3.11 Střídavé proudy

1. Naučit se odvození vztahu pro okamžitý a průměrný výkon střídavého proudu, znát fyzikální význam účiníku.
2. Umět použít fázorový diagram na vysvětlení vztahu mezi napětím a proudem u jednoduchých obvodů střídavého proudu.

3.11.1. Vznik a vlastnosti střídavých proudů

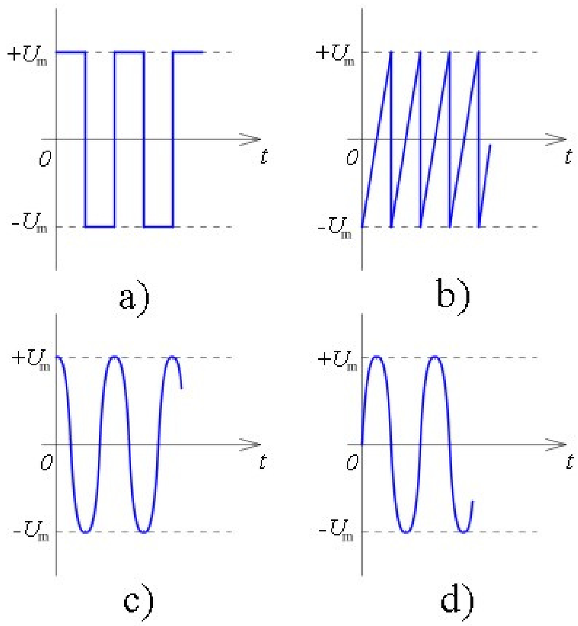
Již v podkapitole 3.8.2 jste se setkali se způsobem převodu mechanické energie na elektrickou, k němuž dochází v generátoru proudu: v homogenním magnetickém poli jsme nechali rotovat jednoduchou smyčku (Obr. 3.8.-6). V této kapitole budeme psát okamžité hodnoty napětí a proudu malými písmeny a amplitudy s dolním indexem m , proto přepišme vztah (3.8.-15) do tvaru

$u = U_m \sin\omega t.$ 3.11.-1

Veličinu ω budeme nazývat úhlová frekvence, t je samozřejmě čas. Závislost napětí na čase tvaru (3.11.-1) je speciálním případem střídavého napětí, které je obecně periodickou funkcí času

$u\,(t) = u(t + kT),$ 3.11.-2

kde k je celé číslo. Několik typických tvarů periodické funkce u je načrtnuto na Obr. 3.11.-1. Se střídavým napětím je spjat střídavý proud, který má stejnou periodu, ale není vždy ve fázi s napětím (o fázovém posunutí více v podkapitole 3.11.2). Budeme se zabývat výhradně **kvazistacionárními obvody** se střídavým proudem či napětím, tedy těmi, jež splňují tuto podmínku: V daném okamžiku je odchylka elektrického proudu v různých průřezech nerozvětveného vodiče zanedbatelná. Pro kvazistacionární obvody platí Kirchhoffovy zákony.



Obr. 3.11.-1

Nechť má střídavé napětí průběh podle (3.11.-1) a proud má počáteční fázi $-\varphi$ a rovněž harmonický průběh. Pak okamžitý výkon střídavého proudu je:

$p = ui = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi).$ 3.11.-3

Upravme výraz $2\sin\omega t \sin(\omega t - \varphi)$.pomocí goniometrických identit

$$2\sin\omega t\sin(\omega t-\varphi)=2\sin\omega t[\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi]=2\sin^2\omega t\cos\varphi-2\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi=$$

$$=\cos\varphi\left[\underbrace{1-\cos^2\omega t}_{\sin^2\omega t}+\sin^2\omega t\right]-\underbrace{2\sin\omega t\cos\omega t}_{\sin 2\omega t}\sin\varphi=\cos\varphi-\cos\varphi\left(\underbrace{\cos^2\omega t-\sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)-\sin 2\omega t\sin\varphi=$$

$$=\cos\varphi-\cos 2\omega t\cos\varphi-\sin 2\omega t\sin\varphi=\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)$$

a dosaďme do (3.11.-3):

$$p=\frac{U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}}{2}[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]. \qquad 3.11.\text{-}4$$

Položíme-li

$$I=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \qquad 3.11.\text{-}5$$

a

$$U=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}, \qquad 3.11.\text{-}6$$

můžeme psát

$$p=UI[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]. \qquad 3.11.\text{-}7$$

U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu. Okamžitý výkon se tedy skládá z na čase nezávislé části $UI\cos\varphi$ a z periodicky proměnlivé části, které přísluší dvojnásobná frekvence než proud i napětí. Z geometrické interpretace určitého integrálu vyplývá, že střední výkon střídavého proudu za periodu vypočteme jako podíl integrálu okamžitého výkonu v mezích od 0 do T a periody T:

$$\overline{P}=\frac{\int_0^T p\mathrm{d}t}{T}.$$

Po dosazení okamžitého výkonu z (3.11.-7) a integraci získáte vztah:

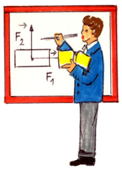
$$\overline{P}=UI\cos\varphi. \qquad 3.11.\text{-}8$$

Výkon $\overline{P}$ je **činný výkon** a $\cos\varphi$ **účiník**.

