

1.7.4. Skládání kmitů

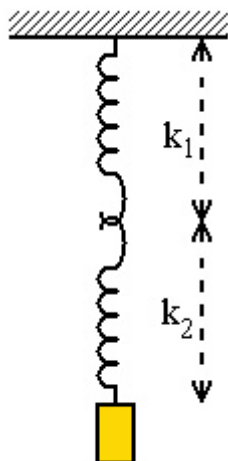


1. Umět vysvětlit pojem superpozice.
2. Umět rozdělit různé typy skládání kmitů podle směru a frekvence.
3. Umět určit amplitudu a fázi výsledného kmitu.
4. Vysvětlit pojem fázor.
5. Znat závislost amplitudy výsledného kmitu na fázovém posuvu.
6. Vysvětlit, kdy vznikají Lissajousovy obrazce.
7. Umět vysvětlit tvar Lissajousova obrazce v závislosti na fázovém posuvu.
8. Umět vysvětlit tvar Lissajousova obrazce v závislosti na frekvenci.



Kdybychom sledovali pohyb hmotného bodu, který by byl připevněn v závěsu na dvou různých pružinách umístěných za sebou, studovali bychom **složený kmitavý pohyb** (Obr. 1.7.-17). Oba kmitavé pohyby se budou skládat vzhledem k závěsu horní pružiny.

Jestliže těleso vykonává dva nebo více kmitavých pohybů, určíme výsledný kmitavý tak, že složíme výchylky jednotlivých kmitavých pohybů na základě **principu superpozice**. Jednotlivé pohyby podle tohoto principu probíhají nezávisle na sobě.



Dva harmonické pohyby se mohou lišit v amplitudách, frekvencích, ve fázi i ve směru kmitání.

Z názorného hlediska je vhodné sledovat

1. skládání kmitů stejného směru
 - a) stejných frekvencí
 - b) blízkých frekvencí
 - c) různých frekvencí
2. skládání kolmých kmitů
 - a) stejných frekvencí
 - b) různých frekvencí.

Obr. 1.7.-17

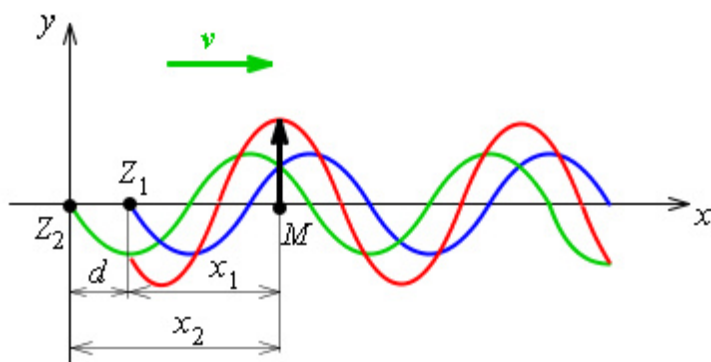
1.7.4.1. Skládání kmitů stejného směru

1. a) skládání kmitů stejného směru a stejné frekvence (izochronní)

Jestliže budeme sledovat pohyb hmotného bodu, který koná dva kmity současně, můžeme každý z nich popsat rovnicí pro výchylku. Protože u obou kmitů je $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, můžeme rovnice pro okamžitou výchylku obou kmitů zapsat takto:

- a) první kmit bude popsán rovnicí pro okamžitou výchylku $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$
- b) druhý kmit bude popsán rovnicí pro okamžitou výchylku $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Na obrázku jsou složeny hodnoty okamžitých výchylek jednotlivých kmitů v konkrétních časových okamžicích. Výchylky se sčítají a vytvářejí výsledný kmit grafickou metodou.



Obr. 1.7.-18

Rovnice výsledného kmitu bude ve tvaru

$$y = A \sin(\omega t + \varphi). \quad 1.7.-53$$

V této rovnici je nutné určit výslednou amplitudu A a výslednou počáteční fázi φ , které získáme podrobným odvozením.

Pro **amplitudu** získáme vztah

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad 1.7.-54$$

Výslednou fázi určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad 1.7.-55$$

Výsledný kmit vzniklý superpozici má stejnou frekvenci jako jednotlivé skládané kmitu.

