánem zvolené kulové plochy β , její průsečíky s meridiány m_2, m'_2 jsou krajní body úseček $b_2 \perp o_2, b'_2 \perp o'_2$, do nichž se v náryse promítnou kružnice b, b' ; bod $B_2 = B'_2$ je pak průsečíkem sestavených úseček b_2, b'_2



- stejným způsobem popsaným v předchozích dvou krocích doplníme ještě splývající nárys $C_2 = C'_2$ průsečíků C, C' rovnoběžkových kružnic c, c' , v nichž protíná dané rotační plochy další zvolená kulová plocha γ (která má opět střed v bodě R); obě dané rotační plochy jsou kvadriky, tj. plochy druhého stupně, a odtud lze odvodit, že jejich průniková křivka r je stupně čtvrtého, tzv. **kvartika**; podle zadání jsou dané plochy a tedy i jejich průniková křivka r souměrné podle nárysnou, a každá z jejích polovin ležících v opačných poloprostorech určených nárysnou se promítá do téže křivky r_2 , která má krajní body X_2, Y_2 a mezi nimi prochází po dvou splývajícími body $A_2 = A'_2, B_2 = B'_2$ a $C_2 = C'_2$; dá se dokázat, že křivka r_2 je částí jisté paraboly...



- na závěr ukažme, jak lze sestrojít nárys tečny v některém průnikovém bodě, vyberme např. bod C ; nejprve prostorový princip konstrukce: tečna t v bodě C průnikové křivky r musí být kolmá k tzv. normálové rovině λ křivky r v tomto bodě; dá se ukázat, že rovina λ je určena normálami obou daných rotačních ploch, vztyčenými v uvažovaném bodě C ; v průmětu postupujeme takto: v jednom z krajních bodů úsečky c_2 sestrojme normálu n_2 meridiánové elipsy m_2 (podle **Věty 1** na straně 184 pólí normála vnitřní úhel průvodičů) a najdeme její průsečík $N_2 = n_2 \cap o_2$; při rotaci normály $n = n_2$ kolem osy $o = o_2$ zůstává bod $N = N_2$ na místě, normálou daného elipsoidu v bodě C je tedy přímka CN – pro naše účely ji není třeba v průmětu sestrojovat, postačí znalost jejího nárysného stopníku $N = N_2$; normála v libovolném bodě dané kulové plochy musí procházet jejím středem $S' = S'_2$, který je současně nárysným stopníkem každé z těchto normál; přímka $n_2^\lambda = N_2S'_2$ je tedy nárysnou stopou zmíněné normálové roviny λ a pro nárys t_2 tečny $t \perp \lambda, C \in t$, platí $t_2 \perp n_2^\lambda, C_2 \in t_2$; ze souměrnosti podle nárysu vyplývá, že tytéž konstrukce lze provést pro sestrojení nárysu t'_2 tečny t' v bodě C' průnikové křivky r



4. Úlohy k samostatnému řešení

Šroubové plochy

1. Je dána osa $o \perp \pi$, $R \in o$ šroubového pohybu a přímka $t = PQ$. V Mongeově promítání zobrazte část rozvinutelné šroubové plochy vzniklé šroubováním přímky t . Plochu omezte hranou vratu a půdorysnou π .

$$R[0; 5; 0], P[-2; 12; 0], Q[4; 5; 6]$$

2. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit schodové plochy, která vznikne šroubováním úsečky AB ; pravotočivý šroubový pohyb je dán osou $o \perp \pi$, $B \in o$ a výškou závitu v ; v bodě T plochy sestrojte tečnou rovinu τ .

$$A[4; 5; 0], B[0; 5; 0], v = 12, T[-3; 4; ?]$$

3. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit přímého šroubového konoidu, který vytvoří úsečka AB ; pravotočivý šroubový pohyb je dán osou $o \perp \pi$, $R \in o$ a výškou závitu v ; v bodě T sestrojte tečnou rovinu a normálu plochy.

$$R[0; 7; 0], v = 12, A[-2; 7; 0], B[-5; 7; 0], T[3; ?; 5]$$

4. Levotočivý šroubový pohyb je dán osou $o \perp \pi$, $R \in o$ a redukovanou výškou závitu v_0 . V Mongeově promítání zobrazte jeden závit plochy, která vznikne šroubováním úsečky AB ; v bodě T plochy sestrojte tečnou rovinu a doplňte celý název plochy.

$$R[0; 7; 0], A[0; 10; 0], B[5; 10; 0], v_0 = 2, T[-4; 5; ?]$$

5. V Mongeově promítání zobrazte jeden závit pravotočivé vývrtkové plochy, která vznikne šroubováním úsečky AB kolem osy $o \perp \pi$, $B \in o$, výška závitu je v ; v bodě T plochy sestrojte tečnou rovinu.

$$A[-5; 6; 0], B[0; 6; 2], T[1; 5; ?], v = 9, 6$$

Řezy těles a jejich průniky s přímkou

1. V pravouhlé axonometrii $\Delta(6; 7; 5; 8)$ je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavou o středu S a vrcholu A v půdorysně a s výškou v ; sestrojte jeho řez rovinou ρ .