Do obvodu se střídavým proudem dodává energii generátor střídavého napětí. Obvod může obsahovat prvky s odporem, indukčností, případně kapacitou. Část dodané energie se vyskytuje v elektrickém poli kondenzátorů, část v magnetickém poli cívky a část se disipuje v materiálu s elektrickým odporem, tzn. mění se ve vnitřní energii odporového materiálu, nebo se užitečně spotřebuje na konání práce (např. v elektromotorech). Právě rychlost disipace energie a užitečného spotřebování energie (obvykle na konání mechanické práce) je činný výkon, neboť za předpokladu ustáleného stavu časová střední hodnota energie uložené v magnetickém poli cívky a v elektrickém poli kondenzátoru zůstává konstantní. Odtud vychází fyzikální smysl účiníku: **udává účinnost přenosu energie ze zdroje střídavého proudu do spotřebiče**.

KO 3.11.-1 Napište vztah pro okamžitou hodnotu výkonu střídavého proudu a popište veličiny v něm vystupující.

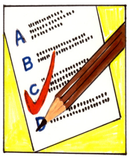
KO 3.11.-2 Pro střední výkon střídavého proudu za periodu platí ...., kde .... je účiník a .... činný výkon.



Jaká je maximální hodnota střídavého napětí, jehož efektivní hodnota je 220 V?
U = 220 V; U_m = ?

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_m = U\sqrt{2}$$

U_m = 311 V



TO 3.11.-1 Efektivní hodnota střídavého napětí I je:

a) průměrná hodnota střídavého proudu v časovém intervalu délky jedné poloviny periody.

b) $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

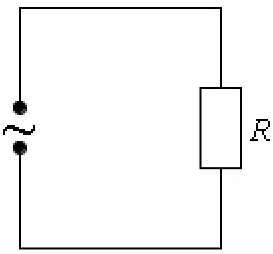
pozn. I_m je amplituda proudu, I má harmonický průběh časové závislosti.

3.11.2. Obvody střídavých proudů (kvazistacionární)

Nejprve diskutujme jednoduché obvody se střídavým proudem, které obsahují mimo generátoru harmonického střídavého napětí

$u = U_m \sin \omega t$ 3.11.-9

pouze jeden prvek.



Obr. 3.11.-2

Obvod s odporem R (Obr. 3.11.-2)
Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$u = u_R$. 3.11.-10

Pro napětí na rezistoru dostaneme

$u_R = U_m \sin \omega t = U_R \sin \omega t$. 3.11.-11

Amplituda U_R napětí na prvku s R je rovna amplitudě napětí generátoru. Podle Ohmova zákona lze vyjádřit proud rezistorem takto:

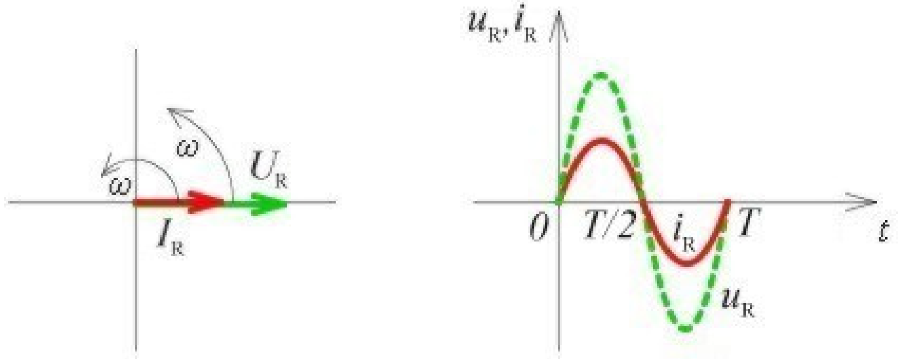
$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin \omega t = I_R \sin \omega t = I_R \sin(\omega t + \varphi).$$ 3.11.-12

To znamená, že fázový posuv φ mezi napětím a proudem je **nulový**, jinak řečeno, proud a napětí jsou na rezistoru **ve fázi** (Obr. 3.11.-3). V tomtéž okamžiku nabývají maximálních, případně minimálních hodnot. Souvislost mezi amplitudou proudu a napětí na rezistoru popisuje, jak plyne z (3.11.-11), vzorec:

$U_R = RI_R$. 3.11.-13

Elektrický odpor R se v obvodech střídavého proudu obvykle nazývá **rezistance.**

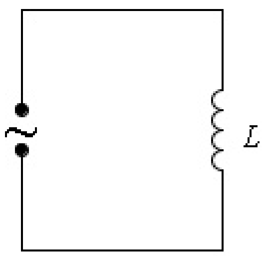
Časová závislost proudů a napětí se s výhodou znázorňuje **fázorovým diagramem** (Obr. 3.11.-3): představte si, že fázory napětí a proudu, tj. vektory znázorňující veličiny u_R a i_R v Gaussově rovině komplexních čísel, rotují se stejnou úhlovou frekvencí jako generátor



Obr. 3.11.-3 Průběh časové závislosti proudu a napětí na rezistoru, jenžto je připojen ke generátoru střídavého proudu. Pro názornost je nakreslen fázorový diagram.

střídavého proudu proti směru hodinových ručiček. Pak délka fázorů odpovídá amplitudě napětí a proudu, průmět fázoru na příslušné osy okamžité hodnotě napětí a proudu, úhel mezi fázorem a vodorovnou osou okamžité hodnotě fáze kmitání u_R a i_R.