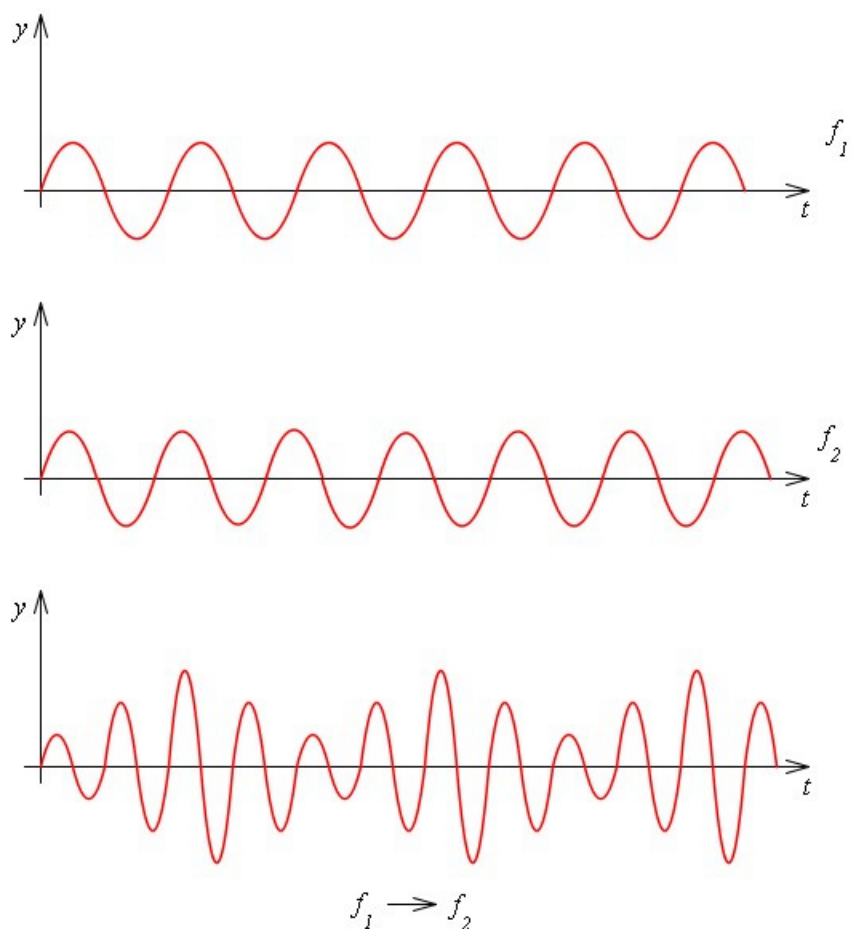
Amplituda ovšem závisí na amplitudách dílčích kmitů a na jejich vzájemném fázovém posunutí $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Mohou nastat zvláštní případy.

- Jestliže je fázový rozdíl $\Delta\varphi = 2k\pi$ kde k je celé číslo, pak budou oba kmitu ve fázi a výsledná amplituda bude rovna $A = A_1 + A_2$.
- Jestliže je fázový rozdíl $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, kde k je celé číslo, pak se oba kmitu setkají v opačné fázi a výsledná amplituda $A = |A_1 - A_2|$ ve směru větší amplitudy.
- V případě, že by se setkaly ve stejné fázi kmitu se stejnou amplitudou, pak by výsledná amplituda byla dvojnásobná. Pokud by se tyto kmitu setkaly v opačné fázi, pak by se oba kmitu zrušily.

1.b) skládání stejnosměrných kmitů blízkých frekvencí

Pro jednoduchost budeme uvažovat kmitu stejné amplitudy a stejné fáze $A_1 = A_2$ a $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Frekvence obou pohybů budou velmi blízké, pak $\omega_1 \rightarrow \omega_2$.



Obr.1.7.-19

Z obrázku je zřejmé, že amplituda výsledného kmitu se bude periodicky měnit. Dojde zároveň ke změně frekvence výsledného kmitu.

To znamená, že amplituda výsledného kmitu se periodicky zvětšuje a opět zmenšuje podle periodické goniometrické funkce cosinus. Vznikají tzv. **rázy** nebo **zázněje**.

První kmit má rovnici

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t) = A \sin 2\pi f_1 t. \quad 1.7.-56$$

Druhý kmit bude popsán rovnicí

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t) = A \sin 2\pi f_2 t. \quad 1.7.-57$$

Po úpravě dostaneme vztah pro okamžitou výchylku y výsledného kmitavého pohybu ve tvaru

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t \sin 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t. \quad 1.7.-58$$

Tento vztah charakterizuje výsledný kmitavý pohyb, který má proměnnou amplitudu

$$A_v = 2A \cos 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t. \quad 1.7.-59$$

V tomto případě určujeme dvě frekvence:

1. **amplitudovou frekvenci**

$$f_a = \frac{f_1 - f_2}{2}, \quad 1.7.-60$$

určuje frekvenci, se kterou se mění amplituda výsledného kmitu.

2. **frekvenci výsledného kmitu**

$$f_r = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad 1.7.-61$$

určuje frekvenci výsledného kmitu, je rovna průměrné hodnotě frekvence obou kmitů.

3. **frekvenci rázů**

$$f_r = |f_2 - f_1|, \quad 1.7.-62$$

určuje počet maxim, které výsledný kmit dosáhne za jednu sekundu.

Poznámka:

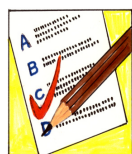
Rázy můžeme pozorovat například v případě dvou ladiček. Jedna vydává tón o frekvenci f_1 . Na druhou ladičku připevníme kousek drátu. Tím zvětšíme její hmotnost a pozměníme frekvenci vydávaného tónu. Oba tóny se budou skládat a my zřetelně uslyšíme tón o frekvenci f_r , který se bude periodicky zesilovat a zeslabovat s periodou f_a .

S rázy se můžeme setkat v hudbě, kde tento jev v některých případech je žádoucí, v jiných (např. klasická hudba) nikoliv. Rázy můžeme záměrně vyvolávat i při některých světelných efektech.

1.c) skládání stejnosměrných kmitů různých frekvencí (anizochronních)

Při skládání stejnosměrných kmitů různých frekvencí vznikne periodický kmit v tom případě, když periody obou kmitů budou v poměru celých čísel.

