

1.7.3. Kmity vynucené



1. Umět vysvětlit podstatu vynucených kmitů.
2. Pochopit význam budící síly.
3. Vysvětlit přechodový stav.
4. Vědět, jak se mění amplituda vynucených kmitů v závislosti na frekvenci budící síly.
5. Vědět, co je rezonanční frekvence.
6. Vysvětlit pojem rezonance.



Nucené kmity vznikají tehdy, když energii tlumených kmitů, která se třením přeměňuje v teplo v pravidelných intervalech nahrazujeme.

Typickým příkladem je driblování s míčem při basketbalu. Ztracenou energii obnovujeme pravidelnými údery ruky a nutíme tím míč vyskočit do původní polohy.

Vnější síla, která dodává energii se nazývá **budící síla**. Zvláštní případ nastane tehdy, když je tato síla harmonická.

Při nucených kmitěch působí na těleso tři síly:

1. **síla pružnosti** $\vec{F}_p = -k \vec{y}$,
2. **síla odporová** $\vec{F}_t = -R \vec{v}$,
3. **síla budící** $\vec{F}_b = \vec{F}_0 \sin \Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budící síly.

Výslednice všech sil $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{F}_b$ představuje pohybovou sílu, ovlivňující pohyb kmitajícího hmotného bodu.

Pohybová rovnice tlumených kmitů je odvozená ze základní pohybové rovnice (Newtonova zákonu síly).

Zapíšeme ji ve tvaru

$$m a = -k y - R v + F_0 \sin \Omega t. \quad 1.7.-47$$

Po úpravách a vyjádření rychlosti a zrychlení jako první a druhé derivace dráhy podle času dostaneme diferenciální rovnici nucených kmitů. Zavedeme do rovnice známé konstanty a získáme tvar

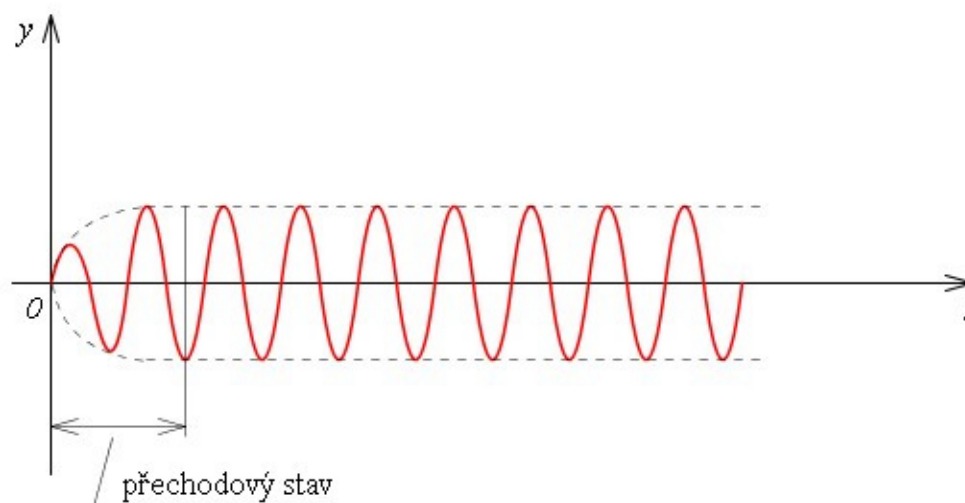
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = a \sin \Omega t. \quad 1.7.-48$$

Řešením pohybové rovnice je vztah pro okamžitou výchylku ve tvaru

$$y = A_0 e^{-bt} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + A_b \sin(\Omega t + \Psi). \quad 1.7.-49$$

Hmotný bod koná v případě nucených kmitů vlastní tlumené kmity s frekvencí tlumených kmitů ω_t jen zpočátku pohybu. Po určité době tyto kmity ustanou a převládnu kmity netlumené s amplitudou vynucených kmitů A_v , frekvencí vynucených kmitů Ω a počáteční fází vynucených kmitů Ψ .

