

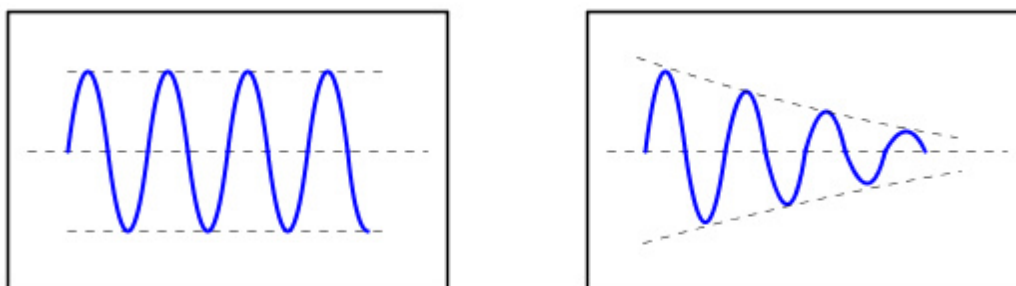
## 1.7.2. Tlumené kmity



1. Umět vysvětlit podstatu tlumeného kmitavého pohybu.
2. Vysvětlit význam tlumící síly.
3. Znat rovnici okamžité výchylky tlumeného kmitavého pohybu.
4. Umět popsat amplitudu tlumených kmitů.
5. Znat konstanty charakterizující tlumený kmitavý pohyb – koeficient odporu prostředí, součinitel útlumu, útlum, logaritmický dekrement útlumu.
6. Vědět, jaký je vztah mezi periodou a frekvencí netlumeného a tlumeného kmitavého pohybu.
7. Umět vysvětlit energii tlumeného kmitavého pohybu.

Dosud jsme uvažovali kmitavé pohyby, při kterých se potenciální energie pružnosti mění na energii kinetickou a celková energie, jež je rovna jejich součtu, je konstantní. Amplituda takových kmitů je neměnná.

Ve skutečnosti se část energie u všech mechanických pohybů přeměňuje vlivem tření a odporu prostředí na teplo, a není tedy využita. V tom případě se velikosti po sobě jdoucích amplitud zmenšují a kmitající soustava koná **tlumené kmity**.



Obr. 1.7.-12

Při menších rychlostech působí proti pohybu síla tlumící síla (síla odporu prostředí). Je úměrná rychlosti, kde koeficientem úměrnosti je koeficient **odporu prostředí  $R$** . Tato síla působí proti pohybu, proto ji zapisujeme ve tvaru

$$F_t = -Rv. \quad 1.7.-31$$

V neodporujícím prostředí kmitá těleso s frekvencí  $f$  a periodou  $T$ . Po vložení do odporujícího prostředí se pohyb zpomalí, perioda  $T$  se prodlouží a frekvence  $f$  se zkrátí. Těleso bude kmitat s periodou  $T_t$  a frekvencí  $f_t$  tlumených kmitů.

### 1.7.2.1. Rovnice tlumeného kmitavého pohybu

Při kmitavém pohybu v odporujícím prostředí působí na hmotný bod dvě síly:

1. síla pružnosti  $F_p = -k y$ , kde  $k$  je tuhost pružiny a  $y$  je okamžitá výchylka,
2. tlumící síla  $F_t = -Rv$ , kde  $R$  je koeficient odporu prostředí a  $v$  rychlost.

Jednotkou konstanty  $k$  je  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ , jednotkou konstanty  $R$  je  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Výsledná síla, která hmotnému bodu uděluje zrychlení je rovna jejich vektorovému součtu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_t. \quad 1.7.-32$$

Ve skrytém textu najdete podrobnější odvození pohybové rovnice tlumených kmitů

Podle Newtonova zákona můžeme psát

$$m a = -k y - R v. \quad 1.7.-33$$

Po úpravách a pomocí substitucí

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad 2b = \frac{R}{m} \quad 1.7.-34$$

je pohybová rovnice tlumeného kmitavého pohybu ve tvaru

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad 1.7.-35$$

Řešením pohybové rovnice je rovnice, která popisuje okamžitou výchylku hmotného bodu z rovnovážné polohy tlumeného kmitavého pohybu.

$$y = A \sin(\omega_t t + \varphi_0). \quad 1.7.-36$$

V tomto případě ovšem amplituda  $A$  nemá konstantní hodnotu, ale zmenšuje se podle exponenciální funkce

$$A = A_0 e^{-bt}, \quad 1.7.-37$$

kde  $A_0$  je počáteční amplituda a  $b$  je součinitel útlumu.