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad 1.7.-63$$



TO 1.7.-24. Izochronní kmity jsou kmity

- a) stejného směru
- b) stejné frekvence
- c) různého směru
- d) různé frekvence

TO 1.7.-25. Anizochronní kmity jsou kmity

- a) stejného směru
- b) stejné frekvence
- c) různého směru
- d) různé frekvence

TO 1.7.-26. Amplituda výsledného kmitu závisí

- a) na amplitudách jednotlivých kmitů

- b) na fázovém posuvu $\Delta\varphi$
- c) na amplitudách jednotlivých kmitů a zároveň na fázovém posuvu $\Delta\varphi$

TO 1.7.-27. Skládání kmitů budou ve fázi, jestliže

- a) $\Delta\varphi = 2k \frac{\pi}{2}$
- b) $\Delta\varphi = 2k\pi$
- c) $\Delta\varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$
- d) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$

TO 1.7.-28. Skládání kmitů budou v opačné fázi, jestliže

- a) $\Delta\varphi = 2k \frac{\pi}{2}$
- b) $\Delta\varphi = 2k\pi$
- c) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$
- d) $\Delta\varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$

TO 1.7.-29. Amplituda výsledného kmitu je

- a) $A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$
- b) $A = \sqrt{A_1 + A_2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$
- c) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$
- d) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

TO 1.7.-30. Jestliže bude fázový rozdíl $\Delta\varphi = 4\pi$, pak

- a) kmitů budou ve fázi
- b) kmitů budou v opačné fázi
- c) amplituda výsledného kmitu bude $A = A_1 + A_2$
- d) amplituda výsledného kmitu bude $A = |A_1 - A_2|$

TO 1.7.-31. Jestliže bude fázový rozdíl $\Delta\varphi = 7\pi$, pak

- a) kmitů budou ve fázi
- b) kmitů budou v opačné fázi
- c) amplituda výsledného kmitu bude $A = A_1 + A_2$
- d) amplituda výsledného kmitu bude $A = |A_1 - A_2|$

TO 1.7.-32. Jestliže amplituda $A = A_1 + A_2$, pak

- a) kmitů budou ve fázi
- b) kmitů budou v opačné fázi
- c) nelze určit

TO 1.7.-33. Jestliže amplituda $A = |A_1 - A_2|$, pak

- a) kmity budou ve fázi
- b) kmity budou v opačné fázi
- c) nelze určit

TO 1.7.-34. Rázy vznikají v případě, kdy jsou frekvence skládaných kmitů

- a) stejné
- b) jeden je dvojnásobkem druhého
- c) mají přibližně stejnou hodnotu

TO 1.7.-35. Frekvence rázů je

- a) rovna vyšší frekvenci skládaných kmitů
- b) rovna nižší frekvenci skládaných kmitů
- c) rovna rozdílu obou frekvencí skládaných kmitů
- d) rovna průměrné hodnotě frekvencí skládaných kmitů

TO 1.7.-36. Určete amplitudovou frekvenci dvou skládaných kmitů o frekvencích $f_1 = 96 \text{ Hz}$, $f_2 = 100 \text{ Hz}$.

- a) 4 Hz
- b) 2 Hz
- c) 98 Hz
- d) 196 Hz

TO 1.7.-37. Určete frekvenci výsledného kmitavého pohybu tvořených dvěma kmity o frekvencích $f_1 = 96 \text{ Hz}$, $f_2 = 100 \text{ Hz}$.

- e) 4 Hz
- f) 2 Hz
- g) 98 Hz
- h) 196 Hz

TO 1.7.-38. Určete frekvenci rázů výsledného kmitavého pohybu, který vznikne složením dvou kmitů o frekvencích $f_1 = 96 \text{ Hz}$, $f_2 = 100 \text{ Hz}$.

- i) 4 Hz
- j) 2 Hz
- k) 98 Hz
- l) 196 Hz



Určete amplitudu a fázové posunutí výsledného kmitavého pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných kmitavých pohybů o týchž amplitudách $A_1 = A_2 = 10 \text{ cm}$ a počáteční fáze $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$.

$$A_1 = A_2 = 10 \text{ cm}, \varphi_1 = 30^\circ, \varphi_2 = 60^\circ$$

Použijeme vztahy pro výpočet výsledné amplitudy a výsledné fáze:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Dosadíme zadané hodnoty a vypočteme.

$$A = \sqrt{100 + 100 + 200 \cos(60^\circ - 30^\circ)} = \sqrt{200 + 200 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 19,3 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{10 \frac{1}{2} + 10 \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Amplituda výsledného kmitavého pohybu je 19,3 cm, fáze výsledného kmitavého pohybu je 45°.



Určete periodu amplitudy T_a a periodu T výsledného kmitavého pohybu, který vznikne složením dvou kmitů o stejných amplitudách a periodách $T_1 = 400 \text{ s}$ a $T_2 = 442 \text{ s}$.

$$T_1 = 400 \text{ s}, T_2 = 442 \text{ s}, T_a = ?, T = ?$$

Pro amplitudovou frekvenci platí vztah $f_a = \frac{f_1 - f_2}{2}$, pak

$$T_a = \frac{2}{f_1 - f_2} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 442}{442 - 400} = 8419 \text{ s}$$

Pro frekvenci výsledného kmitu platí vztah $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$, pak

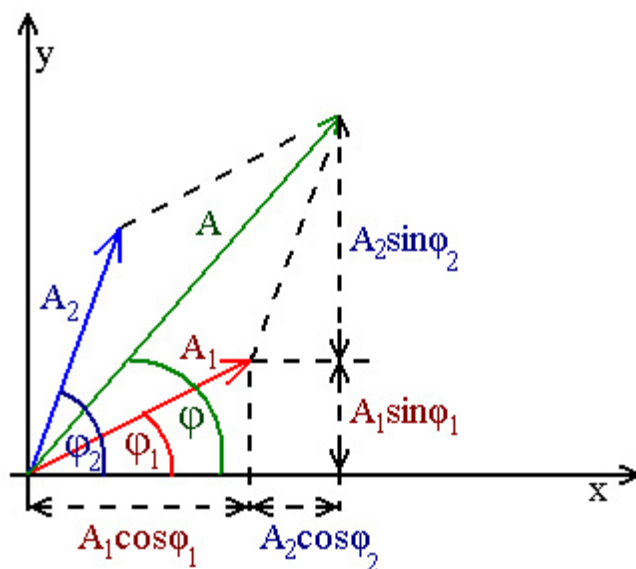
$$T = \frac{2}{f_1 + f_2} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 442}{400 + 442} = 420 \text{ s}$$



Proveďte skládání dvou stejnosměrných izochronních kmitů pomocí fázorového diagramu.