Obvod s indukčností L (Obr. 3.11.-4)
Pro napětí na cívce dostaneme



Obr. 3.11.-4

$u_L = U_m \sin\omega t = U_L \sin\omega t.$ 3.11.-14

Amplituda U_L napětí na prvku s L je rovna amplitudě napětí generátoru. Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$u + u_L = 0.$ 3.11.-15

Na levé straně je skutečně součet elektromotorických napětí na všech zdrojích napětí. Na cívce se totiž podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce a Lenzova zákona indukuje napětí

$$u_L = -L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad 3.11.\text{-}16$$

jako důsledek změny magnetického indukčního toku v závitech cívky, který vyvolává proměnlivost proudu v čase. Úbytek napětí na odporech neexistuje, neboť je odpor všech vodičů v našem ideálním, ve skutečnosti neexistujícím obvodu, zanedbatelný. Dosaďme (3.11.-15) do (3.11.-14) a upravme:

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L}.$$

S přihlédnutím k (3.11.-1) je

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{U_L \sin\omega t}{L}. \qquad 3.11.\text{-}17$$

Amplituda napětí je přeznačena na U_L. Vztah (3.11.-17) je diferenciální rovnicí prvního řádu se separovatelnými proměnnými, jejíž řešením je funkce i_L proměnné t. Nejprve separujme proměnné a pak integrujme:

$$\mathrm{d}i_L = \frac{U_L}{L}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$
$$i_L = \frac{U_L}{L}\int \sin\omega t\,\mathrm{d}t = -\frac{U_L}{\omega L}\cos\omega t. \qquad 3.11.\text{-}18$$

Nahraďme kosinus sinem pomocí identity $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$:

$$i_L = \frac{U_L}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$ 3.11.-19

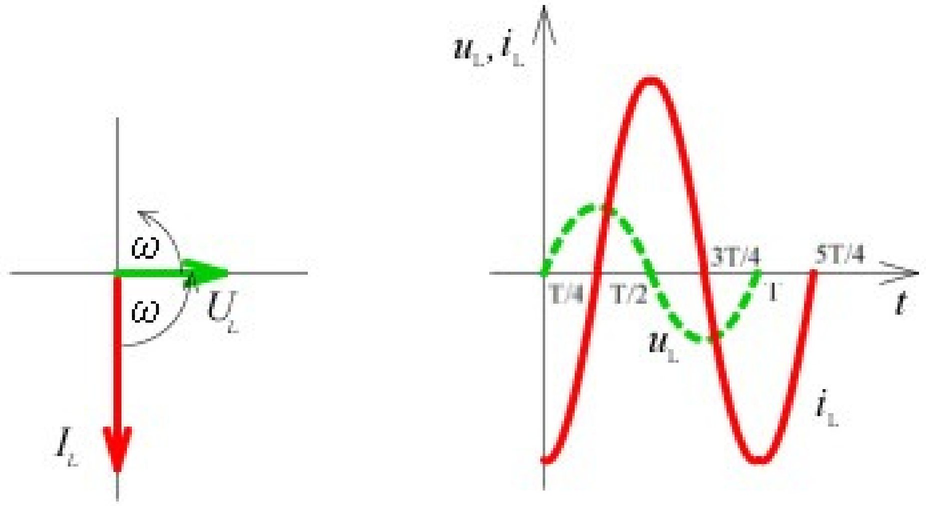
Srovnání závislostí (3.11.-17) a (3.11.-1) vede k závěru, že fázový posuv mezi napětím a proudem je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Na fázorovém diagramu rotuje fázor napětí před fázorem proudu; říkáme, že **napětí předbíhá proud** (Obr. 3.11.-5). Dle (3.11.-18) je amplitudou proudu I_L podíl $\frac{U_L}{\omega L}$. Zavedeme-li veličinu

$$X_L = \omega L,$$ 3.11.-20

která se nazývá **induktance** a má hlavní jednotku Ω (ohm), bude spojovat amplitudu proudu a napětí vztah

$$U_L = X_L I_L.$$ 3.11.-21

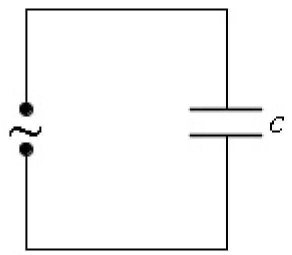
Pro amplitudy proudu a napětí platí (3.11.-21) na jakékoli bezodporové cívce v obvodu střídavého proudu.



Obr. 3.11.-5 Průběh časové závislosti proudu a napětí na cívce, která je připojena ke generátoru střídavého proudu. Pro názornost je nakreslen fázorový diagram.