Rovnice okamžité výchylky je pak

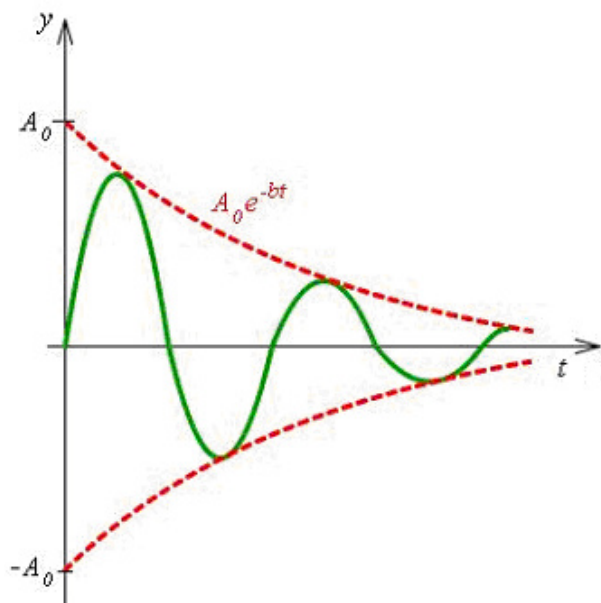
$$y = A_0 e^{-bt} \sin(\omega_t t + \varphi_0).$$

Úhlová frekvence  $\omega_t$  je úhlová frekvence tlumených kmitů a je určena vztahem

$$\omega_t = \sqrt{\omega^2 - b^2}.$$

Odtud pak můžeme stanovit periodu  $T_t$  a frekvenci  $f_t$  tlumených kmitů podle vztahů

$$\omega_t = \frac{2\pi}{T_t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$



Obr. 1.7.-13

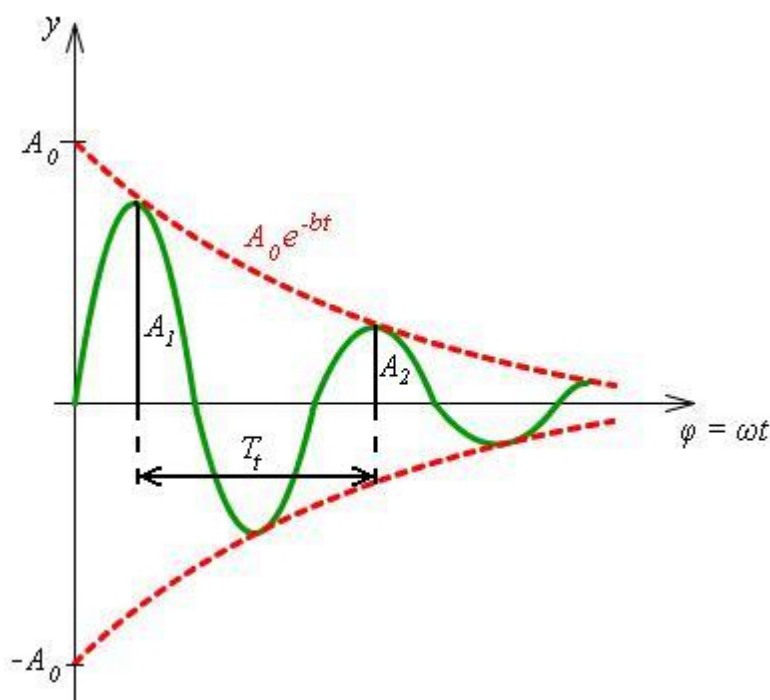
$$\omega_t = 2\pi f_t, \quad \omega = 2\pi f.$$

$T$ ,  $f$  jsou perioda a frekvence kmitavého pohybu, jestliže odstraníme tlumení.

Kromě koeficientu odporu prostředí  $R$  a součinitele útlumu  $b$  zavádíme další konstanty, které charakterizují tlumený kmitavý pohyb.

Jsou to **útlum  $\lambda$**  a **logaritmický dekrement útlumu  $\delta$** .

**Útlum  $\lambda$**  je podíl dvou po sobě jdoucích amplitud stejného směru. Tyto amplitudy jsou od sebe časově vzdáleny o jednu periodu  $T_t$ .



Obr. 1.7.-14

Pak

$$\lambda = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_0 e^{-bt}}{A_0 e^{-b(t+T_t)}} = \frac{e^{-bt}}{e^{-bt-bT_t}} = \frac{e^{-bt}}{e^{-bt} e^{-bT_t}} = \frac{1}{e^{-bT_t}}.$$

$$\lambda = e^{bT_t}$$

1.7.-41

Útlum  $\lambda$  je bezrozměrné číslo.