Grafická metoda skládání kmitů využívá podobnost s pohybem po kružnici, kdy se těleso otáčí s úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi f$.

Každý z obou kmitů znázorníme jako fázor. Fázor je orientovaná úsečka, jejíž velikost určuje amplituda kmitu A . Otáčí se s úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$. Orientaci fázoru v rovině x, y určuje počáteční fáze φ , která představuje úhel mezi fázorem a osou x .



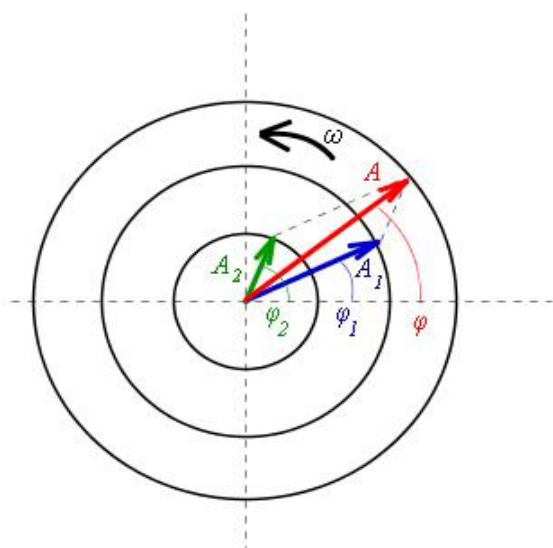
Obr. 1.7.-20

Zakreslíme v rovině x, y kmit $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ a kmit $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$.

Úhel φ_1 je úhel, který svírá fázor o velikosti amplitudy A_1 s osou x . Úhel φ_2 je úhel, který svírá fázor o velikosti amplitudy A_2 s osou x .

Úhel φ mezi oběma fázory představuje fázi výsledného kmitu. Oba časové vektory (fázory) rotují se stejnou úhlovou frekvencí ω a svírají spolu stále tentýž úhel φ (Obr. 1.7.-21).

Oba zakreslené kmity složíme podle pravidel pro počítání s vektory a určíme amplitudu A a fázi φ výsledného kmitu.



Obr. 1.7.-21

Amplitudu A stanovíme jako vektorový součet $A = A_1 + A_2$ pomocí kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Úhel γ v tomto případě podle nákresu představuje doplněk $\varphi_2 - \varphi_1$ do 180° .

$$\text{Pak } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Fázi výsledného kmitu určíme pomocí kolmých průmětů jednotlivých fázorů do os x, y . Podle pravoúhlého trojúhelníku a funkce tangens je

$$\text{tg } \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$



KO 1.7.-55. Co jsou izochronní kmity?

KO 1.7.-56. Co jsou anizochronní kmity?

KO 1.7.-57. Určete vztah pro amplitudu výsledného kmitu při izochronním kmitání.

KO 1.7.-58. Určete vztah pro fázi výsledného kmitu při izochronním kmitání.

KO 1.7.-59. Kdy bude amplituda maximální?

KO 1.7.-60. Kdy bude amplituda nulová?

KO 1.7.-61. Vysvětlete pojem fázoru.

KO 1.7.-62. Kdy vznikají rázy (zázněje)?

KO 1.7.-63. Co je amplitudová frekvence?

KO 1.7.-64. Co je frekvence rázů?

1.7.4.2. Skládání kolmých kmitů



Jestliže má hmotný bod konat současně dva pohyby ve dvou různých směrech, potom výslednou polohu určíme vektorovým součtem obou složek (např. plavec v tekoucí řece).

Totéž platí o kmitech, které se dějí ve dvou různých směrech. Průběh výsledného kmitu závisí na poměru úhlových frekvencí ω_1, ω_2 a na fázovém rozdílu $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ obou kmitů.

Jestliže jsou ω_1, ω_2 libovolná čísla, má výsledný kmit velmi složitý průběh.

Jednodušší případ nastane, pokud složíme kmity, jejichž frekvence jsou souměřitelné.

2.a) skládání kolmých kmitů stejné frekvence

Výsledný pohyb je dán principem superpozice.

Uvažujeme, že $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Jestliže je vzájemný fázový posuv mezi oběma kmitavými pohyby $\Delta\varphi = \varphi$, pak rovnice pro okamžitou výchylku ve směru osy x a osy y budou zapsány ve tvaru:

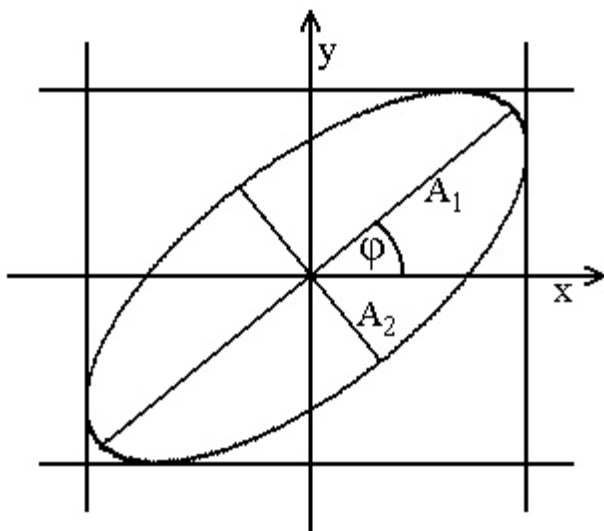
$$x = A_1 \sin(\omega t) \quad 1.7.-64$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad 1.7.-65$$

Matematickým složením těchto dvou kolmých kmitavých pohybů získáme rovnici křivky, po které se kmitající těleso pohybuje.