Vlastní kmity se uplatňují pouze v tzv. přechodovém stavu.



Obr.1.7.-15

Úpravou dostaneme amplitudu nucených kmitů ve tvaru

$$A_v = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}. \quad 1.7.-50$$

Rezonance

Amplituda nucených kmitů mění svou velikost v závislosti na frekvenci nucených kmitů Ω .

Při určité hodnotě, které říkáme **rezonanční frekvence** Ω_r , bude amplituda maximální.

Jestliže postupně měníme frekvenci nucených kmitů Ω tak, že se bude blížit rezonanční frekvenci Ω_r , pak se amplituda nucených kmitů A_v bude postupně zvětšovat. V okamžiku rovnosti bude největší. Dalším zvyšováním frekvence Ω bude amplituda vynucených kmitů opět klesat.

Maximální hodnoty dosáhne v případě, když výraz ve jmenovateli bude extrémně malý.

Pak rezonanční frekvence je určena vztahem

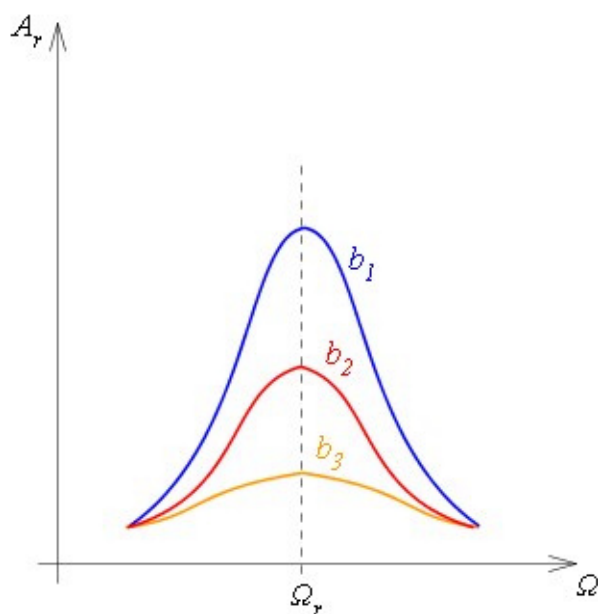
$$\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}. \quad 1.7.-51$$

Rezonance je jev, který nastane v případě, kdy frekvence Ω budící síly je stejná jako rezonanční frekvence Ω_r . Amplituda nucených kmitů bude mít v tom okamžiku maximální hodnotu A_r se přitom může mnohonásobně zvětšit.

Rezonanční amplituda A_r se pak určí pomocí vztahu

$$A_r = \frac{a}{2b\sqrt{\omega^2 - b^2}}. \quad 1.7.-52$$

Závislost amplitudy je znázorněna na obrázku. Jsou zde zachyceny tři různé rezonanční křivky pro tři různé součinitele útlumu b , přičemž $b_3 > b_2 > b_1$

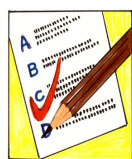


Obr. 1.7.-16

Poznámka:

V některých případech je rezonance jev pozitivní, například tehdy, když chceme zesílit akustický signál určité frekvence na pozadí jiných akustických signálů dalších frekvencí.

Naopak, například ve stavebnictví, je rezonance nežádoucí. Ve zvláštních případech mohou být rezonanční amplitudy kmitajících objektů tak velké, že rozkmity povedou k destrukci staveb. Takový stav může nastat tehdy, když frekvence otáček turbíny je stejná jako rezonanční frekvence kmitů budovy.