**Logaritmický dekrement útlumu  $\delta$**  je přirozený logaritmus útlumu  $\lambda$ .

$$\delta = \ln \lambda = \ln e^{bT_t} = bT_t \ln e = bT_t.$$

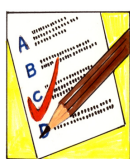
$$\delta = bT_t$$

1.7.-42

Rovněž i  $\delta$  je bezrozměrná veličina.

### Aperiodický pohyb

Tento pohyb vzniká tehdy, když je tření příliš velké a periodický pohyb vůbec nevznikne. Často je úmyslně vytvářen u měřicích přístrojů vhodně voleným tlumením.



**TO 1.7.-15.** Těleso hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině tuhosti  $k$  a koná tlumený harmonický pohyb. Odpor prostředí je  $F_t = -Rv$ . Diferenciální rovnici těchto tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad \text{Určete, které vztahy charakterizují součinitel útlumu}$$

a úhlovou frekvenci netlumených kmitů (vlastní frekvenci).

a)  $2b = \frac{R}{m}$  a  $\omega^2 = \frac{k}{m}$

b)  $2b = \frac{m}{R}$  a  $\omega = \frac{k}{m}$

c)  $b = \frac{R}{2m}$  a  $\omega = \frac{k}{m}$

d)  $b = \frac{R}{m}$  a  $\omega = \frac{k}{m}$

**TO 1.7.-16.** Těleso hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině tuhosti  $k$  a koná tlumený harmonický pohyb. Síla odporu prostředí je  $F_t = -Rv$ . Diferenciální rovnici těchto

tlumených kmitů můžeme psát ve tvaru  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$ . Řešením této

rovnice je

a)  $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $A = A_0 e^{bt}$

b)  $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , kde  $A = A_0 e^{-bt}$

c)  $y = A \sin(\omega_t t + \varphi_0)$ , kde  $A = A_0 e^{-2bt}$

d)  $y = A \sin(\omega_t t + \varphi_0)$ , kde  $A = A_0 e^{-bt}$

**TO 1.7.-17.** Součinitel útlumu je  $b = 2 \text{ s}^{-1}$ , logaritmický dekrement útlumu  $\delta = 8$ . Určete periodu tlumeného kmitavého pohybu  $T_t$ .

- a) 16 s
- b) 4 s
- c)  $\frac{1}{4} \text{ s}$
- d) 64 s



Při tlumeném kmitavém pohybu bylo zjištěno, že podíl dvou za sebou jdoucích výchylek se amplituda zmenšila o  $\frac{6}{10}$  a doba kmitu  $T_t = 0,5 \text{ s}$ . Určete

- a) součinitel útlumu,
- b) frekvenci kmitů, odstraníme-li tlumení.

a) Protože logaritmický dekrement útlumu je

$$\delta = \ln \lambda = b T_t$$

a pro amplitudy platí

$$A_2 = \frac{4}{10} A_1 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{10} = \lambda, \text{ pak } b = \frac{\ln \lambda}{T_t} = \frac{\ln \frac{4}{10}}{0,5} = 1,83 \text{ s}^{-1}.$$

Součinitel útlumu je  $1,83 \text{ s}^{-1}$ .

c) Z rovnice  $\omega_t^2 = \omega^2 - b^2$  po dosazení dostaneme

$$4\pi^2 f^2 = 4\pi^2 f_t^2 + b^2.$$

Vydělením

$$f = \sqrt{\frac{4\pi^2 f_t^2 + b^2}{4\pi^2}}.$$

Po dosazení je frekvence po odstranění tlumení  $f = 1,04 \text{ s}^{-1}$ .



Určete vztah pro rychlost a zrychlení tlumeného kmitavého pohybu.

Rychlost je  $v = \frac{dy}{dt}$ , derivujeme tedy vztah pro okamžitou výchylku tlumeného

kmitavého pohybu.

Proměnná veličina čas  $t$  se vyskytuje v exponentu amplitudy a ve fázi kmitavého pohybu. Derivujeme proto jako součin dvou funkcí.

Pak vztah pro rychlost je

$$v = -b A e^{-bt} \sin(\omega_t t + \varphi_0) + A e^{-bt} \omega_t \cos(\omega_t t + \varphi_0).$$

Podobně je zrychlení  $a = \frac{dv}{dt}$ .

Postupně derivujeme rychlost podle času.