Výsledná rovnice má tvar

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad 1.7.-66$$



Obr. 1.7.-23

Tato rovnice představuje rovnici elipsy, jejíž osy nespływají se souřadnými osami x a y . Její tvar závisí na fázové rozdílu $\Delta\varphi = \varphi$ a na amplitudách A_1, A_2 .

Při skládání kolmých kmitů mohou nastat zvláštní případy. Záleží na tom, jestli oba dva kmitavé pohyby začínají ve stejném časovém okamžiku v rovnovážné poloze nebo je mezi nimi fázový posuv.

Mohou nastat tyto obecné případy:

a) $\Delta\varphi = 2k\pi$, kde k je celé číslo

Obecná rovnice elipsy bude mít tvar

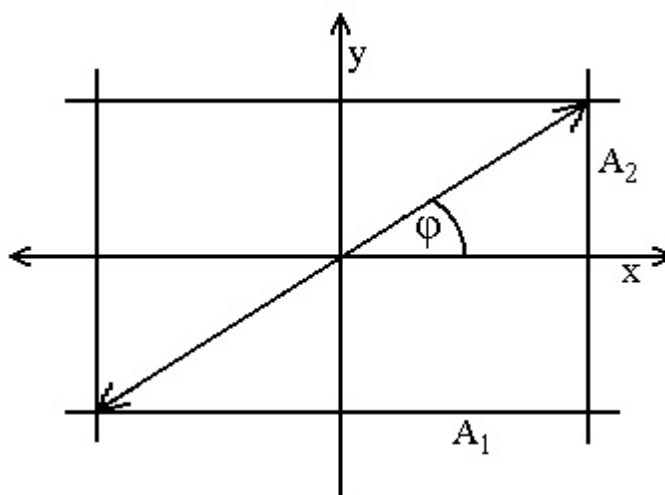
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0. \quad 1.7.-67$$

Lze ji upravit na

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

1.7.-68

Tato rovnice je rovnicí přímky.



Obr. 1.7.-24

Hmotný bod koná harmonické kmity v přímce, která prochází počátkem a prvním a třetím kvadrantem s amplitudou

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

1.7.-69

b) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, kde k je celé číslo

Obecná rovnice elipsy bude mít tvar

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0.$$

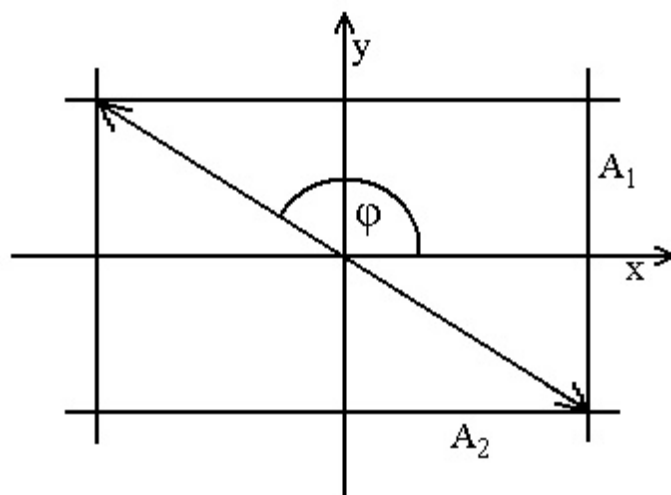
1.7.-70

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

1.7.-71

Hmotný bod koná harmonické kmity v přímce, která prochází počátkem a druhým a čtvrtým kvadrantem s amplitudou

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$



Obr. 1.7.-25

c) $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo

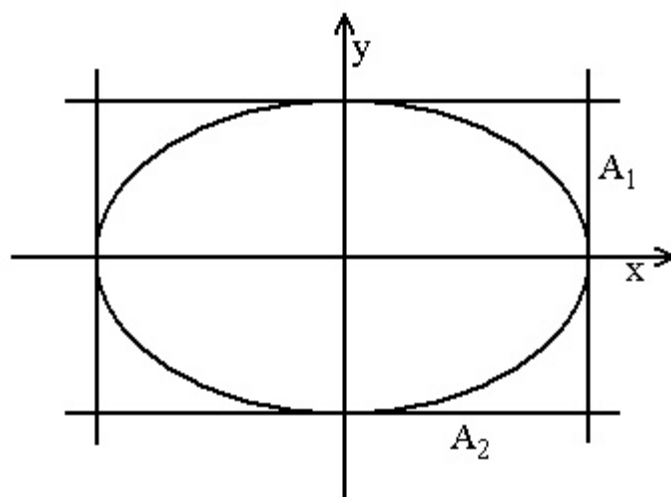
1.7.-72

Obecná rovnice elipsy přejde na tvar

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

1.7.-73

Tato rovnice představuje rovnici elipsy, jejíž osy jsou totožné se souřadnými osami x a y .