Obvod s kapacitou C (Obr. 3.11.-6)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:



Obr. 3.11.-6

$$u = u_C.$$ 3.11.-22

Pro napětí na kondenzátoru dostaneme

$$u_C = U_m \sin\omega t = U_C \sin\omega t.$$ 3.11.-23

Amplituda U_C napětí na prvku s C je rovna amplitudě napětí generátoru. Náboj na deskách kondenzátoru je přímo úměrný napětí mezi nimi, přičemž konstantou úměrnosti je kapacita kondenzátoru. Navíc platí (3.11.-11). Pro náboj ihned dostaneme

$$q_C = Cu_C = CU_C\sin\omega t.$$ 3.11.-24

Derivací náboje podle času získáme proud:

$$i_C = \omega C U_C \cos\omega t.$$ 3.11.-25

Nahraďme kosinus sinem pomocí identity $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$:

$$i_C = \omega C U_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$ 3.11.-26

Fázový posuv mezi napětím a proudem je $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Na fázorovém diagramu rotuje fázor proudu před fázorem napětí; říkáme, že **proud předbíhá napětí** (Obr. 3.11.-7). Dle (3.11.-26) je amplitudou proudu I_C součin $\omega C U_C$. Zavedeme-li veličinu

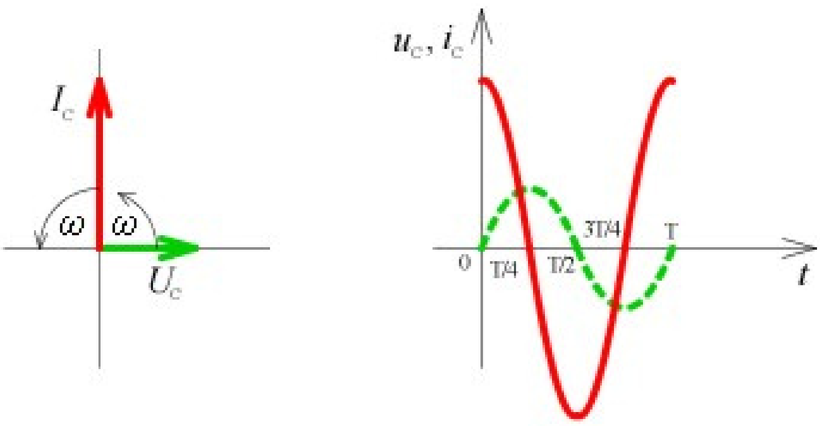
$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$ 3.11.-27

která se nazývá **kapacitance** (**kapacitní reaktance**) a má hlavní jednotku Ω (ohm), bude spojovat amplitudu proudu a napětí opět vztah

$U_C = X_C I_C$ 3.11.-28

Pro amplitudy proudu a napětí platí (3.11.-28) na jakémkoli kondenzátoru v obvodu střídavého proudu.

Prvky s odporem, indukčností a kapacitou mohou být zapojeny v obvodu se střídavým proudem současně mnoha způsoby. Probereme pouze jedno zapojení tohoto druhu – **sériový obvod RLC**.Vlastnosti řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, která se sestaví pro řešení proudu v obvodu opět na základě platnosti 2. Kirchhoffova zákona, pouze popíšeme použitím fázorových diagramů. Obdobně je možné diskutovat o vlastnostech řešení v obvodech sériových RC, LC a RL, paralelních RLC, LC, LR a RC, případně s dalšími kombinacemi základních prvků.



Obr. 3.11.-7 Průběh časové závislosti proudu a napětí na kondenzátoru, která je připojena ke generátoru střídavého proudu. Pro názornost je nakreslen fázorový diagram.

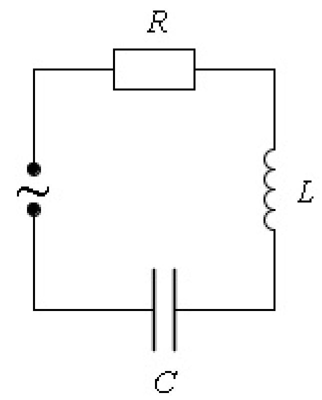
Obvod RLC sériový (Obr. 3.11.-8)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí vztah

$u + u_L = u_R + u_C$, 3.11.-29

do něhož dosaďme za okamžité napětí na cívce pravou stranu rovnosti (3.11.2-8), za napětí na rezistoru podle Ohmova zákona součin iR a za napětí na kondenzátoru, vycházeje z definice kapacity, podíl q/C:

$$u - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR + \frac{q}{C}$$ 3.11.-30



Obr. 3.11.-8

Pro napětí, které odebíráme ze zdroje, platí (3.11.-9). Protože je okamžitá hodnota elektrického proudu i definována jako derivace náboje podle času, derivujme (3.11.-30) a upravme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i-U_{\mathrm{m}}\omega\cos\omega t=0 \qquad 3.11.\text{-}31$$

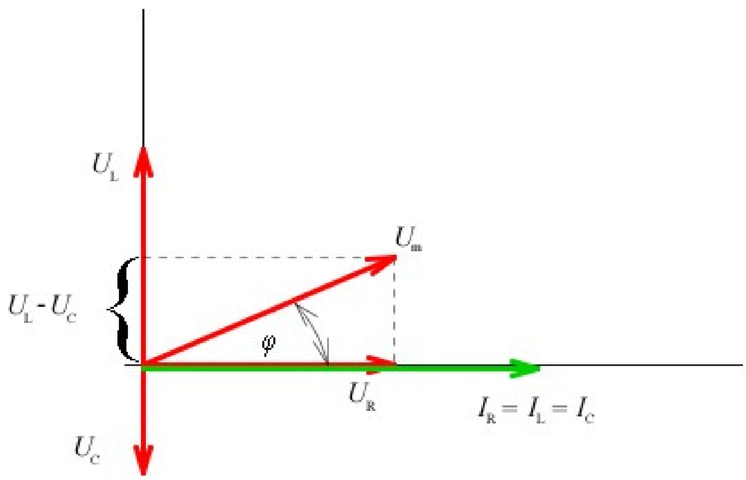
Obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty nehomogenní (3.11.-31) lze vyjádřit jako součet partikulárního řešení a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Po dostatečně dlouhé době od zapnutí zdroje střídavého napětí je příspěvek obecného řešení homogenní rovnice, které definuje tzv. **přechodový jev**, zanedbatelný. Je rozumné předpokládat, že po odeznění přechodového jevu bude příslušet proudu podobná časová závislost, jako napětí:

$$i = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t.+\varphi) \qquad 3.11.\text{-}32$$