Pak zrychlení je

$$a = (b^2 - \omega_t^2) A e^{-bt} \sin(\omega_t t + \varphi_0) - 2b A e^{-bt} \omega_t \cos(\omega_t t + \varphi_0).$$



**KO 1.7.-29.** Co způsobuje tlumený kmitavý pohyb?

**KO 1.7.-30** Zapište vztah pro sílu odporu prostředí při malých rychlostech.

**KO 1.7.-31.** Určete jednotku koeficientu odporu  $R$  prostředí.

**KO 1.7.-32.** Určete jednotku součinitele útlumu  $b$ .

**KO 1.7.-33.** Popište, jak se změní perioda a frekvence tlumených kmitů.

### 1.7.2.2. Energie tlumeného kmitavého pohybu

Kmitová energie netlumených kmitů je konstantní a je popsána výrazem  $E = \frac{1}{2} k A^2$ .

**U tlumených kmitů amplituda exponenciálně klesá vlivem tření, a proto klesá zároveň celková energie.**

Protože

$$A = A_0 e^{-bt}, \quad 1.7.-43$$

kde  $A_0$  je počáteční amplituda, pak

$$E = \frac{1}{2} k (A_0 e^{-bt})^2. \quad 1.7.-44$$

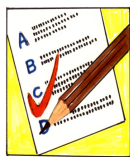
Po úpravě je

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2bt}. \quad 1.7.-45$$

Výraz  $\frac{1}{2} k A_0^2$  představuje počáteční kmitovou energii  $E_0$ .

**V konečném tvaru je vztah pro energii tlumených kmitů**

$$E = E_0 e^{-2bt}, \quad 1.7.-46$$



**TO 1.7.-18.** Určete výraz pro energii tlumených kmitů.

a)  $E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-bt}$

b)  $E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2bt}$

c)  $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-bt}$

d)  $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A_0^2 e^{-2bt}$

**TO 1.7.-19.** Amplituda tlumených kmitů se mění podle funkce

- a) logaritmicky roste
- b) hyperbolicky klesá
- c) exponenciálně klesá
- d) exponenciálně roste

**TO 1.7.-20.** Energie tlumených kmitů se mění podle funkce

a)  $E = E_0 A e^{-2bt}$

b)  $E = E_0 A e^{-bt}$

c)  $E = E_0 e^{-2bt}$

d)  $E = E_0 A e^{-2t}$



Součinitel útlumu je  $3 \text{ s}^{-1}$ . Určete dobu, za kterou klesne energie tlumených kmitů na 20%.

Pro energii kmitů platí vztah  $E = \frac{1}{2} k A^2$ . Amplituda tlumených kmitů klesá

podle funkce  $A = A_0 e^{-bt}$ .

Pak  $E = \frac{1}{2} k (A_0 e^{-bt})^2$ .

Po úpravě  $E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2bt} \Rightarrow E = E_0 e^{-2bt}$ .

$0,2E_0 = E_0 e^{-2bt}$

$0,2 = e^{-2bt}$

$$\ln 0,2 = -2bt \ln e$$

$$\frac{\ln 0,2}{-2b} = t$$

$$t = \frac{\ln 0,2}{-2,3}$$

$$t = 0,27 \text{ s.}$$

Energie klesne na 20 % za 0,27 s.



**KO 1.7.-34.** Zakreslete graf pro celkovou energii tlumených kmitů.

**KO 1.7.-35.** Vysvětlete změnu celkové energie tlumených kmitů.

**KO 1.7.-36.** Která funkce popisuje změnu celkové energie tlumených kmitů.

**KO 1.7.-37.** Definujte amplitudu tlumených kmitů.

**KO 1.7.-38.** Zapište rovnici pro okamžitou výchylku tlumených kmitů.

**KO 1.7.-39.** Charakterizujte součinitel útlumu  $b$ .

**KO 1.7.-40.** Zapište vztah mezi součinitelem útlumu  $b$  a koeficientem odporu prostředí  $R$ .

**KO 1.7.-41.** Definujte útlum.

**KO 1.7.-42.** Určete vztah mezi útlumem  $\lambda$  a logaritmickým dekrementem útlumu  $\delta$ .

**KO 1.7.-43.** Určete jednotku součinitele útlumu  $b$ , útlumu  $\lambda$  a logaritmického dekrementu útlumu  $\delta$ .

**KO 1.7.-44.** Zapište vztah mezi tlumenou úhlovou frekvencí  $\omega$  a netlumenou úhlovou frekvencí  $\omega$ .