Obr. 1.7.-26

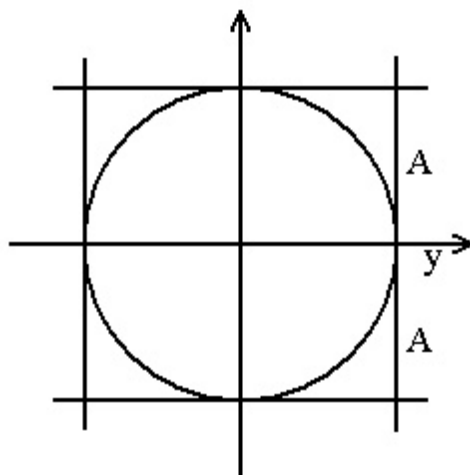
d) $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde k je celé číslo

a amplitudy kmitů se rovnají, pak křivka, kterou opisuje hmotný bod při výsledném pohybu má tvar kružnice s rovnicí

$$x^2 + y^2 = A^2$$

1.7.-74

o poloměru A .

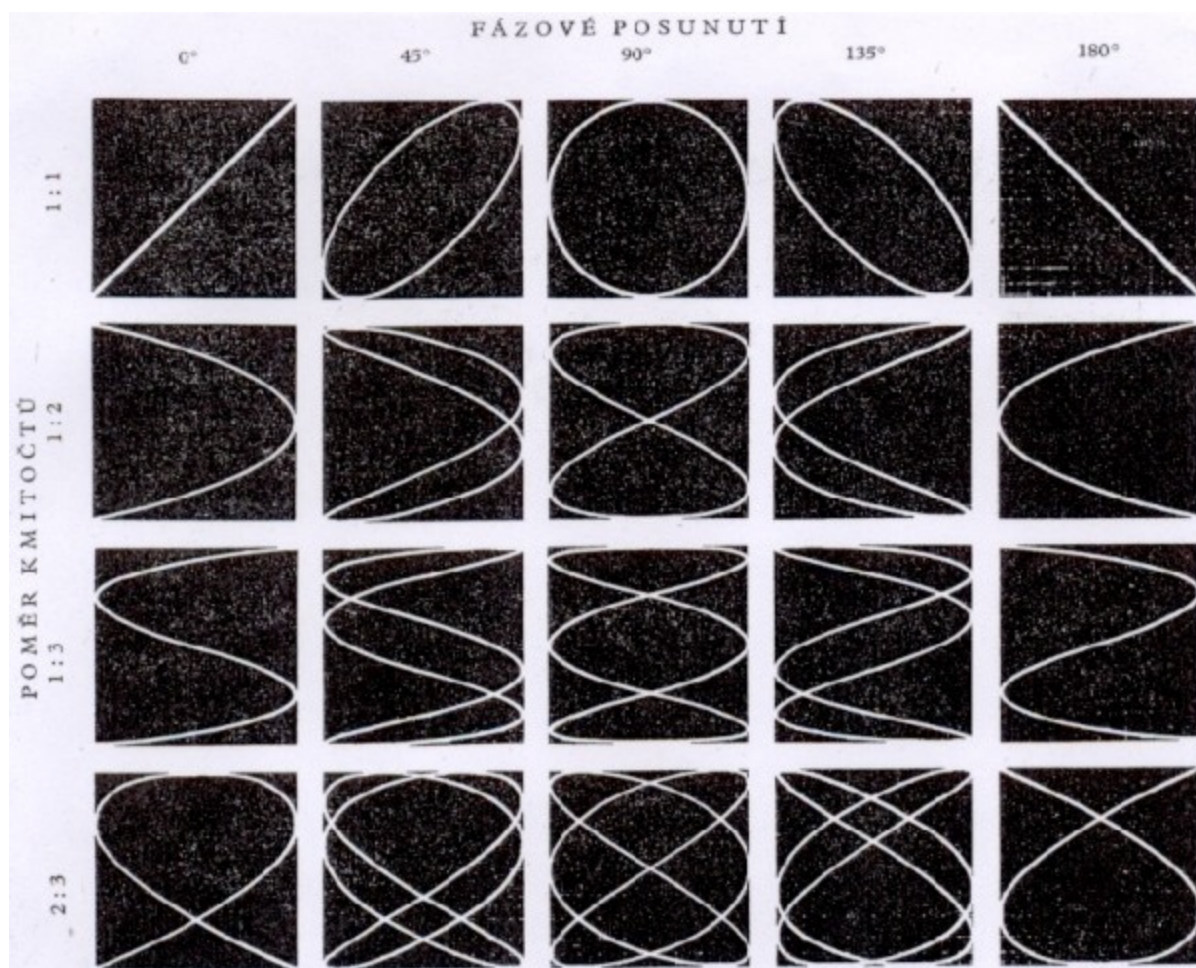


Obr. 1.7.-27

e) ve všech ostatních případech bude trajektorie tvořit obecnou elipsu.

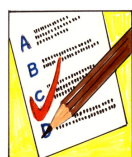
2.b) skládání kolmých kmitů s různou frekvencí

V tomto případě vznikají složitější Lissajousovy obrazce. Jestliže je poměr frekvencí v poměru malých celých čísel, bude výsledný kmit periodický a Lissajousův obrazec tvoří uzavřenou křivku.



Obr.1.7.-28

V opačném případě je výsledný kmitavý pohyb neperiodický a obrazec netvoří uzavřenou křivku.