TO 1.7.-21. Vztah charakterizující budící sílu je

- $\vec{F}_b = \vec{F}_0 \sin \Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budící síly
- $\vec{F}_b = R \sin \Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budící síly
- $\vec{F}_b = k \sin \Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budící síly
- $\vec{F}_b = \vec{F}_0 \sin \omega_t t$, kde ω_t je úhlová frekvence odporové síly

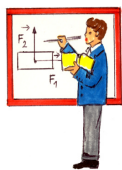
TO 1.7.-22. Amplituda vynucených kmitů

- exponenciálně klesá
- exponenciálně roste
- je po určité době konstantní

TO 1.7.-23. Rezonance nastane u vynucených kmitů

- vždy
- jestliže frekvence budící síly je totožná s rezonanční frekvencí oscilátoru

- c) jestliže frekvence budící síly je rovna poloviční hodnotě rezonanční frekvence
d) jestliže frekvence budící síly je rovna dvojnásobku hodnoty rezonanční frekvence



Naložený nákladní vagón má pera prohnutá o $y = 7,9$ cm. Při jaké rychlosti vagónu se pera zvlášť silně rozkmitají účinkem nárazů kol na spoje kolejnic? Délka kolejnic je $d = 12,5$ m.

$$y = 0,079 \text{ m}, d = 12,5 \text{ m}, v = ?$$

Rozkmitání per nastane právě tehdy, bude-li splněna podmínka rezonance. Frekvence kmitů per musí být rovna frekvenci nárazů na kolejnice.

Pro tuhost pružiny vyjdeme ze vztah rovnosti síly pružnosti a tíhové síly

$$F_p = F_G \Rightarrow k y = m g \Rightarrow k = \frac{m g}{y}$$

Při řešení použijeme rovnost dob kmitu.

Pro dobu kmitu vagónu platí z teorie netlumených kmitů

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m g}{y}}} = 2\pi \sqrt{\frac{y}{g}}.$$

Pro dobu mezi dvěma nárazy na kolejnice platí vztah $T_1 = \frac{d}{v}$.

$$\text{Srovnáním dostaneme } \frac{d}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{y}{g}}.$$

Pak

$$v = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y}} = \frac{12,5}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{0,079}} = 22,1 \text{ m.s}^{-1}.$$

Rezonance nastane při rychlosti $22,1 \text{ m.s}^{-1}$.



Odvoďte vztah pro rezonanční frekvenci.

Při rezonanční frekvenci bude amplituda vynucených kmitů A_v maximální.

$$\text{Použijeme vztah } A_v = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}.$$

Amplituda A_v bude maximální právě tehdy, jestliže jmenovatel zlomku bude mít extrémně malou hodnotu (určíme extrém funkce).

Výraz ve jmenovateli budeme derivovat podle proměnné Ω a pak položíme rovno nule. Dostaneme

$$\frac{d}{d\Omega} \left[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2 \right] = -2(\omega^2 - \Omega^2)2\Omega + 8b^2 \Omega = 0.$$

Po úpravě řešíme rovnici

$$4\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 8b^2 \Omega = 0.$$

Rovnice má dva kořeny, pro které nastane extrém:

1. $\Omega_1 = 0$, v tomto případě nucené kmity nevzniknou,

2. $\Omega_2 = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$, v tomto případě vzniknou nucené kmity s maximální amplitudou.

Kořen Ω_2 je hledanou rezonanční frekvencí.



Určete amplitudu A_r při rezonanční frekvenci Ω_r .

Do vztahu pro amplitudu vynucených kmitů A_v

$$A_v = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}$$

dosadíme za úhlovou frekvenci budící síly Ω vztah pro rezonanční frekvenci $\Omega_r = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$.

Po úpravě dostaneme rezonanční amplitudu ve tvaru $A_r = \frac{a}{2b\sqrt{\omega^2 - b^2}}$.



KO 1.7.-45. Charakterizujte vynucené kmity.

KO 1.7.-46. Co je podstatou rezonančních jevů?

KO 1.7.-47. Co je budící síla?

KO 1.7.-48. Vysvětlete přechodový stav.

KO 1.7.-49. Co je rezonanční frekvence?

KO 1.7.-50. Zakreslete rezonanční křivku. Viz. text

KO 1.7.-51. Vysvětlete, co charakterizuje rezonanční křivka.

KO 1.7.-52. Jak se mění amplituda vynucených kmitů v závislosti na součiniteli útlumu b ?

KO 1.7.-53. Uveďte příklady pozitivní rezonance.

KO 1.7.-54. Uveďte příklady negativní rezonance