Pokud má vztah (3.11.-32) představovat partikulární řešení rovnice (3.11.-31), musí být výsledkem dosazení (3.11.-32) do (3.11.-31) rovnice, která je řešitelná vzhledem k neznámým parametrům I_{m} a φ. Toto řešení lze také vyčíst z fázorového diagramu.

Sestrojme fázorový diagram sériového obvodu RLC, respektujíc přitom pravidla, ke kterým jsme došli analýzou jednoduchých střídavých obvodů (Obr. 3.11.-9):

a) Na rezistoru jsou **napětí a proud ve fázi**, jim příslušející fázory mají stejný směr (Obr. 3.11.-3).
b) Na cívce **napětí předbíhá proud o π/2** (Obr. 3.11.-5).
c) Na kondenzátoru **proud předbíhá napětí o π/2** (Obr. 3.11.-7).



Obr. 3.11.-9

Všemi prvky prochází stejný okamžitý proud, bude tedy i pro amplitudy platit rovnost

$I_{\mathrm{R}} = I_{\mathrm{L}} = I_{\mathrm{C}}$

a fázory proudů splynou. V Obr. 3.11.-9 jsou pravoúhlé trojúhelníky. Využijme Pythagorovu větu, abychom vyjádřili celkové napětí v obvodu:

$$U_{\mathrm{m}}^2 = U_{\mathrm{R}}^2+\left(U_{\mathrm{L}}-U_{\mathrm{C}}\right)^2 \qquad 3.11.\text{-}33$$

I zde platí (3.11.-13), (3.11.-21) a (3.11.-28), což umožňuje vyjádřit z (3.11.-33) amplitudu proudu vztahem

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$ 3.11.-34

který připomíná svým tvarem Ohmův zákon. Jmenovatel má rozměr odporu a vyjadřuje celkový odpor sériového obvodu RLC. Nazývá se impedance a má značku Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$ 3.11.-35

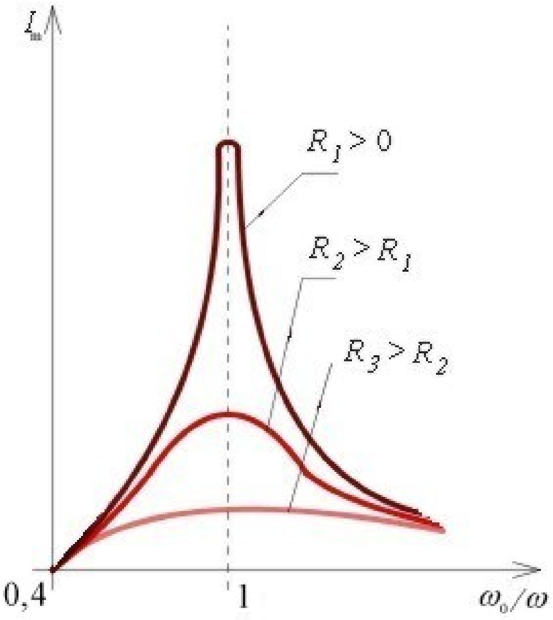
Impedance, současně také amplituda proudu, závisí na úhlové frekvenci ω (viz. (3.11.-20) a (3.11.-27)). Minimální hodnota impedance odpovídá tzv. **rezonanční úhlové frekvenci** ω_0, kterou snadno dostaneme z podmínky $U_L = U_C$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$ 3.11.-36

Odtud získáme rezonanční frekvenci

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$ (**Thomsonův vztah**) 3.11.-37

Rezonanční křivkou se znázorňuje závislost amplitudy proudu na úhlové frekvenci (Obr. 3.11.-10). Amplituda proudu nabývá největší hodnotu právě tehdy, jestliže nastane v obvodu rezonance, tzn. $\omega = \omega_0$. Z Obr. 3.11.-10 je patrné, jak ovlivňuje hodnota odporu R tvar rezonanční křivky.



Obr. 3.11.-10

Fázový rozdíl φ mezi napětím a proudem dostaneme z tangentu úhlu, který svírají fázory celkového proudu a celkového napětí (Obr. 3.11.-9):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$ 3.11.-38

a závisí na úhlové frekvenci (Obr. 3.11.-11).

Je-li $X_L > X_C$, platí podle (3.11.-20), (3.11.-27) a (3.11.-36):

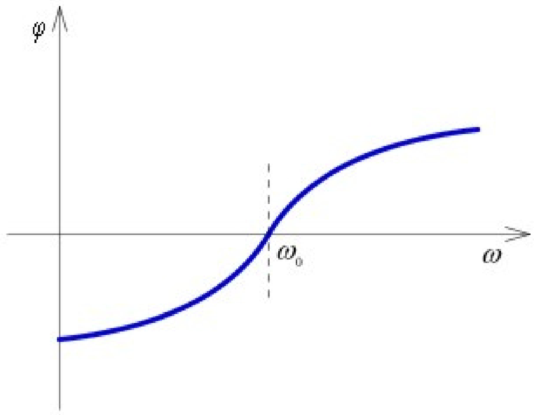
a) $\omega > \omega_0$, b) napětí předbíhá proud – obvod má **induktivní** charakter.