TO 1.7.-39. Při skládání dvou kolmých kmitů na fázovém posunu $\Delta\varphi$ závisí

- a) ano
- b) ne

TO 1.7.-40. Jestliže fázový posuv $\Delta\varphi = 2k\pi$, kde k je celé číslo a frekvence obou kmitů stejné, pak výsledný pohyb tvoří

- a) elipsu
- b) úsečku, která prochází prvním a třetím kvadrantem
- c) úsečku, která prochází druhým a čtvrtým kvadrantem
- d) kružnici

TO 1.7.-41. Jestliže fázový posuv $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, kde k je celé číslo a frekvence obou kmitů stejné, pak výsledný pohyb tvoří

- a) elipsu
- b) úsečku, která prochází prvním a třetím kvadrantem
- c) úsečku, která prochází druhým a čtvrtým kvadrantem
- d) kružnici

TO 1.7.-42. Jaký musí být fázový posuv, aby výsledný kmit tvořil úsečku procházející prvním a třetím kvadrantem?

- a) $\Delta\varphi = 2k\pi$
- b) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$
- c) $\Delta\varphi = 2k\frac{\pi}{2}$
- d) $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

TO 1.7.-43. Jaký musí být fázový posuv, aby výsledný kmit tvořil úsečku procházející druhým a čtvrtým kvadrantem?

- a) $\Delta\varphi = 2k\pi$
- b) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$
- c) $\Delta\varphi = 2k\frac{\pi}{2}$
- d) $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$



Určete trajektorii výsledného kmitu, který vznikne složením dvou kolmých kmitů o rovnicích

$$x = 6 \sin 4\pi t$$

$$y = 10 \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$x = 6 \sin 4\pi t$$

$$y = 10 \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \cos 4\pi t.$$

Obě rovnice umocníme a přepíšeme do tvaru

$$\frac{x^2}{36} = \sin^2 4\pi t$$

$$\frac{y^2}{100} = \cos^2 4\pi t.$$

V dalším kroku rovnice sečteme

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = \sin^2 4\pi t + \cos^2 4\pi t.$$

Výraz na pravé straně je podle známého goniometrického vztahu roven jedné.

Pak získáme rovnici

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

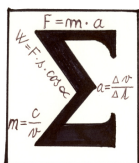
Trajektorie výsledného kmitu je elipsa s poloosami $A_1 = 6$ m a $A_2 = 10$ m.



KO 1.7.-65. Kdy vznikají Lissajousovy obrazce?

KO 1.7.-66. Jakou podmínku musí splňovat dva kolmé kmity, aby výsledný pohyb po jejich složení představoval pohyb po elipse?

KO 1.7.-67. Jakou podmínku musí splňovat dva kolmé kmity, aby výsledný pohyb po jejich složení představoval pohyb po kružnici?



1. Základními charakteristikami jsou **frekvence kmitu f** (Hz), **doba kmitu T** (s), **úhlová frekvence ω** (rad.s⁻¹), **okamžitá výchylka y** (m), **amplituda výchylky kmitu (výkmit) A** (m).

2. Netlumený kmitavý pohyb charakterizují rovnice pro

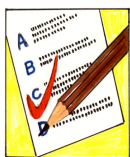
- **okamžitou výchylku:** $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde φ je počáteční fáze, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ „
- **okamžitá rychlost** $v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$,
- **okamžité zrychlení a** (m.s⁻²) platí rovnice $a = \frac{dy}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$,
- **sílu pružnosti F** způsobující harmonický kmitavý pohyb oscilátoru je $F = -k y$, kde $k = m\omega^2$ je **tuhost pružiny**. Jednotkou tuhosti pružiny je (N.m⁻¹),
- **kinetickou energii E_k** je vyjádřena vztahem $E_k = \frac{1}{2} m v^2$,
- **potenciální energii pružnosti E_p** charakterizuje vztah $E_p = \frac{1}{2} k y^2$. Jednotkou energie je (J). Součet obou energií je u netlumeného kmitavého pohybu konstantní. $E_k + E_p = E = \text{konst} = \frac{1}{2} k A^2$,

3. Tlumený kmitavý pohyb v odporujícím prostředí charakterizují rovnice pro

- **tlumící sílu** $F_t = -R v$, kde R je koeficient odporu prostředí (jednotka kg.s⁻¹), v je rychlost oscilátoru,
- **součinitel útlumu** $b = \frac{R}{2m}$, (s⁻¹),
- **okamžitou výchylku tlumených kmitů** $y = A \sin(\omega_t t + \varphi_0)$, kde $A = A_0 e^{-bt}$ je amplituda tlumených mechanických kmitů,
- **úhlová frekvence tlumených kmitů**. $\omega_t^2 = \omega^2 - b^2$,
- **útlum** $\lambda = e^{bT_t}$,

- **logaritmický dekrement útlumu** $\delta = bT_t$, kde T_t je perioda tlumených kmitů,
 - **celková energie** $E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2bt} = E_0 e^{-2bt}$,
4. Nucený kmitavý pohyb popisují rovnice
- **budící sílu** $F_b = F \sin \Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budící síly,
 - **okamžitou výchylku** $y = A_0 e^{-bt} \sin(\omega_t t + \varphi_0) + A_b \sin(\Omega t + \Psi)$, kde Ψ je fáze vynucených kmitů
 - **amplitudu vynucených kmitů** $A_v = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}$,
 - **rezonanční frekvenci** $\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$,
 - **rezonanční amplitudu** $A_r = \frac{a}{2b\sqrt{\omega^2 - b^2}}$.
5. Složený kmit je popsán rovnicí pro
- **okamžitou výchylku** $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, kde
 - **amplituda** $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$,
 - **fázi** φ určíme podle $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$.