$$S[0; 0; 0], A[0; 5; 0], v = 9, \rho(12; 6; 4)$$

2. V dimetrii $\Delta(6; 10; 10)$ je dán kosý čtyřboký jehlan čtvercovou podstavou o středu S a vrcholu A v půdorysně π ; vrchol jehlanu je v bodě V . Sestrojte řez jehlanu rovinou ρ .

$$S[4; 5; 0], A[-1; 6; 0], V[0; 0; 12], \rho(7; \infty; 7)$$

3. V izometrii sestrojte řez rotační válcové plochy s řídicí kružnicí $k(S, r)$ v půdorysně π rovinou α .

$$S[2; 1; 0], r = 4, \alpha(\infty, 5; 4)$$

4. V pravoúhlé axonometrii $\Delta(12; 11; 10)$ zobrazte řez rotační válcové plochy s řídicí kružnicí $k(S, r)$ v půdorysně π rovinou α .

$$S[4; 4; 0]; r = 3, 5; \alpha(9; \infty; 8)$$

5. V izometrii určete průnik přímky $a = KL$ s kosým kruhovým kuzelem, který má podstavu o středu S a poloměru r v půdorysně π a hlavní vrchol V .

$$K[4, 5; -2; 1, 5], L[1; 4; 1], S[0; 2; 0], r = 5; V[4; 6; 10]$$

6. V izometrii je dán trojboký kosý hranol podstavou ABC a vrcholem A' . Sestrojte jeho průnik s přímkou $r = MN$.

$$A[6; 1; 0], B[5; 5; 0], C[1; 5; 0], A'[0; 3; 8], M[7; 0; 7], N[0; 7; 2]$$

Rotační plochy, jejich řezy a průniky

1. Protáhlý (vejčitý) elipsoid je určen ohnisky F, G (přímka $o = FG$ je osou rotace) a bodem M ; v Mongeově promítání sestrojte rovnoběžku, meridián a tečnou rovinu v bodě M .

$$F[0; 5; 4], G[0; 5; 9], M[-3; 7; 10]$$

2. V Mongeově promítání zobrazte protáhlý (vejčitý) elipsoid, který je určen ohnisky F, G (přímka $o = FG$ je osou rotace) a tečnou rovinou τ .

$$F[0; 4; 9], G[0; 4; 4], \tau(-3; 7; 3)$$

3. V Mongeově promítání sestrojte řez jednodílného rotačního hyperboloidu, který má osu $o \perp \pi$, střed S a délky poloos a, b , rovinou ρ .

$$S[0; 6; 5], a = b = 2,5, \rho(7; \infty; 2,5)$$

4. V Mongeově promítání sestrojte řez rovinou ρ na jednodílném rotačním hyperboloidu, který má osu $o \perp \pi$, střed S a délky poloos a, b .

$$S[0; 7; 6], a = 2,5, b = 3, \rho(1; \infty; -3)$$

5. Sestrojte řez rotačního kuželu, který má vrchol V a podstavu o poloměru r v π , rovinou ρ . Proveďte v Mongeově promítání.

$$V[0; 4; 6], r = 4, \rho(-6; \infty; 2)$$

6. V Mongeově promítání sestrojte řez rovinou ρ na rotační kuželové ploše, která má vrchol V a řídicí kružnici o poloměru r v π .

$$V[0; 4; 3], r = 4, \rho(1; \infty; -4)$$

7. V Mongeově promítání sestrojte průnik přímky $p = PN$ s rotačním paraboloidem, který má vrchol V , svislou osu o a půdorysnu protíná v rovnoběžkové kružnici o poloměru r .

$$V[0; 4; 5; 9, 5], r = 4,5, P[8; 12; 0], N[-3; 0; 7]$$

8. V pravouhlém promítání na nárysnu zobrazte množinu všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S vzdálenost r a od dané přímky $o = MN$ vzdálenost r' .

$$S[0; 0; 2], r = 4, M[-2; 0; 0], N[-2; 0; 7]; r' = 3$$

9. V pravouhlém promítání na nárysnu zobrazte množinu všech bodů v prostoru, které mají od dané přímky $o = AB$ vzdálenost r a od dané přímky $o' = CD$ vzdálenost r' .

$$A[0; 0; 0], B[0; 0; 6], r = 3, C[4; 0; 0], D[-5; 0; 4], r' = 2$$

10. V pravouhlém promítání na nárysnu sestrojte průnik rotačního paraboloidu, který má vrchol V a ohnisko F , s kulovou plochou $\kappa(S, r)$; v libovolném bodě průnikové křivky doplňte její tečnu.

$$V[0; 0; 9], F[0; 0; 7], S[3; 0; 5], r = 4$$

11. V Mongeově promítání sestrojte průnik rotačního kužele, který má podstavou kružnici $k(S, r)$ v π a výšku v , s kulovou plochou $\kappa(S', r')$.

$$S[0; 5; 0], r = 4, v = 9, S'[-3; 5; 4], r' = 4$$

Literatura**Literatura**

- [1] Černý, J. - Kočandrllová, M.: Konstruktivní geometrie. Praha, ČVUT 1998.
- [2] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1965, 1967.
- [3] Piska, R. - Medek, V.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1966.
- [4] Drábek, K. - Harant, F. - Setzer, O.: Deskriptivní geometrie I, II. Praha, SNTL 1978.
- [5] Doležal, J.: Základy geometrie. Ostrava, VŠB-TU 2006.