Je-li $X_L < X_C$, platí podle (3.11.-20), (3.11.-27) a (3.11.-36):

a) $\omega < \omega_0$, b) proud předbíhá napětí – obvod má **kapacitní** charakter.

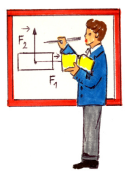
Je-li $X_L = X_C$, platí podle (3.11.-20), (3.11.-27) a (3.11.-36):

a) $\omega = \omega_0$, b) napětí je ve fázi s proudem – obvod je v **rezonanci**.



Obr. 3.11.-11 Frekvenční závislost fázového posuvu mezi napětím a proudem v sériovém RLC obvodu.

KO 3.11.-3 Jakou má jednotku kapacitance?



Elektromotorem prochází při střídavém napětí efektivní hodnoty 220 V, frekvence 50 Hz proud 4 A (efektivní hodnota) a účiník je 0,5. Chceme připojit elektromotor ke zdroji střídavého napětí 120 V přes kondenzátor s takovou kapacitou, aby elektromotorem procházel opět proud 4 A. Určete kapacitu kondenzátoru. Jaký bude účiník obvodu? Při jakém nejmenším napětí může motor pracovat?

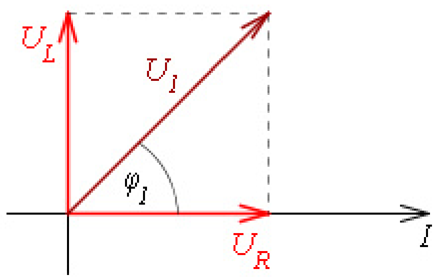
$U_1 = 220$ V; $I = 4$ A; $\cos\varphi_1 = 0{,}5$; $U_2 = 120$ V; $C = ?$; $\cos\varphi_2 = ?$; $U_{min} = ?$

V elektromotoru prochází proud cívkou, jež má určitý elektrický odpor (rezistanci) a ten vypočítáme pomocí činného výkonu P:

$$P = U_1 I \cos\varphi_1 .$$

Střední výkon je určen efektivní hodnotou proudu:

$$P = RI^2 \Rightarrow R = \frac{U_1 I \cos\varphi_1}{I^2} = \frac{U_1 \cos\varphi_1}{I} = 55\,\Omega . \qquad (1)$$



Obr. 3.11.-13

Protože nezanedbáváme odpor vinutí cívky, jedná se zatím o sériový RL obvod. Z fázorového diagramu (Obr. 3.11.-13) vyplývá, že

$$\cos\varphi_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{U_1} = \frac{I_1 R}{I_1 Z_1} \quad (Z_1 \text{ – impedance obvodu}),$$

proto

$$Z_1 = \frac{R}{\cos\varphi_1}$$

a podle Pythagorovy věty (Obr. 3.11.-13) jest

$$Z_1^2 = R^2 + X_\mathrm{L}^2 .$$

Snadno získáme impedanci ve tvaru

$$X_{\mathrm{L}} = R\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_1} - 1} = 95{,}26\,\Omega\,. \tag{2}$$

Podle zadání se má elektromotor připojit ke zdroji střídavého napětí přes kondenzátor. Proto vznikne sériový RLC obvod. V kvazistacionárních obvodech střídavého proudu je pro impedanci splněno: Impedance je podílem napětí a proudu. V naší symbolice:

$$Z_2 = \frac{U_2}{I} = 60\,\Omega\,. \tag{3}$$

Ve fázorovém diagramu (Obr. 3.11.-9) sériového RLC obvodu jsou fázory $\boldsymbol{U}_{\mathrm{L}} - \boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$ a $\boldsymbol{U}_{\mathrm{R}}$ na sebe kolmé, tudíž opět vycházeje z Pythagorovy věty a Ohmova zákona odvodíme vzorec pro impedanci:

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}}\right)^2}\,. \tag{4):}$$

(4) je rovnice s jednou neznámou – kapacitou kondenzátoru. Umocněme (4) na druhou a upravme:

$$\left(X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}}\right)^2 = Z_2^2 - R^2\,. \tag{5}$$

V dalším kroku je nutné (5) odmocnit, což může vést ke dvěma různým řešením. Nechť platí nejprve podmínka $X_{\mathrm{L}} > X_{\mathrm{C}}$:

$$X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}} = \sqrt{Z_2^2 - R^2}$$

$$X_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2\pi fC} = X_{\mathrm{L}} - \sqrt{Z_2^2 - R^2}\,. \tag{6}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f\left(X_{\mathrm{L}} - \sqrt{Z_2^2 - R^2}\right)}$$

Dosaďme hodnoty z (1), (2) a (3):

$C = 4{,}47 \cdot 10^{-5}$ F.

Pokud by platila podmínka $X_{\mathrm{L}} < X_{\mathrm{C}}$, výsledná hodnota kapacity by byla tak velká, že by bylo velmi obtížné sestrojit odpovídající kondenzátor.