Klíč



1.7. Mechanické kmitání

1.7.1. Kmitavý pohyb netlumený

TO 1.7.-1. a)

TO 1.7.-2. b)

TO 1.7.-3. d)

TO 1.7.-4. c)

TO 1.7.-5. a)

TO 1.7.-6. a)

TO 1.7.-7. a)

TO 1.7.-8. b)

TO 1.7.-9. b)

TO 1.7.-10. a)

TO 1.7.-11. b)

TO 1.7.-12. a)

TO 1.7.-13. b)
 TO 1.7.-14. a)
 TO 1.7.-15. a)



KO 1.7.-1 Konstanta charakterizující oscilátor

KO 1.7.-2 Způsobuje při vychýlení návrat tělesa do rovnovážné polohy

KO 1.7.-3. $\omega^2 = \frac{k}{m}$

KO 1.7.-4 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

KO 1.7.-5 $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

KO 1.7.-6 viz text

KO 1.7.-7 maximální vzdálenost tělesa z rovnovážné polohy

KO 1.7.-8 Okamžitá vzdálenost tělesa z rovnovážné polohy, $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$,

KO 1.7.-9 viz text

KO 1.7.-10 viz text

KO 1.7.-11 $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$

KO 1.7.-12 $v_0 = A\omega$

KO 1.7.-13 v rovnovážné poloze

KO 1.7.-14 $a = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

KO 1.7.-15 v amplitudách

KO 1.7.-16 maximální je v amplitudách, nulová v rovnovážné poloze

KO 1.7.-17 $E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$.

KO 1.7.-18 Maximální kinetickou energii má těleso při průchodu rovnovážnou polohou, nulovou v amplitudách

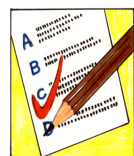
KO 1.7.-19 $E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$.

KO 1.7.-20 maximální potenciální energii pružnosti má těleso v amplitudách, nulovou v rovnovážné poloze

KO 1.7.-21 $E = \frac{1}{2} k A^2$.

KO 1.7.-22. viz text

1.7.2. Tlumené kmity



TO 1.7.-16. d)

TO 1.7.-17. b)

TO 1.7.-18. b), d)

TO 1.7.-19. c)

TO 1.7.-20. c)

KO 1.7.-23 text



KO 1.7.-24 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

KO 1.7.-25 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

KO 1.7.-26. viz text

KO 1.7.-27 $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$

KO 1.7.-28 $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J}}$

KO 1.7.-29. tlumící síla (síla odporu prostředí)

KO 1.7.-30. $F_t = -Rv$,

KO 1.7.-31 $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$

KO 1.7.-32. s^{-1}

KO 1.7.-33. perioda se prodlužuje, frekvence se zmenšuje

KO 1.7.-34. viz text

KO 1.7.-35. energie exponenciálně klesá

KO 1.7.-36. exponenciální

KO 1.7.-37. amplituda exponenciálně klesá

KO 1.7.-38. $y = A_0 e^{-bt} \sin(\omega_t t + \varphi_0)$

KO 1.7.-39. viz text

KO 1.7.-40. $R = 2bm$

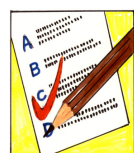
KO 1.7.-41. $\lambda = e^{-bT}$

KO 1.7.-42. $\delta = \ln \lambda$

KO 1.7.-43 (s^{-1}), (bez jednotky), (bez jednotky)

KO 1.7.-44. $\omega_t = \sqrt{\omega^2 - b^2}$

1.7.3. Kmity vynucené



TO 1.7.-21. a)

TO 1.7.-22. c)



TO 1.7.-23. b)



KO 1.7.-45 Část energie spotřebovaná oscilátorem vlivem odporu prostředí je pravidelně dodávána prostřednictvím periodické budící síly.

KO 1.7.-46 Shoda frekvence vlastních kmitů oscilátoru a frekvence budící síly.

KO 1.7.-47 Periodicky proměnná síla dodávající oscilátoru pravidelně energii.

KO 1.7.-48 Doba, během které vymizí vlastní kmitý oscilátoru. Poté oscilátor kmitá s frekvencí budící síly.

KO 1.7.-49 Frekvence, při které dochází k rezonanci, tj. amplituda kmitů oscilátoru se zvětší.

KO 1.7.-50 Viz. text

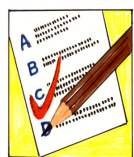
KO 1.7.-51 Charakterizuje závislost amplitudy nucených kmitů na frekvenci budící síly.

KO 1.7.-52 viz text.

KO 1.7.-53 Zesílení signálu v přijímači.

KO 1.7.-54 Destrukce staveb.

1.7.4. Skládání kmitů



TO 1.7.-24. b)

TO 1.7.-25. d)

TO 1.7.-26. c)

TO 1.7.-27. b)

TO 1.7.-28. c)

TO 1.7.-29. c)

TO 1.7.-30. a), c)

TO 1.7.-31. b),d)

TO 1.7.-32. a)

TO 1.7.-33. b)

TO 1.7.-34. c)

TO 1.7.-35. c)

TO 1.7.-36. b)

TO 1.7.-37. c)

TO 1.7.-38. a)

TO 1.7.-39. a)

TO 1.7.-40. .b)

TO 1.7.-41. c)

TO 1.7.-42. a)

TO 1.7.-43. b)



KO 1.7.-55 Viz text.

KO 1.7.-56 Viz text.

KO 1.7.-57- $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}.$

KO 1.7.-58 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

KO 1.7.-59 Když kmity budou ve fázi.

KO 1.7.-60 Když kmity budou v opačné fázi a $A_1 = A_2$

KO 1.7.-61 Viz text.

KO 1.7.-62 Při skládání kmitů blízkých frekvencí.

KO 1.7.-63 Viz text.

KO 1.7.-64 Viz text.