Pro účiník platí (Obr. 3.11.-9):

$$\cos\varphi_2 = \frac{R}{Z_2} = 0{,}92\,.$$

Aby ve vzorci pro kapacitu nebylo pod odmocninou záporné číslo, musí platit nerovnost $Z_2 \geq R$. S přihlédnutím k (3) vyjádříme impedanci pomocí nového napětí U_3:

$$\frac{U_3}{I} \geq R\,.$$

Napětí musí splnit vztah:

$U_3 \geq RI$

$U_3 \geq 110$ V

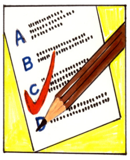
Motor bude pracovat při minimálním napětí 110 V.

U 3.11.-1 Určete impedanci sériového RLC obvodu, jestliže platí: R = 800 Ω, X_{L} = 400 Ω a X_{C} = 500 Ω.

806,2 Ω

U 3.11.-2 V obvodu střídavého napětí s amplitudou 500 V frekvence je impedance 900 Ω. Určete amplitudu proudu.

0,55 A



TO 3.11.-2 V obvodu střídavého proudu s ohmickým odporem *R* (Obr. 3.11.-2):

a) proud se zpožďuje za napětím o $\frac{\pi}{2}$.

b) proud předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$.

c) proud a napětí jsou ve fázi.

TO 3.11.-3 V obvodu střídavého proudu s indukčností *L* (Obr. 3.11.-4):

a) proud se zpožďuje za napětím o $\frac{\pi}{2}$.

b) proud předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$.

c) proud a napětí jsou ve fázi.

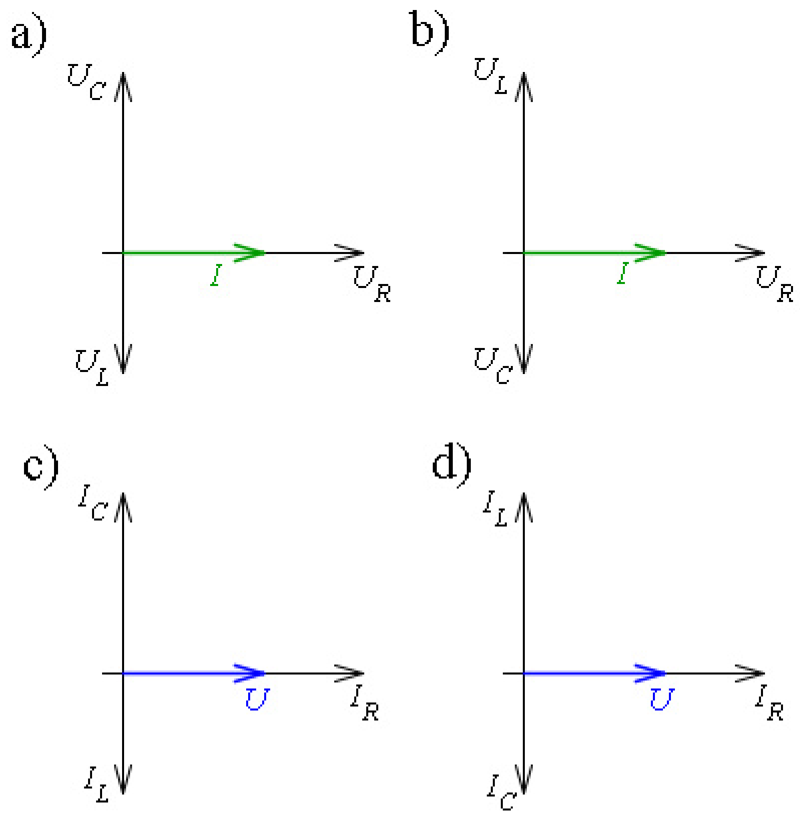
TO 3.11.-4 V obvodu střídavého proudu s kapacitou *C* (Obr. 3.11.-6):

a) proud se zpožďuje za napětím o $\frac{\pi}{2}$.

b) proud předbíhá napětí o $\frac{\pi}{2}$.

c) proud a napětí jsou ve fázi.

TO 3.11.-5 Který z uvedených fázorových diagramů patří sériovému RLC obvodu? (Obr. 3.11.-12)



Obr. 3.11.-12

V tzv. kvazistacionárních obvodech se střídavým proudem či napětím platí Kirchhoffovy zákony. Nechť má střídavé napětí průběh podle (3.11.-1) a proud má počáteční fázi $-\varphi$ a rovněž harmonický průběh. Pak okamžitý výkon proudu je:

$p = ui = U_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi)$. 3.11.-3

Pomocí goniometrických identit dostaneme:

$p = UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$. 3.11.-7

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ (I – **efektivní hodnota proudu**)

$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ (U – **efektivní hodnota napětí**)

Střední výkon střídavého proudu za periodu (**činný výkon**) je:

$\overline{P} = UI\cos\varphi$ 3.11.-8

$\cos\varphi$ nazýváme **účiník**. Fyzikální smysl účiníku: udává účinnost přenosu energie ze zdroje střídavého proudu do spotřebiče.

Diskutujme jednoduché obvody se střídavým proudem, které obsahují mimo generátoru harmonického střídavého napětí

$u = U_m \sin\omega t$ 3.11.-9

pouze jeden prvek.

Obvod s rezistorem odporu R (Obr. 3.11.-2)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$u = u_R$. 3.11.-10

Amplituda U_R napětí na prvku s R je rovna amplitudě napětí generátoru. Podle Ohmova zákona lze vyjádřit proud rezistorem takto:

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R}\sin\omega t = I_R \sin\omega t = I_R \sin(\omega t + \varphi)\,. \quad 3.11.\text{-}12$$

To znamená, že fázový posuv φ mezi napětím a proudem je nulový, jinak řečeno, proud a napětí jsou na rezistoru **ve fázi** (Obr. 3.11.-3). V tomtéž okamžiku nabývají maximálních, případně minimálních hodnot. Souvislost mezi amplitudou proudu a napětí na rezistoru popisuje, jak plyne z (3.11.-11), vzorec:

$U_R = RI_R$. 3.11.-13

Elektrický odpor R se v obvodech střídavého proudu obvykle nazývá **rezistance**.

Obvod s indukčností *L* (Obr. 3.11.-4)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$u + u_L = 0$. 3.11.-15

Pro závislost proudu na čase odtud dostaneme:

$$i_L = \frac{U_L}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad 3.11.\text{-}19$$

Fázový posuv mezi napětím a proudem je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Na fázorovém diagramu rotuje fázor napětí před fázorem proudu; říkáme, že napětí předbíhá proud (Obr. 3.11.-5). Amplituda proudu I_L je podíl $\frac{U_L}{\omega L}$. Zavedeme-li veličinu

$X_L = \omega L$, 3.11.-20

která se nazývá **induktance** a má hlavní jednotku Ω (ohm), bude spojovat amplitudu proudu a napětí vztah

$U_L = X_L I_L$. 3.11.-21

Pro amplitudy proudu a napětí platí (3.11.-21) na jakékoli bezodporové cívce v obvodu střídavého proudu.

Obvod s kapacitou *C* (Obr. 3.11.-6)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí:

$u = u_C$. 3.11.-22

Proto

$$i_C = \omega C U_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad 3.11.\text{-}26$$

Fázový posuv mezi napětím a proudem je $\varphi = +\frac{\pi}{2}$. Na fázorovém diagramu rotuje fázor proudu před fázorem napětí; říkáme, že proud předbíhá napětí (Obr. 3.11.-7). Dle (3.11.-26) je amplitudou proudu I_C součin $\omega C U_C$. Zavedeme-li veličinu

$X_C = \frac{1}{\omega C}$, 3.11.-27

která se nazývá **kapacitance** (kapacitní reaktance) a má hlavní jednotku Ω (ohm), bude spojovat amplitudu proudu a napětí opět vztah

$U_C = X_C I_C$. 3.11.-28

Pro amplitudy proudu a napětí platí (3.11.-28) na jakémkoli kondenzátoru v obvodu střídavého proudu.

Obvod *RLC* sériový (Obr. 3.11.-8)

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí vztah

$u + u_L = u_R + u_C$, 3.11.-29

Sestrojme fázorový diagram sériového obvodu RLC, respektujíc přitom pravidla, ke kterým jsme došli analýzou jednoduchých střídavých obvodů (Obr. 3.11.-9):

d) Na rezistoru jsou **napětí a proud ve fázi**, jim příslušející fázory mají stejný směr (Obr. 3.11.-3).

e) Na cívce **napětí předbíhá proud o $\pi/2$** (Obr. 3.11.-5).

f) Na kondenzátoru **proud předbíhá napětí o $\pi/2$** (Obr. 3.11.-7).

Všemi prvky prochází stejný okamžitý proud, bude tedy i pro amplitudy platit rovnost

$I_R = I_L = I_C$

a fázory proudů splynou. Vzorec pro amplitudu proudu:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \qquad 3.11.\text{-}34$$

Jmenovatel má rozměr odporu a vyjadřuje celkový odpor sériového obvodu RLC. Nazývá se impedance a má značku Z:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \qquad 3.11.\text{-}35$$

Impedance, současně také amplituda proudu, závisí na úhlové frekvenci ω (viz. (3.11.-20) a (3.11.-28)). Minimální hodnota impedance odpovídá tzv. rezonanční úhlové frekvenci ω_0 , kterou snadno dostaneme z podmínky $U_L = U_C$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad 3.11.\text{-}36$$

Odtud získáme rezonanční frekvenci

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \qquad (\textbf{Thomsonův vztah}) \qquad 3.11.\text{-}37$$

Rezonanční křivkou se znázorňuje závislost amplitudy proudu na úhlové frekvenci (Obr. 3.11.-10). Amplituda proudu nabývá největší hodnotu právě tehdy, jestliže nastane v obvodu rezonance, tzn. $\omega = \omega_0$. Z Obr. 3.11.-10 je patrné, jak ovlivňuje hodnota odporu R tvar rezonanční křivky.

Fázový rozdíl φ mezi napětím a proudem odpovídá tangentu úhlu, který svírají fázory celkového proudu a celkového napětí (Obr. 3.11.-9):

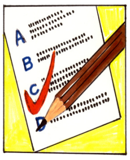
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad 3.11.\text{-}38$$

a závisí na úhlové frekvenci (Obr. 3.11.-11).

Klíč

KO 3.11.-3 Ω

U 3.11.-1 806,2 Ω
U 3.11.-2 0,55 A



TO 3.11.-1 b)

TO 3.11.-2 c)

TO 3.11.-3 a)

TO 3.11.-4 b)

TO 3.11.-5 b)